**Klausur: Mathematik**
**am Donnerstag, den 13. Januar 2005**

Jürgen Meisel
FH Ludwigshafen

Zugelassene Hilfsmittel: Mathematische Formelsammlung und elektr. Taschenrechner
Bearbeitungszeit: **60 Minuten**

---

1.) **Integralrechnung**

a) Ermitteln Sie die Fläche in den gegebenen Grenzen: $\int_{-1}^{2} \left(x^3 - x\right) dx$

**Lösung:** Nullstellen: $x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = -1 \quad \wedge \quad x_3 = 1$

$$2 \cdot \left| \int_0^1 \left(x^3 - x\right) dx \right| + \int_1^2 \left(x^3 - x\right) dx \quad =$$

$$2 \cdot \left| \left[ \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 \right| + \left[ \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} x^2 \right]_1^2 \quad = \quad 2\frac{3}{4}$$

b) Berechnen Sie die obere Integrationsgrenze bei gegebener Fläche: $\int_0^t e^x dx \quad = \quad 1$

**Lösung:** $\int_0^t e^x \, dx = 1 \quad \Rightarrow \quad \left[e^x\right]_0^t = 1 \quad \Rightarrow e^t - 1 = 1 \quad \Rightarrow t = \ln(2)$

2.) **Ermitteln Sie den Wert für n:** $\sum_{i=1}^{n} 3i \quad = \quad 630$

$$\sum_{i=1}^{n} 3i \quad = \quad 630 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} i \quad = \quad 210$$

**Lösung:** $$\Rightarrow \quad \frac{n(n+1)}{2} \quad = \quad 210 \quad \Rightarrow \quad L = \{20\}$$

3.) **Determinanten**

Berechnen Sie folgende Ausdrücke: Det $\begin{pmatrix} 2 & x^2 \\ -1 & x \end{pmatrix}$ - 4 x = - 6

**Lösung:**

$$\begin{vmatrix} 2 & x^2 \\ -1 & x \end{vmatrix} - 4x = -6 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x + 6 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \textit{keine reelle Lösung}$$

4.) **Kurvendiskussion**

Untersuchen Sie die Funktion f(x) mit der Vorschrift $\mathbf{f_a(x) = ax^3 - 4x^2}$ mit nach a > 0 folgenden Kriterien und geben die charakteristischen Stellen als Koordinaten an:

a) Symmetrie

b) Nullstellen

c) Extrema

d) Wendepunkte

e) Verhalten für $x \to \pm\infty$

f) Ortskurve der Wendepunkte

**Lösung:**

a) keine Symmetrie, da gilt: $f(-x) \neq f(x) \quad und \quad f(-x) \neq -f(x)$

b)

$$ax^3 - 4x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 (ax - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \; (doppelt) \quad \wedge \quad x_2 = \frac{4}{a}$$

c)

$$f(x) = ax^3 - 4x^2$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = 3ax^2 - 8x \overset{!}{=} 0 \quad \wedge \quad f''(x) = 6ax - 8$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = \frac{8}{3a}$$

$$\Rightarrow \quad f''(0) = -8 < 0 \quad \Rightarrow \quad Max(0 \mid 0)$$

$$\Rightarrow \quad f''\left(\frac{8}{3a}\right) = 8 > 0 \quad \Rightarrow \quad Min\left(\frac{8}{3a} \;\middle|\; -\frac{256}{27a^2}\right)$$

d)

$$f''(x) = 6ax - 8 \overset{!}{=} 0 \quad \wedge \quad f'''(x) = 6a \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{3a}$$

$$\Rightarrow \quad f'''\left(\frac{4}{3a}\right) = 6a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad W\left(\frac{4}{3a} \;\middle|\; -\frac{128}{27a^2}\right)$$

e)

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \left( ax^3 - 4x^2 \right) \to \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left( ax^3 - 4x^2 \right) \to -\infty$$

f)

$$W\left( \frac{4}{3a} \,\middle|\, -\frac{128}{27a^2} \right) \Rightarrow \quad x = \frac{4}{3a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{4}{3x}$$

$$\Rightarrow \quad y = -\frac{128}{27a^2} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{128 \cdot 9x^2}{27 \cdot 16} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{8}{3}x^2$$

5.) **Optimum ohne und mit Nebenbedingungen**

Eine Ackerfläche wird, bevor man sie mit Weizen bestellt, mit x Mengeneinheiten des Naturdüngers Natriflor behandelt, und zwei Monate später werden y Mengeneinheiten des Kunstdüngers Kalibest ausgestreut.

Aus langjähriger Erfahrung und aufgrund einiger mathematischer Kenntnisse kennt der Landwirt den Zusammenhang zwischen Weizenertrag z und Düngung unter normalen Wetterbedingungen:

$$z = f(x,y) = 840 + 4x - x^2 + 10y - 3y^2 + 3xy$$

a) Bei welcher Düngermenge erzielt dieser Landwirt einen maximalen Weizenertrag.

*Weisen Sie dabei auch nach, dass Ihre Lösung ein Maximum darstellt!*

$$f(x,y) = 840 + 4x - x^2 + 10y - 3y^2 + 3xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4 - 2x + 3y \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 10 + 3x - 6y \overset{!}{=} 0$$

**Lösung:**

$$\Rightarrow \quad x = 18 \quad \wedge \quad y = 10\frac{2}{3}$$

$$Hesse-Matrix: \quad H(f) = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow H_1 = -2 < 0 \quad \wedge \quad |H| = 3 > 0 \Rightarrow \textit{negativ definit} \Rightarrow \textit{Maximum}$$

b) Bei welcher Düngerkombination ist der Weizenertrag maximal, wenn der Naturdünger 20 $^{GE}/_{kg}$ und der Kunstdünger 50 $^{GE}/_{kg}$ kosten und die Gesamtkosten in Höhe von 268 GE nicht überschritten werden dürfen?

**Lösung:**

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda(268 - 20x - 50y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y) = 4 - 2x + 3y - 20\lambda \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y) = 10 + 3x - 6y - 50\lambda \overset{!}{=} 0$$

$$\xrightarrow{\text{nach } \lambda \text{ auflösen und gleichsetzen}} \quad y = \frac{16}{27}x$$

$$\xrightarrow{\text{einsetzen in Nebenbedingung}} \quad x = 5{,}4 \quad \wedge \quad y = 3{,}2$$

6.) **Matrizen & Determinanten**

Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Führen Sie folgende Rechenoperationen aus:

a) A + B  b) A * B  c) B * A

d) $A^{-1}$  e) Det(B)  f) $B^T$

**Lösung:**

a) $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 11 & -12 \end{pmatrix}$

c) $B \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 13 & -10 \end{pmatrix}$  d) $A^{-1} = \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

e) $\det(B) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 3$  f) $B^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$