Klausur: Mathematik
am Mittwoch, den 28. Januar 2009

Jürgen Meisel
FH Ludwigshafen

Zugelassene Hilfsmittel: Nicht progr. Taschenrechner
Bearbeitungszeit: **120 Minuten**

1.) **Berechnen mathematischer Ausdrücke**

a) Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Summenausdrucks:

$$\sum_{t=16}^{100}(4t)$$

Lösung:

$$\sum_{t=16}^{100}(4t) = 4\cdot\left(\sum_{i=1}^{100} t - \sum_{i=1}^{15} t\right) = 4\cdot\left(\frac{100\cdot 101}{2} - \frac{15\cdot 16}{2}\right) = 4\cdot(5.050-120) = 19.720$$

b) Bilden Sie die Entwicklung nach dem Binomischen Lehrsatz
und vereinfachen Sie den Ausdruck so weit wie möglich:

$$(3x+2k)^4$$

Lösung:

$$(3x+2k)^4 = \binom{4}{0}(3x)^4\cdot(2k)^0 + \binom{4}{1}(3x)^3\cdot(2k)^1 + \binom{4}{2}(3x)^2\cdot(2k)^2 + \binom{4}{3}(3x)^1\cdot(2k)^3 + \binom{4}{4}(3x)^0\cdot(2k)^4$$

$$(3x+2k)^4 = 81x^4 + 216kx^3 + 216k^2x^2 + 96k^3x + 16k^4$$

c) Bestimmen Sie die Determinante der nachfolgenden Matrix:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -k & 5 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & k \end{pmatrix}$$

Lösung: $$Det\begin{pmatrix} 2 & -k & 5 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & k \end{pmatrix} = 6k + 4k - 20 + 15 - 16 - 2k^2 = -2k^2 + 10k - 21$$

2.) **Totales Differential**

Der Gewinn eines Unternehmens hängt von 4 Einflussgrößen auf folgende Weise ab:

$$g(a,b,c,d) = 3a + ab^2 + c^2 + 2d$$

Vom Ausgangsniveau $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 20 & 10 \end{pmatrix}$ könnte das Unternehmen jede der Einflussgrößen um 10 % erhöhen

a) Welche Einflussgröße wird die größte Gewinnsteigerung verursachen?

Beweisen Sie Ihre Behauptung durch eine geeignete Berechnung!

<u>Lösung:</u>

$$\frac{\partial g}{\partial a} = 3 + b^2 \xrightarrow{\text{Werte einsetzen}} \frac{\partial g}{\partial a} = 3 + 20^2 = 403$$

$$\frac{\partial g}{\partial b} = 2ab \xrightarrow{\text{Werte einsetzen}} \frac{\partial g}{\partial b} = 2 \cdot 10 \cdot 20 = 400$$

$$\frac{\partial g}{\partial c} = 2c \xrightarrow{\text{Werte einsetzen}} \frac{\partial g}{\partial c} = 2 \cdot 20 = 40$$

$$\frac{\partial g}{\partial d} = 2 \xrightarrow{\text{Werte einsetzen}} \frac{\partial g}{\partial d} = 2$$

Eine Variation der Einflussgröße a würde die größte Gewinnsteigerung ergeben.

b) Um welchen Betrag wird sich der Gewinn näherungsweise erhöhen, wenn alle Einflussgrößen um 10 % erhöht werden?

Verwenden Sie hierfür das totale Differential!

<u>Lösung:</u>

$$Ansatz: \quad dg = \frac{\partial g}{\partial a} \cdot da + \frac{\partial g}{\partial b} \cdot db + \frac{\partial g}{\partial c} \cdot dc + \frac{\partial g}{\partial d} \cdot dd$$

$$dg = 403 \cdot 1 + 400 \cdot 2 + 40 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 1.285$$

3.) **Kurvendiskussion**

Gegeben sei die Funktionenschar $f_k(x)$ mit der Vorschrift

$$f_k(x) = x^4 - 2kx^3 + k^4 \qquad mit \quad k > 0$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion nur einen Extremwert besitzt und berechnen Sie diesen Punkt.

Lösung:

$$Extremwert(e):$$

$$f_k'(x) = 4x^3 - 6kx^2 \qquad f_k''(x) = 12x^2 - 12kx$$

$$f_k'(x) = 2x^2(2x - 3k) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0\,[doppelt] \quad \wedge \quad x_2 = \frac{3}{2}k$$

Da $x_1 = 0$ eine doppelte Nullstelle der ersten Ableitung ist, liegt kein Extremum vor!

$$f_k''\left(\frac{3}{2}k\right) = 9k^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad Min\left(\frac{3}{2}k \;\middle|\; -\frac{11}{16}k^4\right)$$

b) Bestimmen Sie die beiden Wendepunkte der Funktion. Beweisen Sie hierbei auch, dass es sich um Wendepunkte handelt!

Lösung:

$$Wendepunkt(e):$$

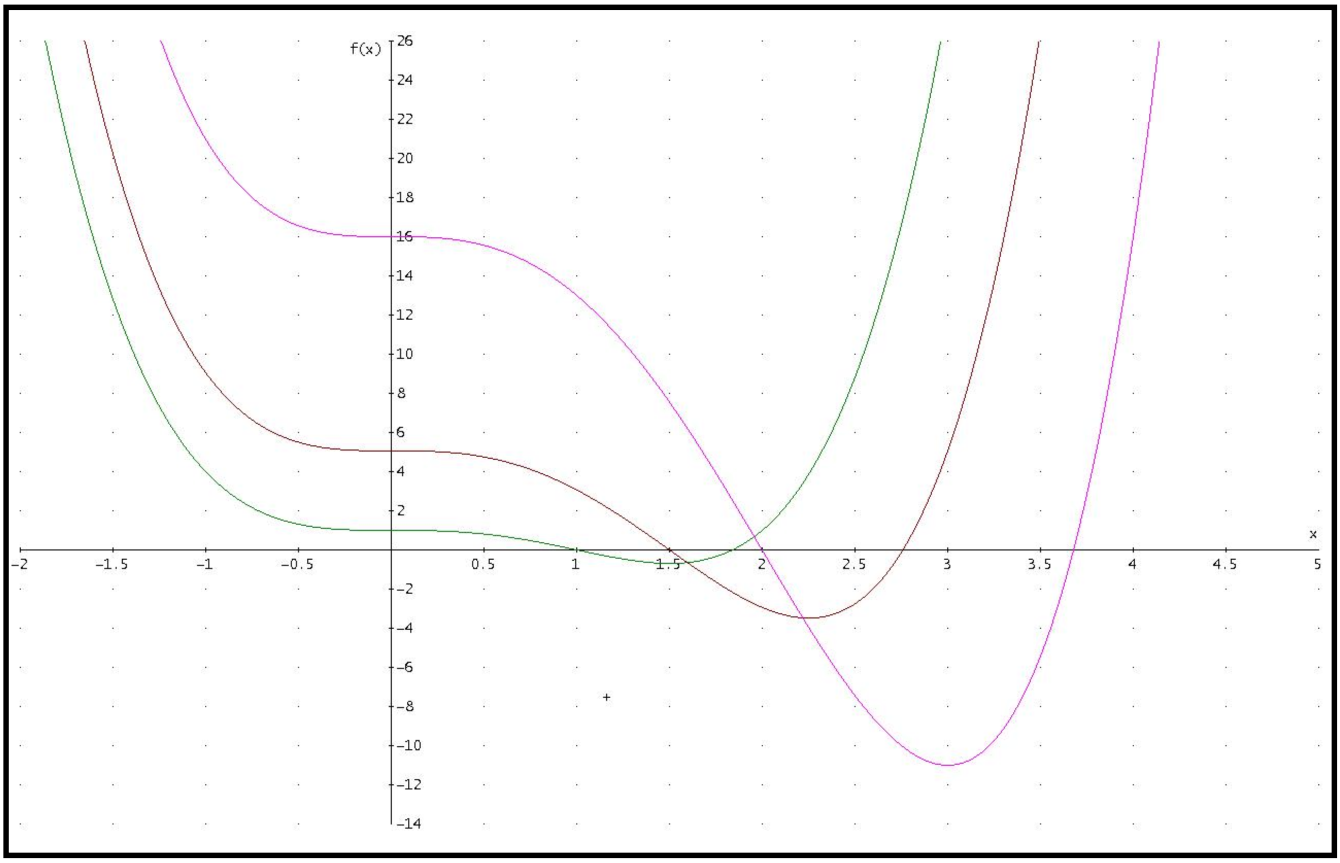
$$\left[f_k'(x) = 4x^3 - 6kx^2\right] \qquad f_k''(x) = 12x^2 - 12kx \qquad f_k'''(x) = 24x - 12k$$

$$f_k''(x) = 12x(x - k) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = k$$

$$f_k'''(0) = -12k \neq 0 \quad \Rightarrow \quad W_1\left(0 \mid k^4\right)$$

$$f_k'''(k) = 12k \neq 0 \quad \Rightarrow \quad W_2\left(k \mid 0\right)$$

Graph für k = {1; 1,5; 2}



f(x)
x

4.) **Flächenberechnung**

Bestimmen Sie die Fläche beim gegebenen Integral:

$$\int_{-1}^{2} \left(2x^3 - 8x\right) dx$$

Lösung:

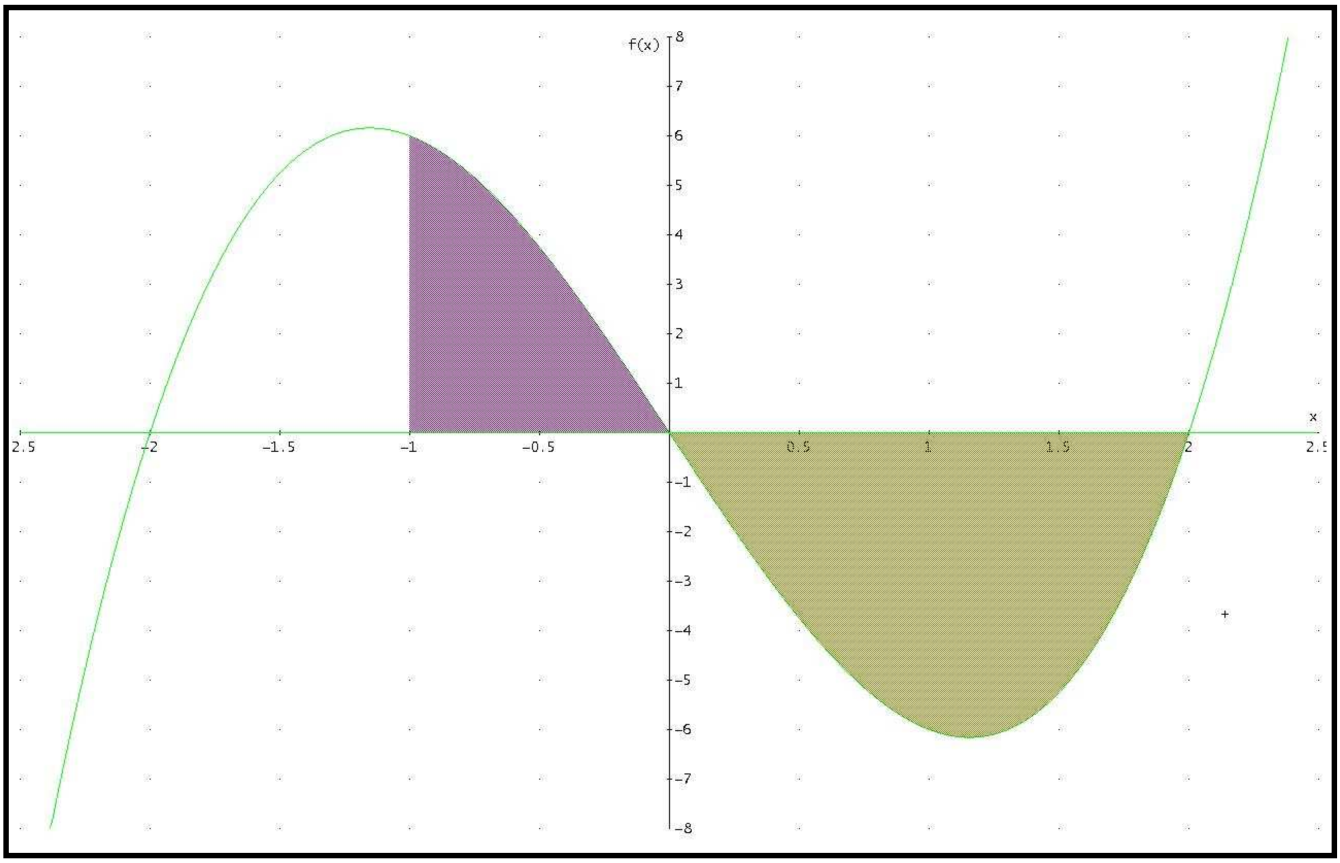
Nullstellen berechnen:

$$2x^3 - 8x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x\left(x^2 - 4\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = -2 \quad \wedge \quad x_3 = 2$$

Flächenberechnung:

$$\int_{-1}^{0} \left(2x^3 - 8x\right) dx + \left|\int_{0}^{2} \left(2x^3 - 8x\right) dx\right| \; = \; \left[\frac{1}{2}x^4 - 4x^2\right]_{-1}^{0} + \left|\left[\frac{1}{2}x^4 - 4x^2\right]_{0}^{2}\right| \; =$$

$$\left[0 - \left(\frac{1}{2} - 4\right)\right] + \left|\, (8 - 16) - 0 \,\right| \; = \; 3{,}5 + 8 \; = \; 11{,}5$$



5.) **Optimum ohne Nebenbedingungen**

Ein Betrieb produziert Gütern G_1 und G_2 in den Mengen x und y.

Die Gewinnfunktion habe die Form

$$g(x,y) = 100x + 140y - x^2 - 2xy - 2y^2$$

a) Bestimmen Sie die Größen x und y für die der Gewinn ein Maximum annimmt.

b) Wie groß wird der maximale Gewinn?

<u>Lösung:</u>

$$g(x,y) = 100x + 140y - x^2 - 2xy - 2y^2$$

$$I.)\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 100 - 2x - 2y \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad y = 50 - x$$

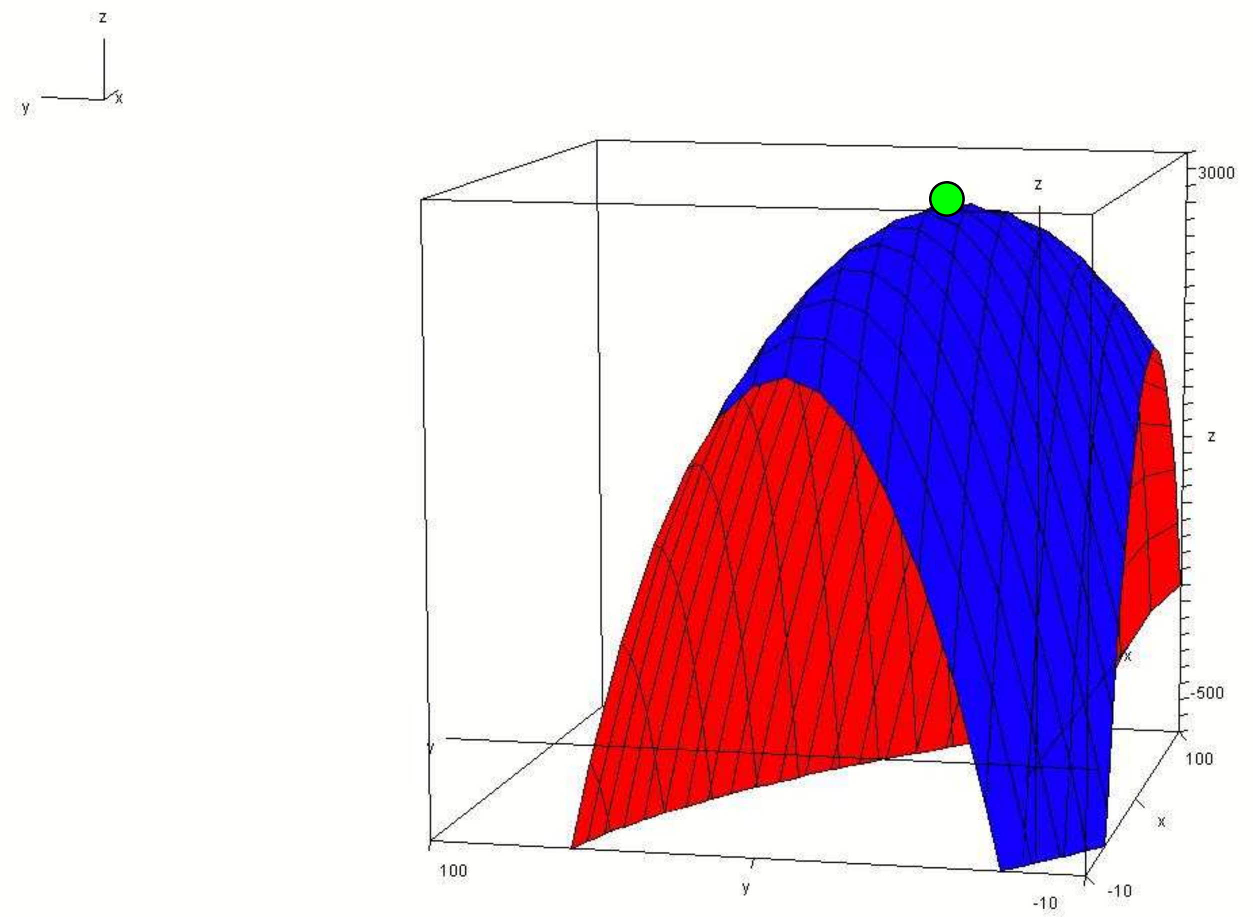
$$II.)\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 140 - 2x - 4y \overset{!}{=} 0 \quad \xrightarrow{I \text{ in } II} \quad 140 - 2x - 4(50 - x) = 0$$

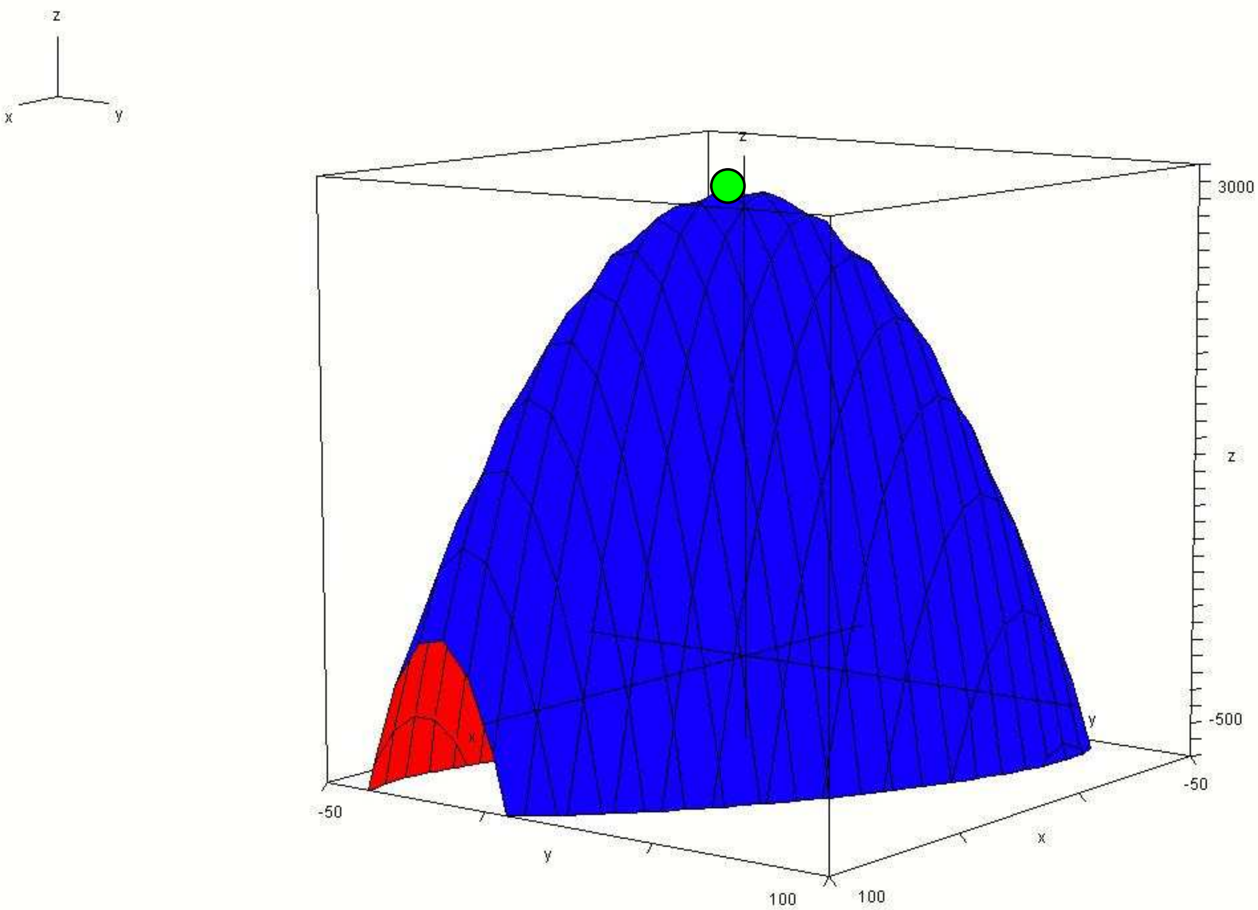
$$\Rightarrow \quad 140 - 2x - 200 + 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = 60 \quad \Rightarrow \quad x = 30 \quad \Rightarrow \quad y = 20$$

Es resultiert eine stationäre Stelle: $S(30 \mid 20 \mid 2.900)$

$$Hesse-Matrix: \quad H\left(f_S(30 \mid 20)\right) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \det(H) = 4 > 0 \quad \wedge \quad f_{xx} = (-2) < 0 \quad \Rightarrow \quad Max(30 \mid 20 \mid 2.900)$$


z
y
x
3000
-500
100
-10
-10
100


z
x
y
3000
-500
-50
-50
100
100

6.) **Matrizenrechnung und LGS**

Lösen Sie das LGS, das durch die erweiterte Koeffizientenmatrix dargestellt wird:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 6 & 400 \\ 2 & 4 & 4 & 300 \\ 7 & 5 & 11 & 750 \end{array}\right)$$

<u>Lösung:</u>

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 400 \quad (1) \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 300 \quad (2) \\ 7x_1 + 5x_2 + 11x_3 &= 750 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 1/2\,x_2 + 3/2\,x_3 &= 100 \quad (1) \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 300 \quad (2) \\ 7x_1 + 5x_2 + 11x_3 &= 750 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 1/2\,x_2 + 3/2\,x_3 &= 100 \quad (1) \\ 3x_2 + x_3 &= 100 \quad (2) \\ 7x_1 + 5x_2 + 11x_3 &= 750 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 1/2\,x_2 + 3/2\,x_3 &= 100 \quad (1) \\ 3x_2 + x_3 &= 100 \quad (2) \\ 3/2\,x_2 + 1/2\,x_3 &= 50 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 1/2\,x_2 + 3/2\,x_3 &= 100 \quad (1) \\ x_2 + 1/3\,x_3 &= 100/3 \quad (2) \\ 3/2\,x_2 + 1/2\,x_3 &= 50 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + 4/3\,x_3 &= 250/3 \quad (1) \\ x_2 + 1/3\,x_3 &= 100/3 \quad (2) \\ 3/2\,x_2 + 1/2\,x_3 &= 50 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + 4/3\,x_3 &= 250/3 \quad (1) \\ x_2 + 1/3\,x_3 &= 100/3 \quad (2) \\ 0 &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

Unendlich viele Lösungen: 1 Parameter wählbar

$x_1 = 250/3 - 4/3\,x_3$

$x_2 = 100/3 - 1/3\,x_3$

x_3 beliebig wählbar

7.) **Optimum mit Nebenbedingungen**

Gegeben sei folgende Produktionsfunktion: $f(x,y) = 2x^{0,75} \cdot y^{0,25}$

Die Mengeneinheit für x kostet 5,00 €, der Preis für eine Mengeneinheit von y liegt bei 2,00 €.

Insgesamt stehen uns 8.000,00 € zur Verfügung.

Wie viel kann man unter den gegebenen Bedingungen produzieren?

<u>Lösung:</u>

$$L(x,y,\lambda) = 2x^{0,75} \cdot y^{0,25} + \lambda(8.000 - 5x - 2y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) = \frac{3}{2} \cdot \frac{y^{0,25}}{x^{0,25}} - 5\lambda \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{10} \cdot \frac{y^{0,25}}{x^{0,25}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{0,75}}{y^{0,75}} - 2\lambda \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^{0,75}}{y^{0,75}}$$

$$\textit{Austauschverhältnis}:$$

$$\frac{3}{10} \cdot \frac{y^{0,25}}{x^{0,25}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^{0,75}}{y^{0,75}} \Rightarrow y = \frac{5}{6}x$$

$$\textit{eingesetzt in NB}:$$

$$8.000 = 5x + 2y \xrightarrow{y = \frac{5}{6}x} 8.000 = 5x + 2 \cdot \frac{5}{6}x$$

$$\Rightarrow 8.000 = \frac{20}{3}x \Rightarrow x = 1.200 \Rightarrow y = 1.000$$

$$\Rightarrow f(1.200 \mid 1.000) = 2 \cdot 1.200^{0,75} \cdot 1.000^{0,25} = 2.293,06$$

8.) **Ökonomische Anwendungen zu Matrizen**

Ein Betrieb stellt aus 3 Rohstoffen 4 Zwischenprodukte und daraus wiederum 3 Endprodukte her.

Der Materialeinsatz ist folgenden Matrizen zu entnehmen:

$$M_{RZ} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M_{ZE} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Wie lautet die Matrix für den Gesamtverbrauch der Rohstoffe?

Lösung:

$$M_{RZ} \cdot M_{ZE} = M_{RE} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 14 & 18 \\ 17 & 16 & 18 \\ 34 & 23 & 39 \end{pmatrix}$$

Verwenden Sie nun unabhängig von Ihrem Ergebnis in a) für die weitere Berechnung die Matrix

$$M_{RE} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

b) Wie viele Rohstoffe sind notwendig, damit 10 ME von E_1, 20 ME von E_2 und 20 ME von E_3 hergestellt werden können?

Lösung:

$$M_{RE} \cdot \vec{e} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 170 \\ 260 \end{pmatrix}$$

c) Wie viele Endprodukte E_1, E_2 und E_3 können bei einem einen Lagerbestand an Rohstoffen von $R_1 = 375$, $R_2 = 200$ und von $R_3 = 335$ hergestellt werden, wenn das Lager danach komplett leer sein sollte?

Lösung:

$$\text{Ansatz}: \begin{pmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 375 \\ 200 \\ 335 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Gauß–Verfahren}]{\text{Lösung mittels}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 25 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Rechenweg in Einzelschritten:

$$\begin{aligned} 6x_1 + 3x_2 + 9x_3 &= 375 \quad (1) \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 200 \quad (2) \\ 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 &= 335 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 1/2\,x_2 + 3/2\,x_3 &= 125/2 \quad (1) \\ 3x_1 + 5\,x_2 + 2\,x_3 &= 200 \quad (2) \\ 4x_1 + 3\,x_2 + 8\,x_3 &= 335 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 1/2\,x_2 + 3/2\,x_3 &= 125/2 \quad (1) \\ 7/2\,x_2 - 5/2\,x_3 &= 25/2 \quad (2) \\ 4x_1 + 3\,x_2 + 8\,x_3 &= 335 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 1/2\,x_2 + 3/2\,x_3 &= 125/2 \quad (1) \\ 7/2\,x_2 - 5/2\,x_3 &= 25/2 \quad (2) \\ x_2 + 2\,x_3 &= 85 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 1/2\,x_2 + 3/2\,x_3 &= 125/2 \quad (1) \\ x_2 - 5/7\,x_3 &= 25/7 \quad (2) \\ x_2 + 2\,x_3 &= 85 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + 13/7\,x_3 &= 425/7 \quad (1) \\ x_2 - 5/7\,x_3 &= 25/7 \quad (2) \\ x_2 + 2\,x_3 &= 85 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + 13/7\,x_3 &= 425/7 \quad (1) \\ x_2 - 5/7\,x_3 &= 25/7 \quad (2) \\ 19/7\,x_3 &= 570/7 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + 13/7\,x_3 &= 425/7 \quad (1) \\ x_2 - 5/7\,x_3 &= 25/7 \quad (2) \\ x_3 &= 30 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 \qquad &= 5 \quad (1) \\ x_2 - 5/7\,x_3 &= 25/7 \quad (2) \\ x_3 &= 30 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 \quad (1) \\ x_2 &= 25 \quad (2) \\ x_3 &= 30 \quad (3) \end{aligned}$$

Genau eine Lösung

$x_1 = 5$

$x_2 = 25$

$x_3 = 30$

d) Die drei Endprodukte werden in einem Mengenverhältnis von 5:2:3 hergestellt; vom Rohstoff R_3 sind 400 ME auf Lager.

Wie viele der jeweiligen Endprodukte können hergestellt werden und welche Rohstoffmengen von R_1 und R_2 benötigt man, wenn das Lager am Ende leer sein soll?

Lösung:

$$\text{Ansatz}: \begin{pmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5x \\ 2x \\ 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 400 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 63x \\ 31x \\ 50x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 400 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = 8 \Rightarrow a = 504 \Rightarrow b = 248$$

$$\Rightarrow \vec{e} = \begin{pmatrix} 5x & 2x & 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 16 & 24 \end{pmatrix}$$

9.) **Lineare Optimierung und Simplexalgorithmus**

Ein Landwirt besitzt **<u>100 ha Land</u>**, das er zum Anbau von Kartoffeln und Raps nutzt.

Die **weiteren** vorhandenen Daten sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst.

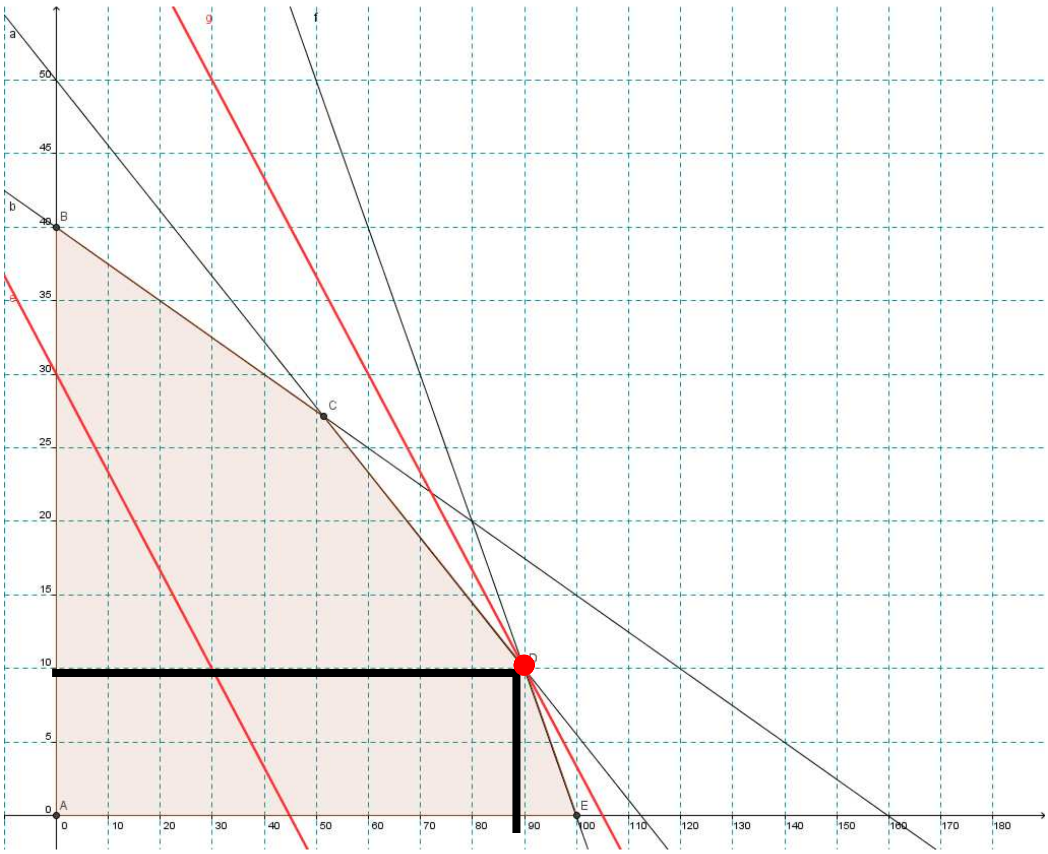
	Kartoffeln	**Raps**	**Kapazität**
Anbaukosten (T€ / ha)	$\frac{4}{3}$	3	150
Arbeitstag (Tage / ha)	1	4	160
Reingewinn (T€ / ha)	2	3	Max.

Wie viel ha sind von beiden Arten anzubauen, damit der Gesamtgewinn maximal wird?

a) Bestimmen Sie graphisch das Maximum.

<u>Lösung:</u> **x = Anbaufläche Kartoffeln** **y = Anbaufläche Raps**

<u>Bedingungen:</u>	<u>Nichtnegativitätsbedingungen</u>	<u>Zielfunktion:</u>
$x+y \leq 100$ $\frac{4}{3}x+3y \leq 150$ $x+4y \leq 160$	$x \geq 0$ *und* $y \geq 0$	$2x+3y = Z \to \max.$



b) + c) Bestimmen Sie das Maximum mit Hilfe des Simplexalgorithmus.

<u>Lösung:</u> ***Simplexalgorithmus***

$$
\begin{array}{r|ccccc|c l}
 & x & y & u_1 & u_2 & u_3 & b & \\
I.) & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 100 & \\
II.) & \frac{4}{3} & 3 & 0 & 1 & 0 & 150 & \\
III.) & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 160 & \xrightarrow{\frac{1}{4}\cdot III.)} \\
\hline
U: & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & Z &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|ccccc|c l}
 & x & y & u_1 & u_2 & u_3 & b & \\
I.) & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 100 & \xrightarrow{I.)-III.)} \\
II.) & \frac{4}{3} & 3 & 0 & 1 & 0 & 150 & \xrightarrow{II.)-3\cdot III.)} \\
III.) & \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 40 & \\
\hline
U: & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & Z & \xrightarrow{U-3\cdot III.)}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|ccccc|c l}
 & x & y & u_1 & u_2 & u_3 & b & \\
I.) & \frac{3}{4} & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 60 & \\
II.) & \frac{7}{12} & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & 30 & \xrightarrow{\frac{12}{7}\cdot II.)} \\
III.) & \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 40 & \\
\hline
U: & \frac{5}{4} & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & Z-120 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|ccccc|c l}
 & x & y & u_1 & u_2 & u_3 & b & \\
I.) & \frac{3}{4} & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 60 & \xrightarrow{I.)-\frac{3}{4}\cdot II.)} \\
II.) & 1 & 0 & 0 & \frac{12}{7} & -\frac{9}{7} & \frac{360}{7} & \\
III.) & \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 40 & \xrightarrow{III.)-\frac{1}{4}\cdot II.)} \\
\hline
U: & \frac{5}{4} & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & Z-120 & \xrightarrow{U-\frac{5}{4}\cdot II.)}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|cccccc|cl}
 & x & y & u_1 & u_2 & u_3 & b & \\
\hline
I.) & 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{7} & \frac{5}{7} & \frac{150}{7} & \xrightarrow{\frac{7}{5}\cdot I.)} \\
II.) & 1 & 0 & 0 & \frac{12}{7} & -\frac{9}{7} & \frac{360}{7} & \\
III.) & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} & \frac{190}{7} & \\
\hline
U: & 0 & 0 & 0 & -\frac{15}{7} & \frac{6}{7} & Z-\frac{1.290}{7} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|cccccc|cl}
 & x & y & u_1 & u_2 & u_3 & b & \\
\hline
I.) & 0 & 0 & \frac{7}{5} & -\frac{9}{5} & 1 & 30 & \\
II.) & 1 & 0 & 0 & \frac{12}{7} & -\frac{9}{7} & \frac{360}{7} & \xrightarrow{II.)+\frac{9}{7}\cdot I.)} \\
III.) & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} & \frac{190}{7} & \xrightarrow{III.)-\frac{4}{7}\cdot I.)} \\
\hline
U: & 0 & 0 & 0 & -\frac{15}{7} & \frac{6}{7} & Z-\frac{1.290}{7} & \xrightarrow{U-\frac{6}{7}\cdot I.)}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|cccccc|c}
 & x & y & u_1 & u_2 & u_3 & b \\
\hline
I.) & 0 & 0 & \frac{7}{5} & -\frac{9}{5} & 1 & 30 \\
II.) & 1 & 0 & \frac{9}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & 90 \\
III.) & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{19}{35} & 0 & 10 \\
\hline
U: & 0 & 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & Z-210
\end{array}
$$

Lösung

$$L = \{(x \quad y \quad u_3)\} = \{(90 \quad 10 \quad 30)\}$$

Somit beträgt der Reingewinn 210.000,00 €.