

Lösungsverhalten quadratischer Gleichungen

Monatsaufgabe Oktober 2005

Seit Wochen werde ich gelöchert, angemault und auf offener Straße angehalten, ich kann mich in den Schulfluren nur inkognito bewegen ...

... aber nun ist sie endlich da, die Monatsaufgabe für Oktober zum Thema:

Wahrscheinlichkeit für das Lösungsverhalten quadratischer Gleichungen

In einer quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ sollen die Koeffizienten p und q unabhängig voneinander aus dem Intervall $[0; 1]$ ausgewählt werden.

- a) Wie muss q in Abhängigkeit von p gewählt werden, damit die quadratische Gleichung lösbar ist?

Lösung: *Untersuchung der Diskriminante:* $q \leq \frac{p^2}{4}$

- b) Zu jedem Paar (p / q) gehört ein Punkt K des Einheitsquadrates und umgekehrt, z.B. $p = \frac{1}{2}$ und $q = \frac{1}{4}$.

In welchem Bereich des Einheitsquadrates liegen die Punkte, deren Koordinaten die Koeffizienten p und q einer lösbaren quadratischen Gleichung sind.

Geben Sie bitte für diesen Fall die Randfunktion an und markieren Sie die gesuchte Fläche im Einheitsquadrat.

Lösung: *Randfunktion:* $q = f(p) = \frac{p^2}{4}$ (Parabel)

Alle Punkte auf bzw. unterhalb der Randfunktion erfüllen die Bedingung.

- c) Für welchen Koeffizientenbereich hat die quadratische Gleichung demnach nur eine Lösung?

Lösung: *Für alle Punkte auf der Randfunktion besitzt die quadratische Gleichung nur eine Lösung, da hier auch die Diskriminante zu Null wird.*

- d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die quadratische Gleichung bei unabhängiger Wahl von p und q aus dem Intervall [0; 1] lösbar ist.

Lösung:
$$P(\text{lösbar}) = \int_0^1 \frac{p^2}{4} dp = \left[\frac{1}{12} p^3 \right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

- e) Erstellen Sie ein kleines Programm mit Hilfe einer Programmiersprache oder ein dynamisches Tabellenblatt mittels Excel (d.h. Einbindung von Formular-elementen), das die unter d) ermittelte Wahrscheinlichkeit durch eine genügend hohe Versuchsanzahl simuliert (max. 10.000 Versuche).

Lösung: *Quelltexte von Schülerprogrammen*

(i) PHP-Programm

```
<?php
print 'Monatsaufgabe in php : -)';

$erg = 0; //vorher zur Sicherheit auf 0 (wir kennen ja noch unsere c++ probleme :-))

for ($i=0;$i<=10000;$i++) //Schleife bis 10000
{
    $random_1= rand(1,100)/100; //Zufallszahl zwischen 1 und 100 erzeugen
    $inte1= 0.25 * ($random_1 * $random_1); //integral
    $random_2= rand(1,100)/100;
    $inte2= 0.25 * ( $random_2 * $random_2);
    if ($inte2<$inte1)
    {
        $inte= $inte1 - $inte2;
    }
    else
    {
        $inte= $inte2- $inte1;
    }
    $erg += $inte/10000;
} //For-Schleife beenden

print '<br>ERG: ' . $erg;

?>
```

(ii) CPP-Programm

```
#include <conio.h>
#include <iostream.h>
#include <stdio.h>
#include <iomanip.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>
#include <math.h>

int main()
{
    srand( (unsigned)time( NULL ) );

    int var1,var2,anzahl,summe=0,i,l;
    double w,p,q,anzahl2,summe2,pot;
    char antw,a;

    cout<<"Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass eine quadratische Gleichung bei
unabhaengeriger Wahl von p und q aus dem Intervall [0;1] loesbar ist:";

    start:

    cout<<"\n\n\nGeben Sie die gewuenschte Anzahl der Versuche ein (max.
10000):";
    cin>>anzahl;
    cout<<"\n\n\n";

    if(anzahl>10000)
    {
        cout<<"Leider nicht mehr als 10000 Versuche moeglich!\n\n\n";

        goto start;
    }

    else
    {
        srand(time(0));

        cout<<"VNr\t p\t q\t(1/4)p\t\t loesbar(ja=1,nein=0)\n\n";
```

```

for(i=1;i<=anzahl;i++)
{
    cout.setf(ios::fixed);
    cout.precision(4);

    var1 = rand() % 10000;
    p = var1 / 10000.0000;

    var2 = rand() % 10000;
    q = var2 / 10000.0000;

    pot = 0.25*p*p;

    if(q<=pot)
    {
        l=1;
    }

    else
    {
        l=0;
    }

    cout <<i<<"\t"<<p<<"\t"<<q<<"\t"<<pot<<"\t\t\t"<<l<<"\n";

    summe = summe+l;
}

```

```

summe2=summe;
anzahl2=anzahl;
w = (summe2*100)/anzahl2 ;

```

cout<<"\n\nLoesbar sind "<<summe<<" von "<<anzahl<<" Versuchen. Das heisst die Wahrscheinlichkeit betraegt ca. "<<w<<" %";

```

}

```

```

getch();
return 0;

```

```

}

```

(iii) Excel-Darstellungen