Klausur: Mathematik   **am Freitag, den 03. Januar 2003**

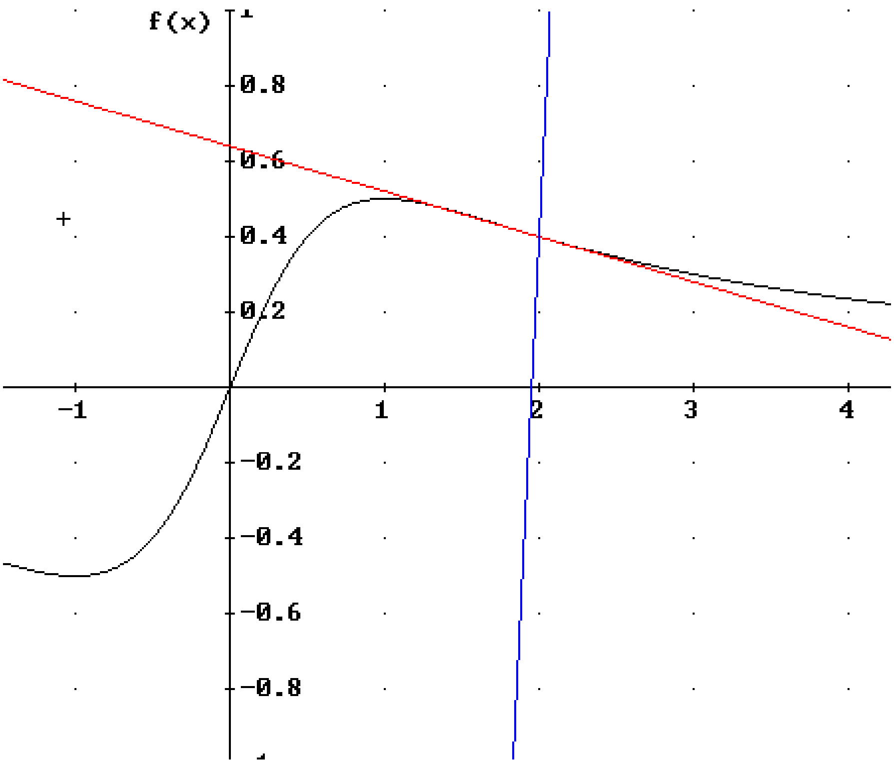
Jürgen Meisel
FH Ludwigshafen

Zugelassene Hilfsmittel: Mathematische Formelsammlung und ETR
Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Zum Bestehen der Klausur sind **70 Punkte** erforderlich.

1.) Differentialrechnung

Lösung zu a)



$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

$$t(x) = -\frac{3}{25}x + \frac{16}{25}$$

$$n(x) = \frac{25}{3}x - \frac{244}{15}$$

Lösung zu b)

Da bei x = 1 der Extremwert der Funktion liegt, hat die Tangente die Steigung 0 => $t(x) = \frac{1}{2}$

2.) Ableitungen

a) $f'(x) = \frac{2}{3}x\left(\sqrt[3]{x^2-1}\right)^{-2}$

b) $f'(x) = 4 * \ln 3 * 3^{4x+1}$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{2xy^2} * 2y^2 - 8xy$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{2xy^2} * 4xy - 4x^2$

d) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$

e) $\frac{\partial f}{\partial A}(A,K) = \frac{1}{4}A^{-0,75}K^{0,75} = \frac{K^{0,75}}{4A^{0,75}}$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial K}(A,K) = \frac{3}{4}A^{0,25}K^{-0,25} = \frac{3A^{0,25}}{4K^{0,25}}$

3.) Invertierung von Matrizen

Behauptung: $A * A^{-1} = E$

Beweis:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} * \frac{1}{ad-bc} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ba \\ cd-dc & -cb+da \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.) Rechnen mit Matrizen

a) A invertierbar <=> Det(A) $\neq$ 0

Da gilt: $Det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$ folgt: A ist invertierbar.

b)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 34 & 21 \\ 21 & 13 \end{pmatrix} \qquad A^{-2} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

c) Es muss gelten: A * B = B * A (Kommutativgesetz)

➯ B ist die Inverse zu A; B = A^{-1}

➯ B ist die Einheitsmatrix; B = E

d) A ist gegeben, B sei $\begin{pmatrix} v & x \\ y & z \end{pmatrix}$.

Es muss gelten: $$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} v & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & x \\ y & z \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt: $$\begin{pmatrix} 2v+y & 2x+z \\ v+y & x+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v+x & v+x \\ 2y+z & y+z \end{pmatrix}$$

Wenn man nun jeweils die vier Komponenten der beiden Ergebnissmatrizen miteinander vergleicht kommt man nach Lösung der 4 Gleichungen zu foglender allgemeiner Ergebnismatrix:

$$B = \begin{pmatrix} v & v-z \\ v-z & z \end{pmatrix}$$

5.) Extremwerte unter Nebenbedingungen

a) q(1000 / 216) = 9 * 100 * 6 = 5.400

b) Kostenfunktion: $\mathcal{K}$ (A, K) = 2 A + 3 K

c) Lagrange-Ansatz:

$$L(A,K,\lambda) = 9A^{\frac{2}{3}}\,K^{\frac{1}{3}} + \lambda(900 - 2A - 3K)$$

$$\left.\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial A}(A,K,\lambda) &= 6A^{-\frac{1}{3}}\,K^{\frac{1}{3}} - 2\lambda \overset{!}{=} 0 \\ \frac{\partial L}{\partial A}(A,K,\lambda) &= 3A^{\frac{2}{3}}\,K^{-\frac{2}{3}} - 3\lambda \overset{!}{=} 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \lambda &= \frac{3K^{\frac{1}{3}}}{A^{\frac{1}{3}}} \\ \lambda &= \frac{A^{\frac{2}{3}}}{K^{\frac{2}{3}}} \end{aligned}\right\} 3K = A$$

in NB eingesetzt :

$$900 = 2A + 3K$$

$$900 = 3A$$

$$A = 300 \qquad K = 100$$

$$q(300/100) = 1.872{,}08$$

d) Veränderung: ΔK = 190,44

q(1000 / 216) = 9 * 100 * 6 = 5.400 => $5400 = 9 * 729^{\frac{2}{3}}\,K^{\frac{1}{3}}$

6.) Materialberechnungen mit Matrizen

a) $$M_{RG} * M_{GE} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 16 & 18 \\ 17 & 11 \end{pmatrix}$$

b) $$M_{GE}^{-1} = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 50 \\ 4 & 2 & 90 \end{array}\right) \overset{II-4I}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 50 \\ 0 & -10 & -110 \end{array}\right) \overset{-0{,}1*II}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 50 \\ 0 & 1 & 11 \end{array}\right) \overset{I-3II}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 11 \end{array}\right)$$

Lösung: Präparat E_1 = 17, Präparat E_2 = 11.

d) $$M_{RE} * \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 16 & 18 \\ 17 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \\ 450 \end{pmatrix}$$

e)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 8 & 140 \\ 16 & 18 & 340 \\ 17 & 11 & 300 \end{array}\right) \overset{I/6}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{4}{3} & \frac{70}{3} \\ 16 & 18 & 340 \\ 17 & 11 & 300 \end{array}\right) \overset{\substack{II-16I \\ III-17I}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{4}{3} & \frac{70}{3} \\ 0 & -\frac{10}{3} & -\frac{100}{3} \\ 0 & -\frac{35}{3} & -\frac{290}{3} \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{4}{3} & \frac{70}{3} \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 7 & 58 \end{array}\right) \overset{I-\frac{4}{3}II}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 7 & 58 \end{array}\right)$$

f)

$$K_{ges}(t) = \vec{k}_R * M_{RG} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \vec{k}_G * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$K_{ges}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ t+1 \\ 0,2\left(t^2 - 5t + 11\right) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,5t^3 \\ -2t^2 + 6t + 26 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$K_{ges}(t) = 0,5t^3 - t^2 + 8t + 50$$

g) Da kein t existiert mit K'(t) = 0, liegt ein Randminimum vor: $K_{min} = 50$ für t = 0.
Der minimale Kostenzuwachs liegt bei $t = {}^2/_3$. (K''(t) = 0 setzen)

7.) Integralrechnung

a) Marktgleichgewicht: $4 + \frac{1}{2}x^2 = 31 - \frac{1}{4}x^2 \quad \Rightarrow \quad GG(6 \mid 22)$

b) Konsumentenrente:

$$K_R(x) = \int_0^6 \left(31 - \frac{1}{4}x^2\right) dx - 22 * 6$$

$$K_R(x) = \left[31x - \frac{1}{12}x^3\right]_0^6 - 132$$

$$K_R(x) = 168 - 132$$

$$K_R(x) = 36$$

8.) Iteration einer Wurzel

Lösung per Newton-Iteration: $f(x) = x^2 - 7$ und $f'(x) = 2x$; Startwert: $x_0 = 3$

$$1.\ \textit{Näherung}: \quad x_1 = 3 - \frac{2}{6} = \frac{8}{3}$$

$$2.\ \textit{Näherung}: \quad x_2 = \frac{8}{3} - \frac{1/9}{16/3} = \frac{127}{48} = 2,64583$$