Klausur: Mathematik am Dienstag, den 30. Januar 2007

Jürgen Meisel
FH Ludwigshafen

Zugelassene Hilfsmittel: Mathematische Formelsammlung und nicht progr. Taschenrechner
Bearbeitungszeit: **60 Minuten**

1.) **Newton-Iteration**

Bestimmen Sie mittels Newton-Iteration den Wert von $\sqrt{15}$ mit einer Genauigkeit von $\frac{1}{1.000}$.

Lösung: f(x) = 1x^2 + -15 f '(x) = 2x^1

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	4	1	8	3.875
1	3.875	0.015625	7.75	3.8729838709
2	3.8729838	4.06477627557E-006	7.7459677	3.87298334621
3	3.87298334	2.77111666946E-013	7.7459666	3.87298334621

Anmerkung: Zwei Iterationsvorgänge genügen!

2.) **Ableitungen:**

Bilden Sie die jeweils ersten partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f(x,y) = x^2(2y-1)$ b) $f(x,y,z) = x \cdot e^{3xyz} + y^2 - \frac{1}{3}z^3$

c) $f(x,y) = \sqrt{x^2 - \frac{1}{2}y^3} + x - 2y$

Lösung:

$$f(x,y) \quad = \quad x^2(2y-1)$$

$$\xrightarrow{\text{Potenzregel}} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad = \quad 2x(2y-1) \quad und \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \quad = \quad 2x^2$$

$$f(x,y,z) \quad = \quad x\cdot e^{3xyz}+y^2-\frac{1}{3}z^3$$

$$\xrightarrow{\text{Produktregel}} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) \quad = \quad 1\cdot e^{3xyz}+x\cdot 3yz\cdot e^{3xyz} \quad = \quad e^{3xyz}(1\cdot+3xyz)$$

$$\xrightarrow{\text{Kettenregel}} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) \quad = \quad x\cdot 3xz\cdot e^{3xyz}+2y \quad = \quad 3x^2z\cdot e^{3xyz}+2y$$

$$\xrightarrow{\text{Kettenregel}} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \quad = \quad x\cdot 3xy\cdot e^{3xyz}-z^2 \quad = \quad 3x^2y\cdot e^{3xyz}-z^2$$

$$f(x,y) \quad = \quad \sqrt{x^2-\frac{1}{2}y^3}+x-2y$$

$$\xrightarrow{\text{Kettenregel}} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad = \quad \frac{2x}{2\sqrt{x^2-\frac{1}{2}y^3}}+1 \quad = \quad \frac{x}{\sqrt{x^2-\frac{1}{2}y^3}}+1$$

$$\xrightarrow{\text{Kettenregel}} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \quad = \quad \frac{-\frac{3}{2}y^2}{2\sqrt{x^2-\frac{1}{2}y^3}}-2 \quad = \quad -\frac{3y^2}{4\sqrt{x^2-\frac{1}{2}y^3}}-2$$

3.) **Matrizen und Determinanten**

a) Für welche Werte von a ist die Matrix regulär?

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \\ a & 2 & a \end{pmatrix}$$

<u>Lösung:</u>

$$A_a \text{ regulär} \quad \Leftrightarrow \quad \det(A_a) \neq 0$$

$$\det(A_a) = -a+9a-8+2a-6+6a \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 16a-14=0 \quad \Rightarrow \quad a=\frac{7}{8}$$

$$A_a \text{ regulär} \quad \Leftrightarrow \quad \det(A_a) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \in \Re \setminus \left\{\frac{7}{8}\right\}$$

b) Invertieren Sie die Matrix B.

$$B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{3} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det(B) = 5-2 = 3$$

4.) **Kurvendiskussion**

Untersuchen Sie die Funktion $f_t(x)$ mit der Vorschrift

$$f_t(x) = \frac{1}{2}x^3 - tx^2 \qquad mit \quad t > 0$$

nach folgenden Kriterien:

a) Nullstellen

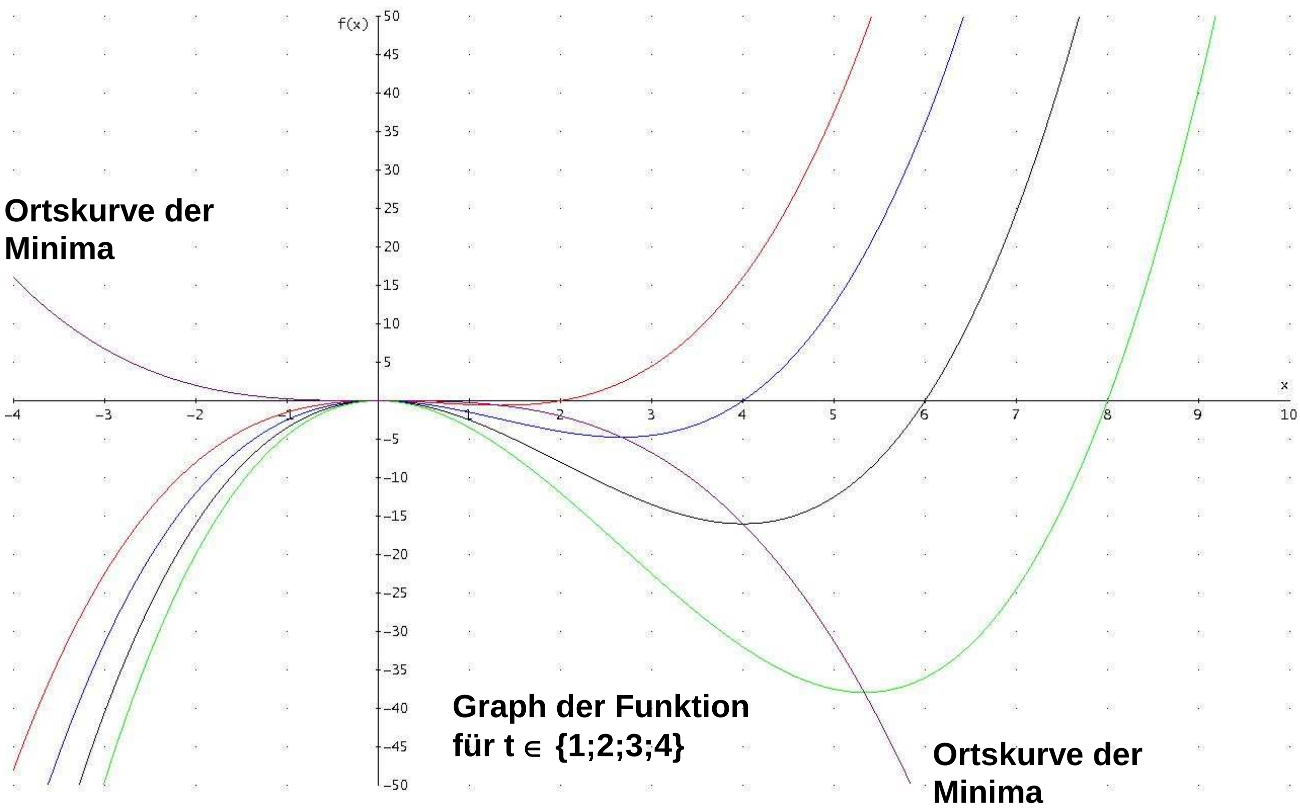
b) Extrema

c) Wendepunkte

d) Ortskurve der Minima

e) Ermitteln Sie die Fläche zwischen der Randfunktion f(x) und der x-Achse im Intervall [-1 ; 4] **mit t = 2**

Lösung:



$$f_t(x) = \frac{1}{2}x^3 - tx^2 \qquad mit \quad t > 0$$

Nullstellen :

$$f_t(x) = x^2\left(\frac{1}{2}x - t\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0\,(doppelt) \quad \wedge \quad x_2 = 2t$$

Extrema :

$$f_t\,'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2tx \overset{!}{=} 0 \quad \xrightarrow{Ausklammern} \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = \frac{4}{3}t$$

$$f_t\,''(x) = 3x - 2t$$

$$f_t\,''(0) = -\,2t < 0 \quad \Rightarrow \quad Max(0 \mid 0)$$

$$f_t\,''\left(\frac{4}{3}t\right) = 3\cdot\frac{4}{3}t - 2t = 2t > 0 \quad \Rightarrow \quad Min\left(\frac{4}{3}t \;\middle|\; -\frac{16}{27}t^3\right)$$

Wendepunkte :

$$f_t\,''(x) = 3x - 2t \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{3}t$$

$$f_t\,'''(x) = 3 \quad \Rightarrow \quad f_t\,'''\left(\frac{2}{3}t\right) = 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad W\left(\frac{2}{3}t \;\middle|\; -\frac{8}{27}t^3\right)$$

Ortskurve der Minima :

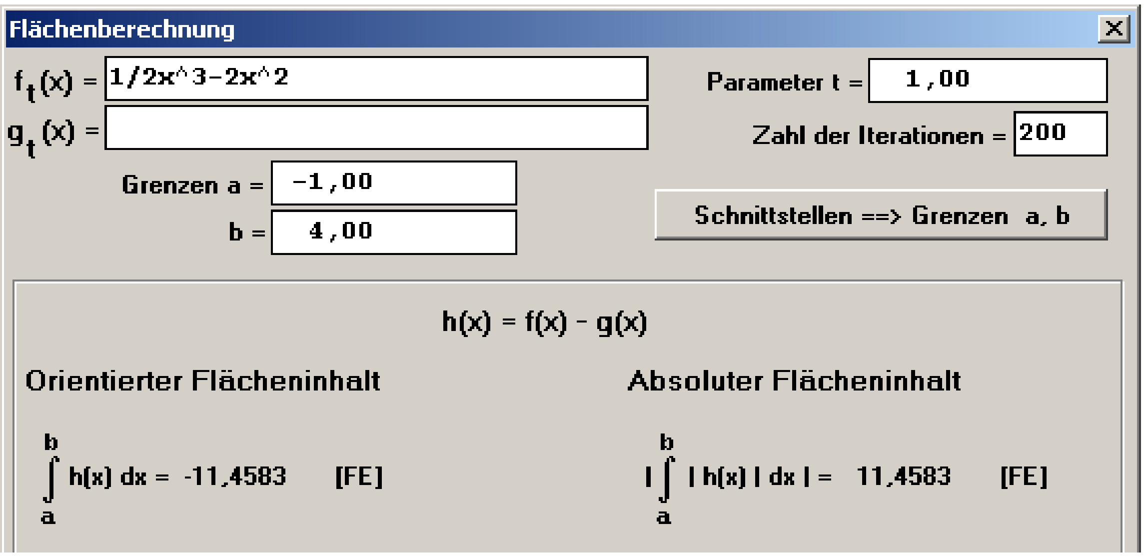
$$Min\left(\frac{4}{3}t \;\middle|\; -\frac{16}{27}t^3\right) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{3}t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{3}{4}x$$

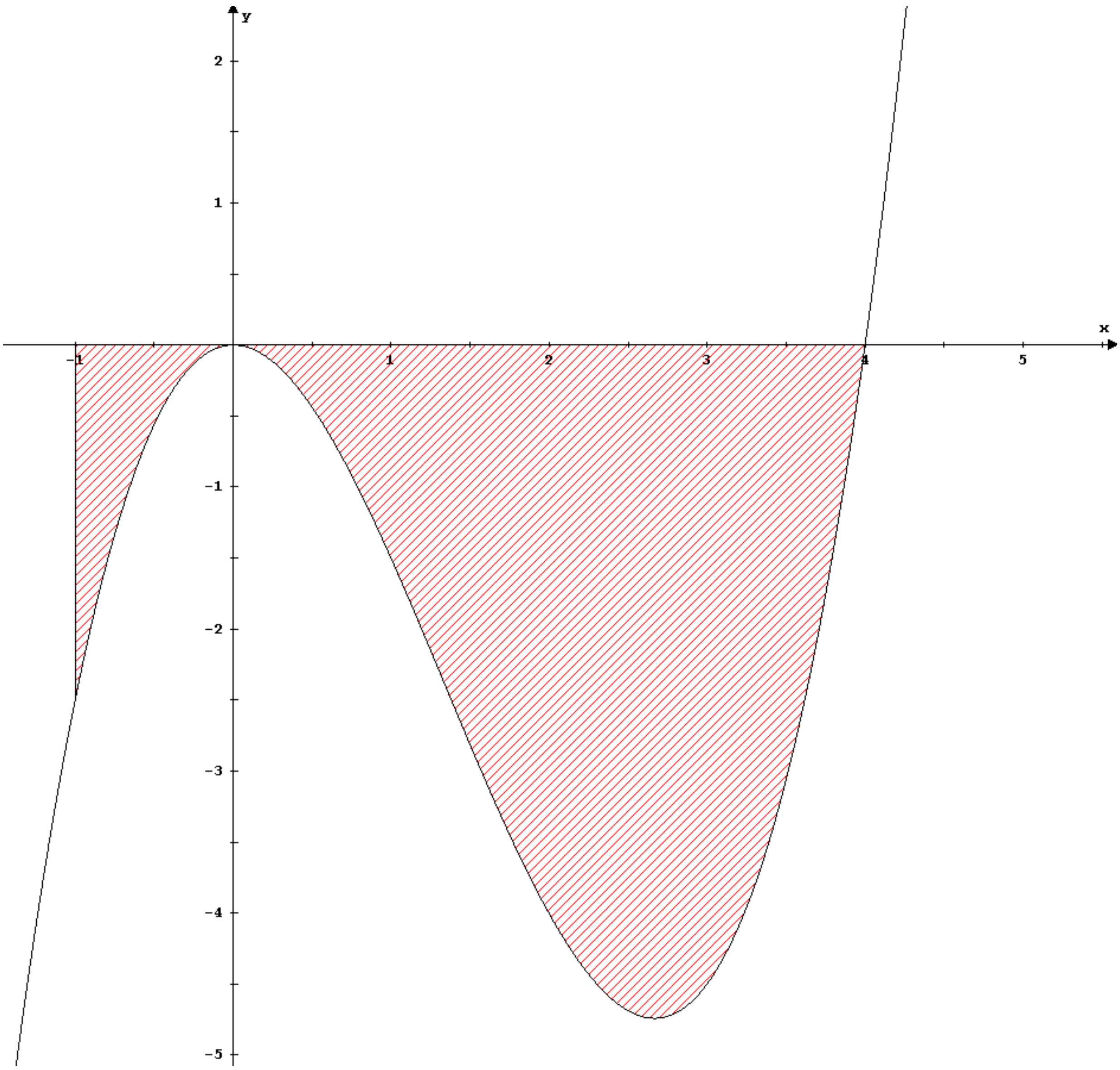
$$\Rightarrow \quad y = -\frac{16}{27}t^3 = -\frac{16}{27}\cdot\left(\frac{3}{4}x\right)^3 = -\frac{1}{4}x^3$$

Flächenberechnung :

$$\int_{-1}^{4} f_2(x)\,dx \;=\; \left|\int_{-1}^{4}\left(\frac{1}{2}x^3 - 2x^2\right)dx\right| \;=\; \left|\left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^{4}\right|$$

$$\int_{-1}^{4} f_2(x)\,dx \;=\; \left|-\frac{32}{3} - \frac{19}{24}\right| \;=\; \frac{275}{24} \;=\; 11\frac{11}{24} \;=\; 11{,}45833$$


Flächenberechnung
$f_t(x)$ = 1/2x^3-2x^2
$g_t(x)$ =
Parameter t = 1,00
Zahl der Iterationen = 200
Grenzen a = -1,00
b = 4,00
Schnittstellen ==> Grenzen a, b
h(x) = f(x) - g(x)
Orientierter Flächeninhalt
$\int_a^b h(x)\,dx$ = -11,4583 [FE]
Absoluter Flächeninhalt
$\left|\int_a^b |h(x)|\,dx\right|$ = 11,4583 [FE]


y
x
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-1
1
2
3
4
5

5.) **Optimum ohne und mit Nebenbedingungen**

a) Ermitteln Sie die stationäre Stelle der Funktion

$$f(x,y) = 4x^2 - 6xy + 3y^2 - 4x + 8$$

und untersuchen Sie diese Stelle auf ihre Extremwerteigenschaft.

Bitte berechnen Sie auch den Funktionswert an der stationären Stelle.

Lösung:

$$f(x,y) = 4x^2 - 6xy + 3y^2 - 4x + 8$$

$$I.) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 8x - 6y - 4 \overset{!}{=} 0 \quad \xrightarrow{II.)\ x=y\ \ in\ I.)} \quad 8x - 6x - 4 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

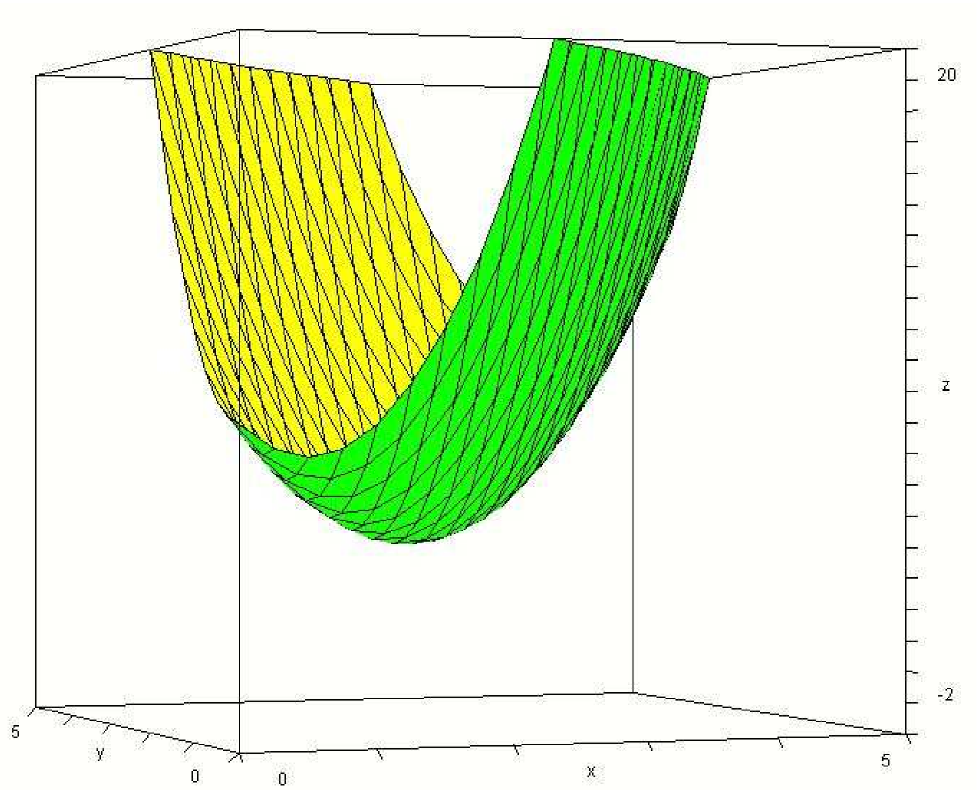
$$II.) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -6x + 6y \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = y$$

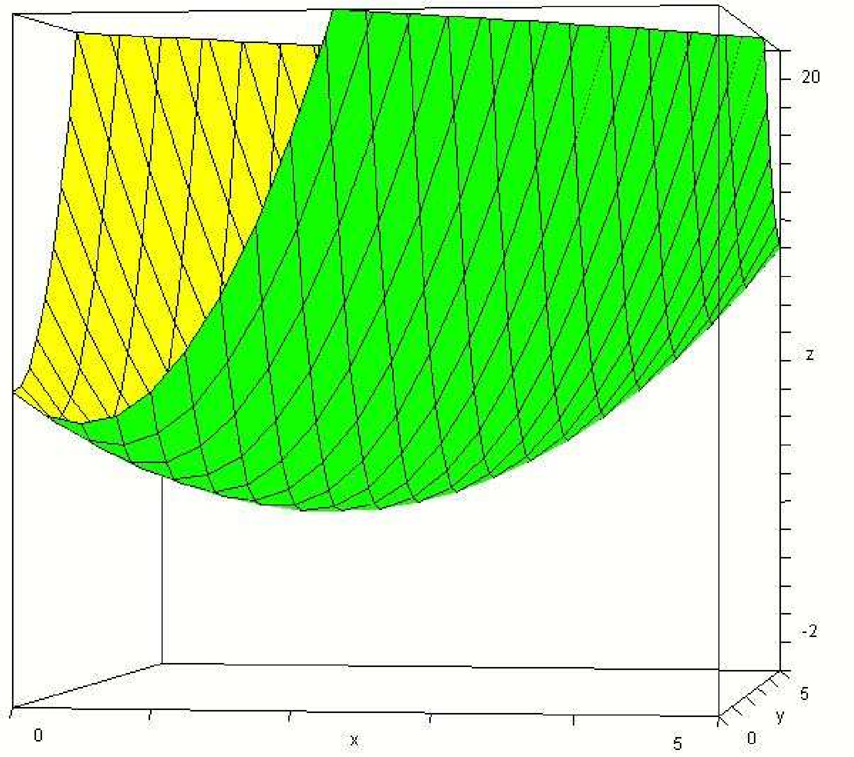
$$\Rightarrow \quad y = 2$$

Es resultiert eine stationäre Stelle: $S(2 \mid 2 \mid 4)$

$Hesse - Matrix:$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(H) > 0 \quad \wedge \quad f_{xx} > 0 \quad \Rightarrow \quad Min(2 \mid 2 \mid 4)$$



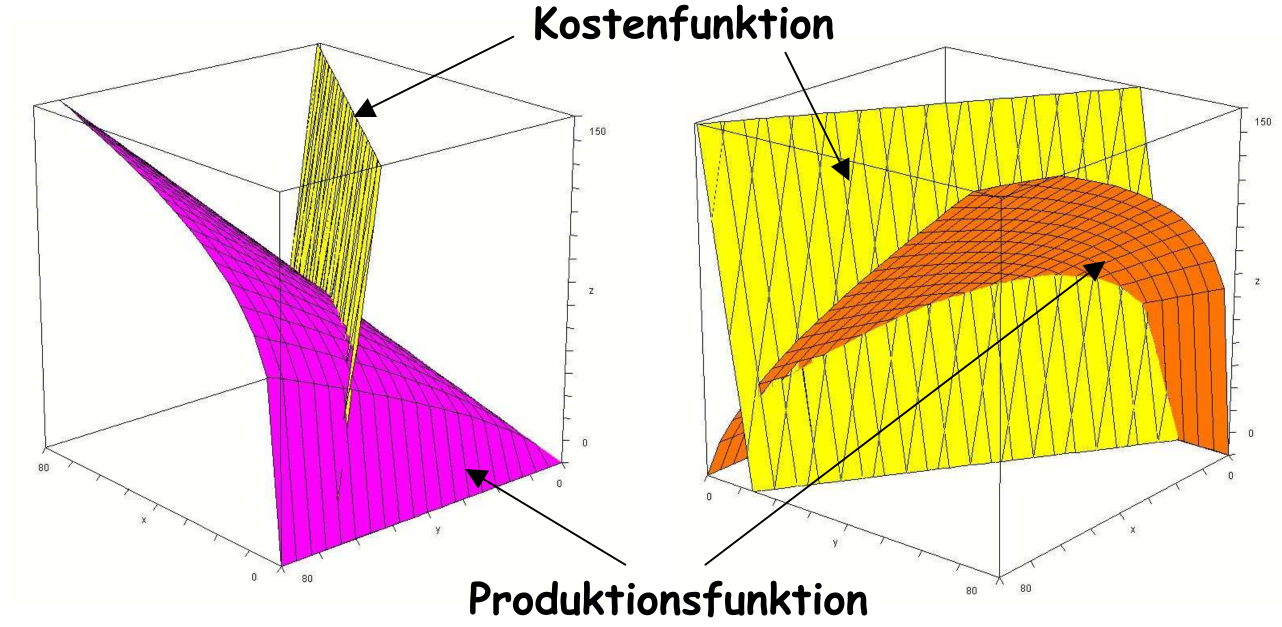


b) Gegeben sei die Produktionsfunktion $q(x,y) = 2x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}$

Eine Mengeneinheit von Faktor x kostet 8,00 €, eine Mengeneinheit von Faktor y kostet 12,00 €. Das Budget beträgt insgesamt 800 €.

Welche Menge kann im optimalen Fall produziert werden?

Lösung:



Rechenweg:

$$L(x,y,\lambda) \quad = \quad 2x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}+\lambda(800-8x-12y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) \quad = \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{y^{0,75}}{x^{0,75}}-8\lambda \quad \overset{!}{=} \quad 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \quad = \quad \frac{1}{16}\cdot\frac{y^{0,75}}{x^{0,75}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) \quad = \quad \frac{3}{2}\cdot\frac{x^{0,25}}{y^{0,25}}-12\lambda \quad \overset{!}{=} \quad 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \quad = \quad \frac{1}{8}\cdot\frac{x^{0,25}}{y^{0,25}}$$

$$\textit{Austauschverhältnis}:$$

$$\frac{1}{16}\cdot\frac{y^{0,75}}{x^{0,75}} \quad = \quad \frac{1}{8}\cdot\frac{x^{0,25}}{y^{0,25}} \quad \Rightarrow \quad y \quad = \quad 2x$$

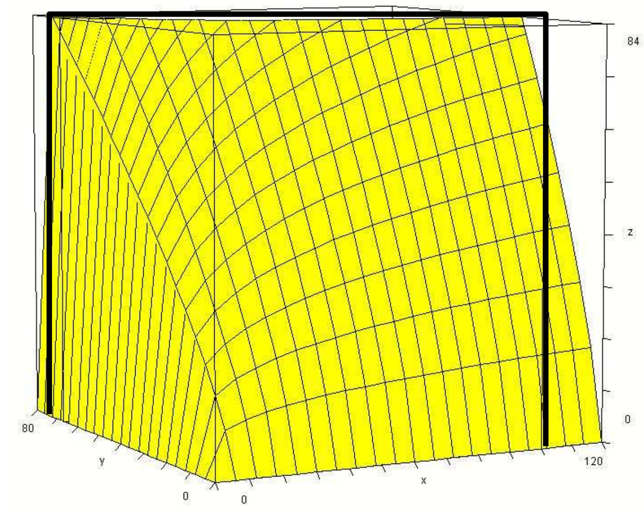
$$\textit{eingesetzt in NB}:$$

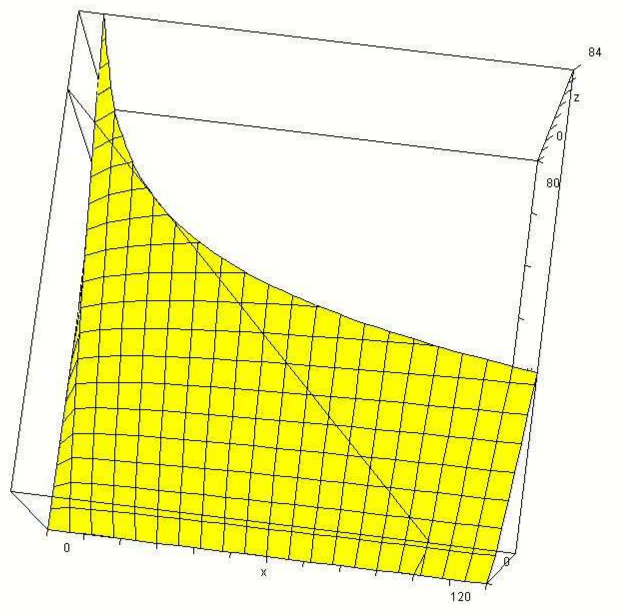
$$800 \quad = \quad 8x+12y \quad \xrightarrow{y=2x} \quad 800 \quad = \quad 6x+12\cdot 2x$$

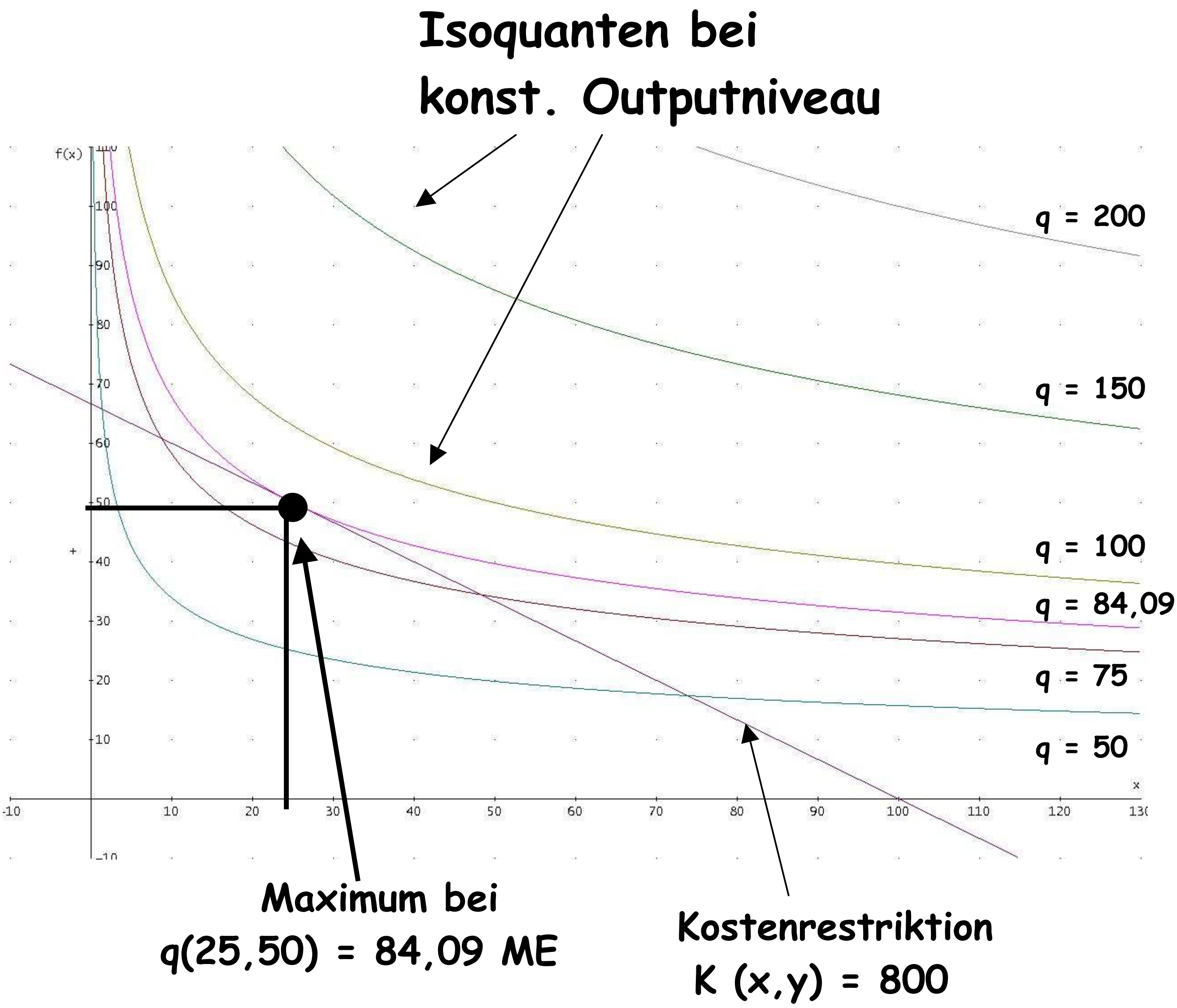
$$\Rightarrow \quad x=25 \quad \Rightarrow \quad y=50$$

$$\Rightarrow \quad q(25 \mid 50) \quad = \quad 2\cdot 25^{\frac{1}{4}}\cdot 50^{\frac{3}{4}} \quad = \quad 50\cdot 2^{\frac{3}{4}} \quad = \quad 84,0896$$

Der Weg zur graphischen Lösung:







6.) **Ökonomische Anwendungen zu Matrizen**

Gegeben seien die Matrizen $M_{RZ} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ und $M_{ZE} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Wie viele Rohstoffe werden für je eine Mengeneinheit der Endprodukte benötigt?

<u>Lösung:</u>

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 21 \\ 42 & 42 \end{pmatrix}$$

b) Wie viele Rohstoffe müssen für einen Auftrag von 30 E_1 und 40 E_2 im Lager vorrätig sein?

<u>Lösung:</u>

$$\begin{pmatrix} 28 & 21 \\ 42 & 42 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.680 \\ 2.940 \end{pmatrix}$$

c) Nun hat man einen Lagerbestand an Rohstoffen von $R_1 = 595$ und von $R_2 = 1.050$.
Wie viele Endprodukte E_1 und E_2 können hiermit hergestellt werden, wenn das Lager danach komplett leer sein sollte?

<u>Lösung:</u>

Schrittweise Lösung eines linearen Gleichungssystems

$$28\,x_1 + 21\,x_2 = 595 \quad (1)$$
$$42\,x_1 + 42\,x_2 = 1050 \quad (2)$$

$$x_1 + 3/4\,x_2 = 85/4 \quad (1)$$
$$42\,x_1 + 42\,x_2 = 1050 \quad (2)$$

$$x_1 + 3/4\,x_2 = 85/4 \quad (1)$$
$$21/2\,x_2 = 315/2 \quad (2)$$

$$x_1 + 3/4\,x_2 = 85/4 \quad (1)$$
$$x_2 = 15 \quad (2)$$

$$x_1 = 10 \quad (1)$$
$$x_2 = 15 \quad (2)$$

Genau eine Lösung

$x_1 = 10$

$x_2 = 15$