Klausur: Mathematik
am Montag, den 25. Januar 2010

Jürgen Meisel

Hilfsmittel: Mathematische Formelsammlung und nicht progr. Taschenrechner
Bearbeitungszeit: 60 Minuten

1.) **Ökonomische Anwendungen zur Integralrechnung**

Gegeben seien die Nachfragefunktion $p_N(x) \;=\; 20-\frac{1}{250}x^2$

und die Angebotsfunktion $p_A(x) \;=\; \frac{1}{10}x+5$

Ermitteln Sie die **Konsumentenrente**.

Lösung:

$$p_A(x) \;=\; p_N(x) \;\Rightarrow\; \frac{1}{10}x+5 \;=\; 20-\frac{1}{250}x^2$$

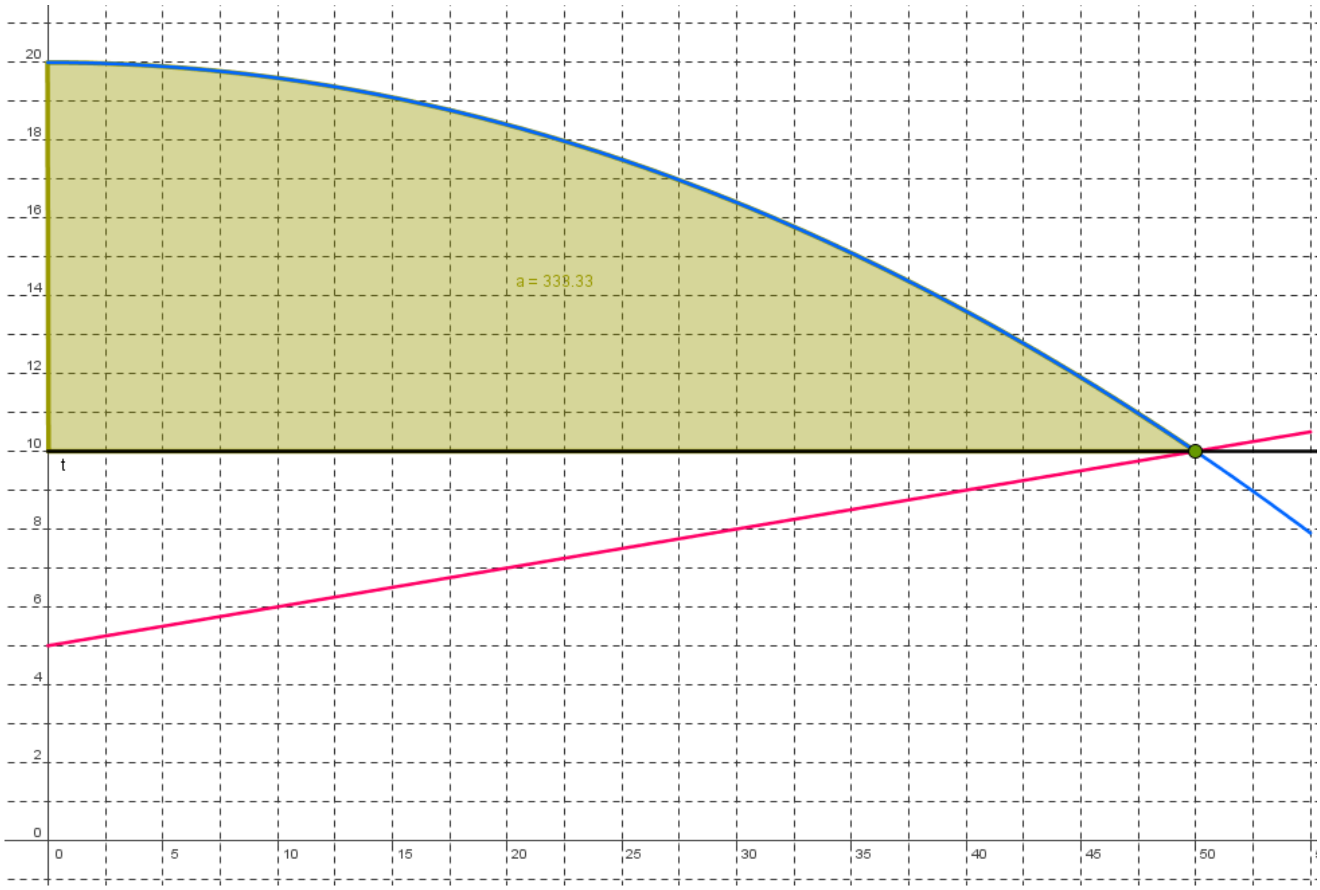
$$\Rightarrow\; \frac{1}{250}x^2+\frac{1}{10}x-15=0 \xrightarrow{\cdot 250} x^2+25x-3.750=0$$

$$\Rightarrow\; x_1=50 \;\wedge\; x_2=-75$$

$$p_A(50)=\frac{1}{10}\cdot 50+5=10 \;\Rightarrow\; M(50\mid 10)$$

$$K_R \;=\; \int_0^{50}\left(20-\frac{1}{250}x^2\right)dx-50\cdot p_N(50) \;=\; \left[20x-\frac{1}{750}x^3\right]_0^{50}-500$$

$$K_R \;=\; 1.000-166\frac{2}{3}-500 \;=\; 333\frac{1}{3}$$



2.) **Wachstumsprozesse**

Eine Tasse kochendheißer Kaffee ($t_0 = 100\ °C$) kühlt bei Zimmer-temperatur ($t_{Raum} = 20\ °C$) in 10 Minuten auf 30° C ab.

a) Die Temperatur nach **t** Minuten wird durch die Gleichung

$$T(t) = t_{Raum} + (t_0 - t_{Raum}) \cdot e^{-k\,t}$$

angegeben. Berechnen Sie die Konstante k!

Lösung:

$$30 = 20 + (100 - 20) \cdot e^{-10k} \xrightarrow[:80]{-20} \frac{1}{8} = \frac{1}{e^{10k}}$$

$$\xrightarrow{Kehrwert} 8 = e^{10k} \xrightarrow{\ln} \ln 8 = 10k$$

$$\xrightarrow{:10} k = 0,2079$$

b) Bis zu welcher Temperatur kann der Kaffee höchstens abkühlen? **Begründen Sie Ihre Entscheidung.**

Lösung: Auf die Raumtemperatur => begrenztes Wachstum!

Gehen Sie jetzt unabhängig von Ihrem Ergebnis bei a) von folgender Funktionsgleichung aus: $T(t) = 20+(t_0-20)\cdot e^{-0{,}2\,t}$

c) Frau Mogel mischt den Kaffee mit der gleichen Menge Milch aus dem Kühlschrank (4° C). Sie hat zwei Möglichkeiten:

- die Milch sofort dazugeben, danach 3 Minuten warten
- die Milch erst nach 3 Minuten dazugeben

Welche Temperatur hat der Milchkaffee in beiden Fällen?

Anmerkung:
Die Temperatur der Mischung ist der Mittelwert der einzelnen Temperaturen: $T = \frac{T_1+T_2}{2}$

Lösung:

Variante 1: Milch wird sofort hinzugegeben => $t_0 = \frac{100+4}{2} = 52$

$$T(3) = 20+(52-20)\cdot e^{-0{,}2\cdot 3} = 20+32\cdot e^{-0{,}6} = 37{,}56$$

Variante 2: Milch wird erst nach 3 Minuten hinzugegeben => $t_0 = 100$

$$T(3) = 20+(100-20)\cdot e^{-0{,}2\cdot 3} = 20+80\cdot e^{-0{,}6} = 63{,}90$$

$$\xrightarrow{\text{Milch hinzu}} T = \frac{63{,}90+4}{2} = 33{,}95$$

3.) **Extrema ohne Nebenbedingungen**

Die Funktion $f_k(x,y)$ besitzt zwei stationären Stellen.

$$f_k(x,y) = \frac{1}{12}x^3-2x^2+3y^2-6y+kx$$

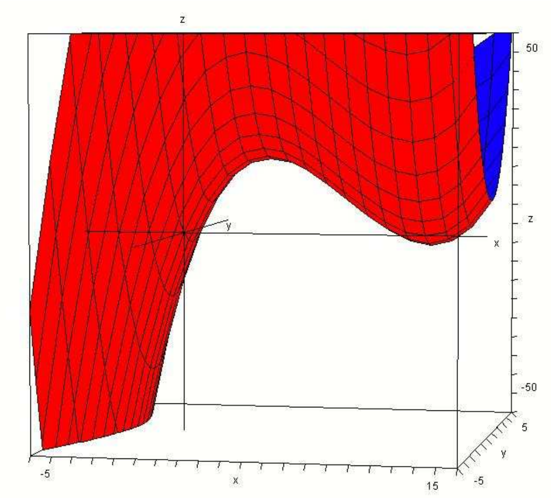
a) Für welchen Wert von k liegt der x-Wert der stationären Stelle bei x = 4? Ermitteln Sie auch den zugehörigen y-Wert.

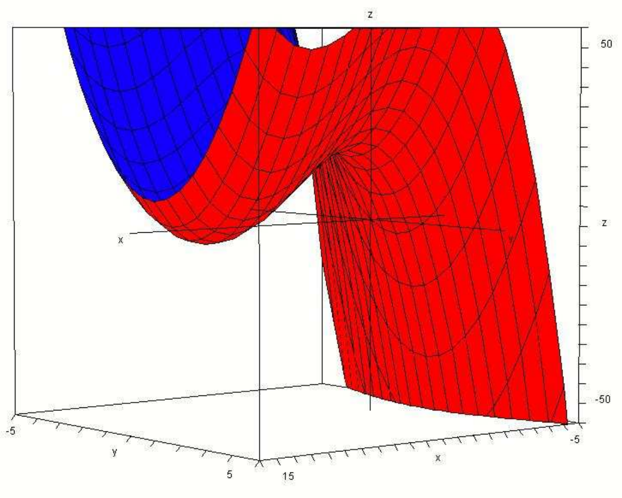
b) Berechnen Sie nun auch die zweite stationäre Stelle.

c) Untersuchen Sie diese Stellen auf ihre Extremwerteigenschaft.

Anmerkung: Eine Berechnung der Funktionswerte soll nicht erfolgen!

Lösung:





$$I.)\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{4}x^2-4x+k\overset{!}{=}0 \quad\Rightarrow\quad x_{1/2}=\frac{4\pm\sqrt{16-k}}{\frac{1}{2}}$$

$$\xrightarrow{x=4}\quad 4=\frac{4\pm\sqrt{16-k}}{\frac{1}{2}} \quad\xrightarrow{\cdot\frac{1}{2}}\quad 2=4\pm\sqrt{16-k} \quad\xrightarrow{-4}\quad -2=\sqrt{16-k}$$

$$\xrightarrow{quadrieren}\quad 4=16-k \quad\Rightarrow\quad k=12$$

$$\xrightarrow{k=12}\quad x_{1/2}=\frac{4\pm 2}{\frac{1}{2}} \quad\Rightarrow\quad x_1=4 \quad und \quad x_2=12$$

$$II.)\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=6y-6\overset{!}{=}0 \quad\Rightarrow\quad y=1$$

Es resultieren zwei stationäre Stellen: $S_1(4\mid 1\mid f_1)\quad und\quad S_2(12\mid 1\mid f_2)$

$$Hesse-Matrix:\quad H(f)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}x-4 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad H(f_{S_1})=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \det(H)=-12<0 \quad\Rightarrow\quad Sattelpunkt$$

$$\Rightarrow\quad H(f_{S_1})=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad f_{xx}=2>0 \ \wedge\ \det(H)=12>0 \quad\Rightarrow\quad Min(12\mid 1\mid -3)$$

4.) **Optimum mit Nebenbedingungen**

Gegeben sei die Produktionsfunktion $q(x,y) = 5x^{0,4}y^{0,6}$

Eine Mengeneinheit von Faktor x kostet 8 €, eine Mengeneinheit von Faktor y kostet 14 €. Das Budget beträgt insgesamt 5.600,00 €. Bestimmen Sie das optimale Produktionsergebnis q_{max} .

Lösung:

$$L(x,y,\lambda) \quad = \quad 5x^{0,4}y^{0,6} + \lambda(5.600 - 8x - 14y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) \quad = \quad 2 \cdot \frac{y^{0,6}}{x^{0,6}} - 8\lambda \quad \overset{!}{=} \quad 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \quad = \quad \frac{1}{4} \cdot \frac{y^{0,6}}{x^{0,6}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) \quad = \quad 3 \cdot \frac{x^{0,4}}{y^{0,4}} - 14\lambda \quad \overset{!}{=} \quad 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \quad = \quad \frac{3}{14} \cdot \frac{x^{0,4}}{y^{0,4}}$$

$$Austauschverhältnis:$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{y^{0,6}}{x^{0,6}} \quad = \quad \frac{3}{14} \cdot \frac{x^{0,4}}{y^{0,4}} \quad \Rightarrow \quad y \quad = \quad \frac{6}{7}x$$

$$eingesetzt\ in\ NB:$$

$$5.600 \quad = \quad 8x + 14y \quad \xrightarrow{y \ = \ \frac{6}{7}x} \quad 5.600 \quad = \quad 8x + 14 \cdot \frac{6}{7}x$$

$$\Rightarrow \quad 5.600 \quad = \quad 20x \quad \Rightarrow \quad x = 280 \quad \Rightarrow \quad y = 240$$

$$\Rightarrow \quad q(280 \mid 240) \quad = \quad 5 \cdot 280^{0,4} \cdot 240^{0,6} \quad \approx \quad 1.276,32$$

5.) **Ökonomische Anwendungen zu Matrizen**

Ein Betrieb stellt aus 3 Rohstoffen insgesamt 3 Endprodukte her.
Der Gesamtverbrauch der Rohstoffe wird durch folgende Matrix dargestellt:

$$M_{RE} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 6 & 3 & 8 \\ 5 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

a) Wie viele Rohstoffe sind notwendig, damit 8 ME von E_1 , 7 ME von E_2 und 10 ME von E_3 hergestellt werden können?

Lösung:

$$M_{RE} \cdot \vec{e} \quad = \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 6 & 3 & 8 \\ 5 & 5 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 94 \\ 149 \\ 175 \end{pmatrix}$$

b) Wie viele Endprodukte E_1 , E_2 und E_3 können bei einem einen Lagerbestand an Rohstoffen von $R_1 = 250$, $R_2 = 360$ und von $R_3 = 450$ hergestellt werden, wenn das Lager danach komplett leer sein sollte?

Lösung:

$$\text{Ansatz}: \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 6 & 3 & 8 \\ 5 & 5 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ 360 \\ 450 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Gauß–Verfahren}]{\text{Lösung mittels}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$$

mögliche Vorgehensweise beim Gauß-Verfahren:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 250 \quad (1) \\ 6x_1 + 3x_2 + 8x_3 &= 360 \quad (2) \\ 5x_1 + 5x_2 + 10x_3 &= 450 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 5/2\, x_3 &= 125 \quad (1) \\ 6x_1 + 3x_2 + 8x_3 &= 360 \quad (2) \\ 5x_1 + 5x_2 + 10x_3 &= 450 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 5/2\, x_3 &= 125 \quad (1) \\ -9x_2 - 7x_3 &= -390 \quad (2) \\ 5x_1 + 5x_2 + 10x_3 &= 450 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 5/2\, x_3 &= 125 \quad (1) \\ -9x_2 - 7x_3 &= -390 \quad (2) \\ -5x_2 - 5/2\, x_3 &= -175 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 5/2\, x_3 &= 125 \quad (1) \\ x_2 + 7/9\, x_3 &= 130/3 \quad (2) \\ -5x_2 - 5/2\, x_3 &= -175 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 17/18\, x_3 &= 115/3 \quad (1) \\ x_2 + 7/9\, x_3 &= 130/3 \quad (2) \\ -5x_2 - 5/2\, x_3 &= -175 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 17/18\, x_3 &= 115/3 \quad (1) \\ x_2 + 7/9\, x_3 &= 130/3 \quad (2) \\ 25/18\, x_3 &= 125/3 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 17/18\, x_3 &= 115/3 \quad (1) \\ x_2 + 7/9\, x_3 &= 130/3 \quad (2) \\ x_3 &= 30 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 10 \quad (1) \\ x_2 + 7/9\, x_3 &= 130/3 \quad (2) \\ x_3 &= 30 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 10 \quad (1) \\ x_2 &= 20 \quad (2) \\ x_3 &= 30 \quad (3) \end{aligned}$$

c) Die drei Endprodukte werden in einem Mengenverhältnis von 3:5:2 hergestellt; vom Rohstoff R_2 sind 980 ME auf Lager.

Wie viele der jeweiligen Endprodukte können hergestellt werden und welche Rohstoffmengen von R_2 und R_3 benötigt man, wenn das Lager am Ende leer sein soll?

Lösung:

$$\text{Ansatz}: \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 6 & 3 & 8 \\ 5 & 5 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3x \\ 5x \\ 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 980 \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 36x \\ 49x \\ 60x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 980 \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 49x = 980 \Rightarrow x = 20 \Rightarrow a = 720 \Rightarrow c = 1.200$$

$$\Rightarrow \vec{e} = \begin{pmatrix} 3x & 5x & 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 & 100 & 40 \end{pmatrix}$$