Klausur: Mathematik   **am Freitag, den 06. Januar 2012**

Jürgen Meisel

Hilfsmittel: Mathematische Formelsammlung und nicht progr. Taschenrechner
Bearbeitungszeit: 60 Minuten

1.) **Extrema ohne Nebenbedingungen**

Ermitteln Sie die beiden stationären Stellen der Funktion

$$f(x,y) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + \frac{1}{6}y^2 - 3y$$

und untersuchen Sie diese Stellen auf ihre Extremwerteigenschaft.

Anmerkung: Eine Berechnung der Funktionswerte soll erfolgen!

Lösung:

$$I.)\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x^2 - 6x \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 2x(x-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad und \quad x_2 = 3$$

$$II.)\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{3}y - 3 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad y = 9$$

Es resultieren zwei stationäre Stellen: $S_1(0 \mid 9 \mid f_1) \quad und \quad S_2(3 \mid 9 \mid f_2)$

$$Hesse-Matrix: \quad H(f) = \begin{pmatrix} 4x-6 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad H(f_{S_1}) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(H) = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad Sattelpunkt(0 \mid 9 \mid -13{,}5)$$

$$\Rightarrow \quad H(f_{S_2}) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad f_{xx} = 6 > 0 \quad \wedge \quad \det(H) = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad Min(3 \mid 9 \mid -22{,}5)$$

2.) **Ableitungen**

Bilden Sie bei den folgenden Funktionen jeweils die ersten partiellen Ableitungen:

a) $$f(x,y) = \frac{\left(4x^6-3\right)^2}{y^3} + 2y^3 - 4x$$

Lösung:

$$f_x(x,y) = \frac{2\left(4x^6-3\right)\cdot 24x^5}{y^3} - 4 = \frac{48x^5\cdot\left(4x^6-3\right)}{y^3} - 4$$

$$f_y(x,y) = (-3)\cdot\frac{\left(4x^6-3\right)^2}{y^4} + 6y^2$$

b) $$f(x,y) = e^{x^2y}\cdot\left(x^3+1\right)$$

Lösung:

$$f_x(x,y) = e^{x^2y}\cdot 2xy\cdot\left(x^3+1\right) + e^{x^2y}\cdot 3x^2$$

$$f_y(x,y) = e^{x^2y}\cdot x^2\cdot\left(x^3+1\right)$$

3.) **Optimum mit Nebenbedingungen**

Gegeben sei die Funktion $q(x,y) \quad = \quad 20x^{0,6}y^{0,4}$

Die Nebenbedingung lautet: $800 \quad = \quad 3x+16y$

a) Bestimmen Sie das maximal mögliche Produktionsergebnis q_{max} .

Lösung:

$$L(x,y,\lambda) \quad = \quad 20x^{0,6}y^{0,4}+\lambda(800-3x-16y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) \quad = \quad 12\cdot\frac{y^{0,4}}{x^{0,4}}-3\lambda \quad \overset{!}{=} \quad 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \quad = \quad 4\cdot\frac{y^{0,4}}{x^{0,4}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) \quad = \quad 8\cdot\frac{x^{0,6}}{y^{0,6}}-16\lambda \quad \overset{!}{=} \quad 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \quad = \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{x^{0,6}}{y^{0,6}}$$

$$\mathit{Austauschverhältnis}:$$

$$4\cdot\frac{y^{0,4}}{x^{0,4}} \quad = \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{x^{0,6}}{y^{0,6}} \quad \Rightarrow \quad 8y \quad = \quad x$$

$$\mathit{eingesetzt\ in\ NB}:$$

$$800 \quad = \quad 3x+16y \quad \xrightarrow{x \;=\; 8y} \quad 800 \quad = \quad 24y+16y$$

$$\Rightarrow \quad 800 \quad = \quad 40y \quad \Rightarrow \quad y=20 \quad \Rightarrow \quad x=160$$

$$\Rightarrow \quad q(160 \mid 20) \quad = \quad 20\cdot160^{0,6}\cdot20^{0,4} \quad \approx \quad 1.392,88$$

b) Wie groß müsste das Budget sein, damit bei sonst gleichen Angaben der Lösungswert für x bei 100 liegt?

Lösung:

$$x \quad = \quad 100 \quad \xrightarrow{x \;=\; 8y} \quad 100 \quad = \quad 8y \quad \rightarrow \quad y=12,5$$

$$\xrightarrow{Budget} \quad b \quad = \quad 40y \quad \rightarrow \quad b \quad = \quad 40\cdot12,5 \quad = \quad 500$$

4.) **Lineare Gleichungssysteme und Matrizengleichungen**

Gegeben sei folgendes LGS:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2t & 1 \\ -t & 0 & t \\ t & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -t \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Lösen Sie das LGS mit einem Verfahren Ihrer Wahl.

Lösung:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2t & 1 \\ -t & 0 & t \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2t & 1 \\ -t & 0 & t \\ t & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{t\left(2t-3\right)}{2t\left(t^2-1\right)} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -t & -t & t \\ t & 1 & 0 \end{vmatrix}}{2t\left(t^2-1\right)} = \frac{t\left(3t-2\right)}{2t\left(t^2-1\right)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2t & 2 \\ -t & 0 & -t \\ t & 1 & 1 \end{vmatrix}}{2t\left(t^2-1\right)} = \frac{t\left(-2t^2+2t-1\right)}{2t\left(t^2-1\right)}$$

b) Für welche Werte von t hat das LGS **keine** Lösung?

Lösung:

$$2t\left(t^2-1\right) = 0 \rightarrow t_1 = 0 \wedge t_2 = 1 \wedge t_3 = -1$$

$$\Rightarrow \text{ eindeutig lösbar}: \quad t \in \Re \setminus \{-1;0;1\}$$

$$\Rightarrow \text{ unendliche Lösungsmenge}: \quad t = 0$$

$$\Rightarrow \text{ unlösbar}: \quad t \in \{-1;1\}$$

c) Matrizengleichungen

(i) Welche Fehler wurden beim Ausmultiplizieren der Klammer hier gemacht?

$$\left(2A-4B\right)^2 = 2A^2-16AB+16B^2$$

(ii) Wie müsste der Klammerausdruck korrekt ausmultipliziert aussehen?

Lösung:

korrekte Lösung:

$$\left(2A-4B\right)^2 = 4A^2-8AB-8BA+16B^2$$

Fehler: Skalar 2 wurde nicht potenziert; Kommutativgesetz angewandt

5.) **Extrema und Ortskurven**

Gegeben Sie folgende Funktion:

$$f_k(x) \quad = \quad -x^2 - 2kx + 3k^2 \quad mit\ k > 0$$

a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion.

<u>**Lösung:**</u>

$$f_k(x) \quad = \quad -x^2 - 2kx + 3k^2 \quad = \quad 0$$

$$\Rightarrow \quad x_{1/2} \quad = \quad \frac{2k \pm \sqrt{4k^2 + 12k^2}}{-2} \quad = \quad \frac{2k \pm 4k}{-2}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 \quad = \quad k \quad \wedge \quad x_2 \quad = \quad -3k$$

b) Ermitteln Sie die <u>**Extremwertstellen**</u> der Funktion.
Bitte mit vollständigem Nachweis (hinreichende Bedingung).

<u>**Lösung:**</u>

$$f_k'(x) \quad = \quad -2x - 2k \quad \overset{!}{=} \quad 0 \quad \rightarrow \quad x \quad = \quad -k$$

$$f_k''(x) \quad = \quad -2 \quad < \quad 0 \quad \rightarrow \quad Max\left(-k \mid 4k^2\right)$$

c) Bestimmen Sie die <u>**Ortskurve**</u> der Extrema.

<u>**Lösung:**</u>

$$Max\left(-k \mid 4k^2\right)$$

$$\rightarrow \quad x \quad = \quad -k \quad \rightarrow \quad k \quad = \quad -x \quad \rightarrow \quad y \quad = \quad 4(-x)^2 \quad = \quad 4x^2$$