Klausur: Mathematik
am Freitag, den 30. Januar 2009

Jürgen Meisel
FH Ludwigshafen

Zugelassene Hilfsmittel: Nicht progr. Taschenrechner
Bearbeitungszeit: 60 Minuten

1.) **Optimum ohne Nebenbedingungen**

Ermitteln Sie die zwei stationären Stellen der Funktion

$$f(x,y) = x^3 - 6xy + 3y^2$$

und untersuchen Sie diese Stellen auf ihre Extremwerteigenschaft.

Bitte berechnen Sie die Funktionswerte nur für Extremwertstellen aus.

Lösung:

$$f(x,y) = x^3 - 6xy + 3y^2$$

$$I.)\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 6y \overset{!}{=} 0 \quad \xrightarrow{II.)\ in\ I.)} \quad 3x^2 - 6x = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x(x-2) = 0$$

$$II.)\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -6x + 6y \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = y$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = 2 \quad \xrightarrow[x=y]{wegen} \quad \wedge \quad y_1 = 0 \quad \wedge \quad y_2 = 2$$

Es resultieren 2 stationäre Stellen: $S_1(0 \mid 0 \mid 0) \quad \wedge \quad S_2(2 \mid 2 \mid -4)$

$Hesse-Matrix:$

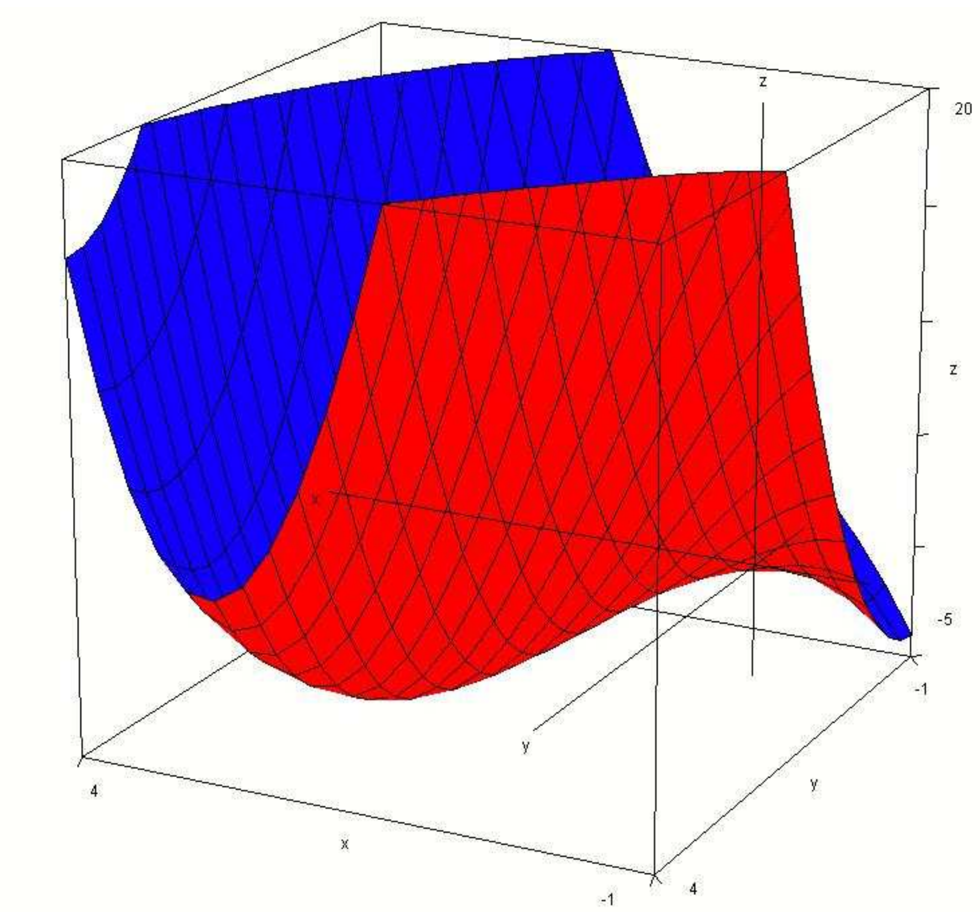
$$H(f) = \begin{pmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{S_i\ einsetzen}$$

$$H\left(f_{S_1}(0 \mid 0)\right) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \det(H) = -36 < 0 \quad \Rightarrow \quad Sattelpunkt \quad S(0 \mid 0 \mid 0)$$

$$H\left(f_{S_2}(2 \mid 2)\right) = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \det(H) = 36 > 0 \quad \wedge \quad f_{xx} = 12 > 0 \quad \Rightarrow \quad Min(2 \mid 2 \mid -4)$$



2.) **Newton-Iteration**

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^3 - x \cdot \ln x + \ln x$

Berechnen Sie die Nullstelle der Funktion auf 3 Stellen genau.

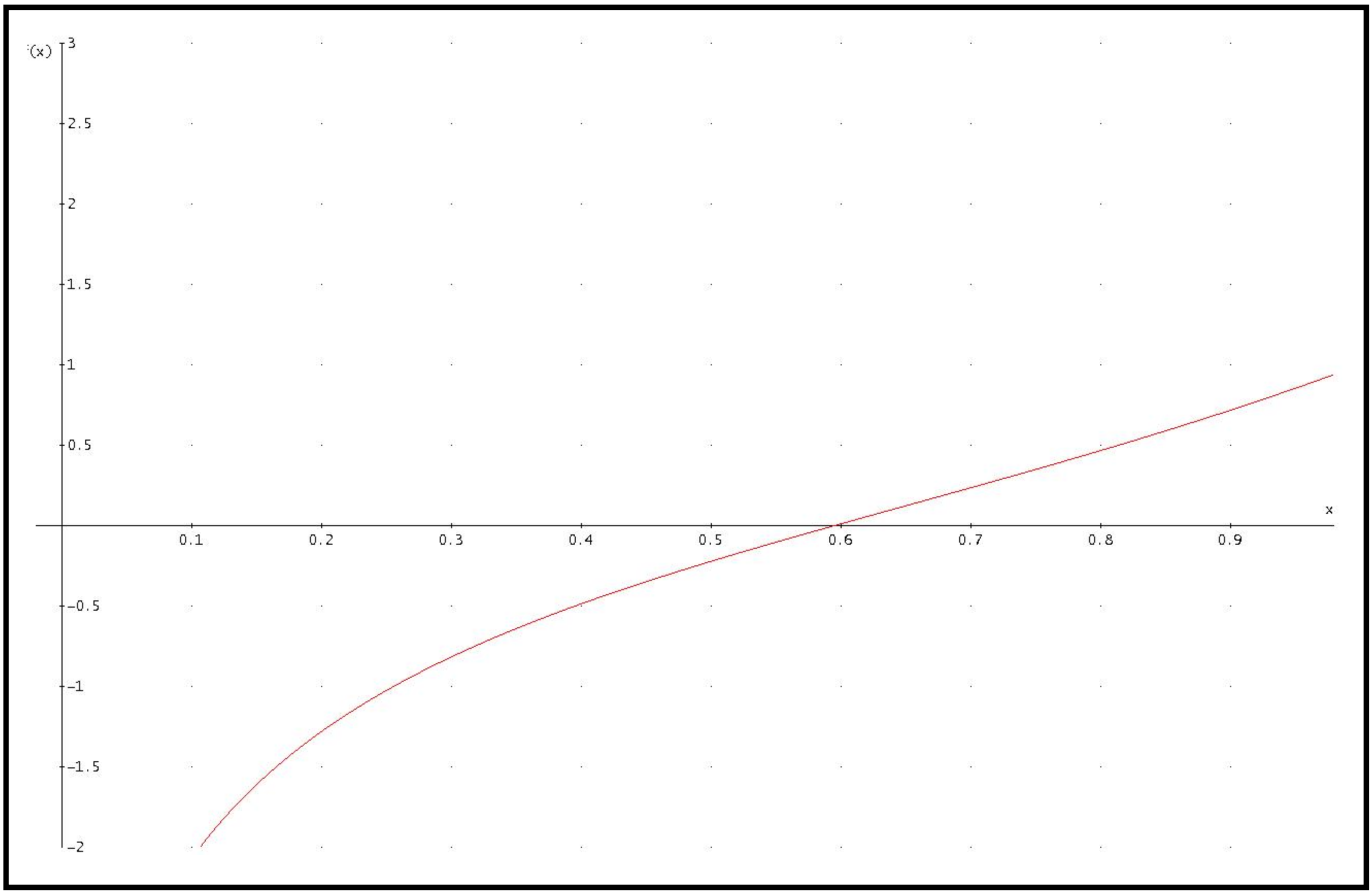
Wählen Sie als Startwert x = 1.

Lösung: Ableitung bilden: $f'(x) = 3x^2 - \ln x - 1 + \frac{1}{x}$

n	**x_n**	**f(x)**	**f'(x)**	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)}$
1	1	1	3	$x_2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
2	$\frac{2}{3}$	0.1611413	2.238798	$x_3 = \frac{2}{3} - \frac{0{,}1611413}{2{,}238798} = 0.59469$
3	0,59469	-0.00033	2.262232	$x_4 = 0.5948358$

Hier kann die Iteration abgebrochen werden, weil Differenz der beiden letzten Näherungswerte für x weniger als 0,001 beträgt:

$$\Delta x = |x_3 - x_4| = |0.59469 - 0.59484| = 0{,}00015$$



3.) **Integralrechnung**

Bestimmen Sie die Stammfunktionen zu folgenden Integralen:

a) $\int (2x^4 - x^3 + t)\,dx$

Lösung: $\int (2x^4 - x^3 + t)\,dx \quad = \quad \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + tx + c$

b) $\int (x-1)\cdot e^x dx$ Anmerkung: Partielle Integration

Lösung:

$$Ansatz: \quad \int u \cdot v' \quad = \quad u \cdot v - \int u' \cdot v \quad \leftrightarrow \quad \begin{matrix} u = x-1 & v = e^x \\ u' = 1 & v' = e^x \end{matrix}$$

$$Berechnung:$$

$$\int (x-1)\cdot e^x dx \quad = \quad (x-1)\cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx \quad = \quad (x-1)\cdot e^x - e^x + c \quad = \quad (x-2)\cdot e^x + c$$

c) $\int \frac{2x-4}{x^2-4x+1}dx$ Anmerkung: Logarithmische Integration

Lösung:

$$\text{Es gilt: } \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx \quad = \quad \ln\left|f(x)\right| + c \quad \Rightarrow \quad \ln\left|x^2 - 4x + 1\right| + c$$

4.) **Ökonomische Anwendungen zu Matrizen**

Ein Betrieb stellt aus 3 Rohstoffen 4 Zwischenprodukte und daraus wiederum 3 Endprodukte her.

Der Materialeinsatz ist folgenden Matrizen zu entnehmen:

$$M_{RZ} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M_{ZE} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Wie lautet die Matrix für den Gesamtverbrauch der Rohstoffe?

Lösung:

$$M_{RZ} \cdot M_{ZE} \quad = \quad M_{RE} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 4 & 12 & 13 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Verwenden Sie nun unabhängig von Ihrem Ergebnis in a) für die weitere Berechnung die Matrix

$$M_{RE} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 4 \\ 2 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

b) Wie viele Rohstoffe sind notwendig, damit 10 ME von E_1 , 20 ME von E_2 und 20 ME von E_3 hergestellt werden können?

Lösung:

$$M_{RE} \cdot \vec{e} \quad = \quad \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 4 \\ 2 & 8 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 160 \\ 210 \\ 300 \end{pmatrix}$$

c) Wie viele Endprodukte E_1 , E_2 und E_3 können bei einem einen Lagerbestand an Rohstoffen von $R_1 = 245$, $R_2 = 250$ und von $R_3 = 230$ hergestellt werden, wenn das Lager danach komplett leer sein sollte?

Lösung:

$$\text{Ansatz}: \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 4 \\ 2 & 8 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 245 \\ 250 \\ 230 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Gauß-Verfahren}]{\text{Lösung mittels}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Rechenweg in Einzelschritten:

$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 245 \quad (1) \\ 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 250 \quad (2) \\ 2x_1 + 8x_2 + 6x_3 &= 230 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 1/3\,x_2 + 1/2\,x_3 &= 245/6 \quad (1) \\ 5x_1 + 4\,x_2 + 4\,x_3 &= 250 \quad (2) \\ 2x_1 + 8\,x_2 + 6\,x_3 &= 230 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 1/3\,x_2 + 1/2\,x_3 &= 245/6 \quad (1) \\ 7/3\,x_2 + 3/2\,x_3 &= 275/6 \quad (2) \\ 2x_1 + 8\,x_2 + 6\,x_3 &= 230 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 1/3\,x_2 + 1/2\,x_3 &= 245/6 \quad (1) \\ 7/3\,x_2 + 3/2\,x_3 &= 275/6 \quad (2) \\ 22/3\,x_2 + 5\,x_3 &= 445/3 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 1/3\,x_2 + 1/2\,x_3 &= 245/6 \quad (1) \\ x_2 + 9/14\,x_3 &= 275/14 \quad (2) \\ 22/3\,x_2 + 5\,x_3 &= 445/3 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + 2/7\,x_3 &= 240/7 \quad (1) \\ x_2 + 9/14\,x_3 &= 275/14 \quad (2) \\ 22/3\,x_2 + 5\,x_3 &= 445/3 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + 2/7\,x_3 &= 240/7 \quad (1) \\ x_2 + 9/14\,x_3 &= 275/14 \quad (2) \\ 2/7\,x_3 &= 30/7 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + 2/7\,x_3 &= 240/7 \quad (1) \\ x_2 + 9/14\,x_3 &= 275/14 \quad (2) \\ x_3 &= 15 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 30 \quad (1) \\ x_2 + 9/14\,x_3 &= 275/14 \quad (2) \\ x_3 &= 15 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 30 \quad (1) \\ x_2 &= 10 \quad (2) \\ x_3 &= 15 \quad (3) \end{aligned}$$

Genau eine Lösung

$x_1 = 30$

$x_2 = 10$

$x_3 = 15$

d) Die drei Endprodukte werden in einem Mengenverhältnis von 2:5:3 hergestellt; vom Rohstoff R_2 sind 4.200 ME auf Lager.

Wie viele der jeweiligen Endprodukte können hergestellt werden und welche Rohstoffmengen von R_1 und R_3 benötigt man, wenn das Lager am Ende leer sein soll?

Lösung:

$$\text{Ansatz}: \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 4 \\ 2 & 8 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 5x \\ 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 4.200 \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 31x \\ 42x \\ 62x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 4.200 \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x = 100 \quad \Rightarrow \quad a = 3.100 \quad \Rightarrow \quad c = 6.200$$

$$\Rightarrow \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 2x & 5x & 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 & 500 & 300 \end{pmatrix}$$

5.) **Optimum mit Nebenbedingungen**

Jürgen M. ist Lehrbeauftragter an der FH Ludwigshafen. Dieses Semester hielt er Veranstaltungen in Mathematik und Statistik.

Sein Honorar $h(m,s)$ ergibt sich nun aus einer degressiv wachsenden Lohnfunktion in Abhängigkeit der Zeitdauern, die er bei den Semestergruppen mit Statistik und Mathematik zugebracht hat:

$$h(m,s) = 50\sqrt{m \cdot s}$$

Sein Frustrationstoleranzniveau $f(m,s)$ in Grad setzt sich kumulativ aus Frust über den hohen Geräuschpegel in Mathematik oder Statistik zusammen und besitzt die Vorschrift $f(m,s) = 16m + 9s$

Wie viele Stunden Vorlesung pro Woche hätte er mit Mathematik (m) und Statistik (s) zubringen müssen, um ein Honorar von 300,00 € mit möglichst wenig Frustration zu verdienen?

<u>Lösung:</u>

$$\textit{Zielfunktion}: \quad f(m,s) = 16m + 9s \quad \rightarrow \quad \min.$$

$$\textit{Nebenbedingung}: \quad h(m,s) = 50\sqrt{m \cdot s} = 300$$

$$L(m,s,\lambda) = 16m + 9s + \lambda\left(300 - 50\sqrt{m \cdot s}\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial m}(m,s,\lambda) = 16 - \frac{25\sqrt{s}}{\sqrt{m}}\lambda \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda = \frac{16}{25} \cdot \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{s}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial s}(m,s,\lambda) = 9 - \frac{25\sqrt{m}}{\sqrt{s}}\lambda \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda = \frac{9}{25} \cdot \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{m}}$$

$$\textit{Austauschverhältnis}:$$

$$\frac{16}{25} \cdot \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{s}} = \frac{9}{25} \cdot \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{m}} \Rightarrow m = \frac{9}{16}s$$

$$\textit{eingesetzt in NB}:$$

$$50\sqrt{\frac{9}{16}s \cdot s} = 300 \Rightarrow 50 \cdot \frac{3}{4}s = 300$$

$$\Rightarrow s = 8 \Rightarrow m = 4{,}5$$