

LÖSUNG



Das Stöckelproblem von Frau Dr. Wachmann

- oder: Worüber man sich als Frau alles ärgern kann ... -

Während ihrer umfangreichen Reisetätigkeit mit der Deutschen Bahn AG ist der Wirtschaftsprüferin Dr. Kunigunde Wachmann aufgefallen, dass ein bemerkenswerter Zusammenhang besteht zwischen der Höhe h (in cm) der Absätze ihrer Stöckelschuhe und der Wahrscheinlichkeit w dafür, dass sie ihren Reisekoffer selbst vom Bahnsteig zum Taxi tragen muss. Der Zusammenhang zwischen w und h kann durch folgende Funktion $w(h)$ beschrieben werden:

$$w(h) = 0,01h^2 - 0,16h + 0,9 \quad \text{mit } h \in [0; 10]$$

- a) Wie hoch ist bei $h = 10$ dann die Wahrscheinlichkeit den Koffer selbst tragen zu müssen?

Lösung: $w(10) = 0,3 = 30 [\%]$

- b) Wann ist die Wahrscheinlichkeit den Koffer selbst tragen zu müssen am größten?

Lösung: siehe c)

- c) Bei welcher Absatzhöhe ist die Wahrscheinlichkeit, den Koffer selbst tragen zu müssen am kleinsten?

Lösung:

$$w'(h) = 0,02h - 0,16 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow h = 8$$

$$w''(h) = 0,02 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min } (8 \mid 0,26)$$

Prüfen der Randwerte:

$$\left. \begin{array}{l} w(0) = 0,9 > 0,26 \\ w(10) = 0,3 > 0,26 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Bei } h=8 \text{ ist die W'keit am kleinsten} \\ \text{Bei } h=0 \text{ ist die W'keit am größten} \end{array}$$

- d) Wie hoch darf die Absatzhöhe höchstens sein, damit die Wahrscheinlichkeit maximal 30 % beträgt?

Lösung:

$$0,01h^2 - 0,16h + 0,9 \leq 0,3 \Rightarrow 0,01h^2 - 0,16h + 0,6 \leq 0 \\ \Rightarrow h_1 = 6 \quad \vee \quad h_2 = 10$$

Zwischen den Absatzhöhen 6 cm und 10 cm liegt die Wahrscheinlichkeit bei kleiner /gleich 30 %.

- e) Zeichnen Sie die Funktion aufgrund der vorherigen Ergebnisse.

Lösung: siehe j)

Auf den ersten Blick scheint sich nun eine Ansatzhöhe zu empfehlen, welche die Wahrscheinlichkeit minimiert. Andererseits steigt bei hohen Absätzen der Ärger \ddot{a} (in Strafmaßpunkten), der immer dann entsteht, wenn sie den Koffer doch einmal selbst tragen muss: Je höher die Absätze, desto ärgerlicher das eigenhändige Koffertragen.

Die zugehörige Ärgerfunktion $\ddot{a}(h)$ lautet:

$$\ddot{a}(h) = 0,25h + 1 \quad \text{mit } h \in [0; 10]$$

- f) Welcher Funktionstyp liegt hier vor?

Lösung: lineare Funktion

- g) Zeichnen Sie die Funktion.

Lösung: siehe j)

Der zu jeder Absatz- oder Stöckelhöhe h zu erwartende Gesamtfrust $f(h)$ ist nun definitionsgemäß als Produkt aus der Wahrscheinlichkeit $w(h)$, den Koffer selbst tragen zu müssen, und dem Ärger $\ddot{a}(h)$ beim eigenhändigen Tragen des Koffers, gegeben.

- h) Welche Absatzhöhe würden Sie der lieben Kunigunde - äh Verzeihung - Frau Dr. Wachmann empfehlen, damit ihr Gesamtfrust möglichst gering ausfällt?

Lösung: siehe i)

i) Zeigen Sie, dass Ihr Ergebnis ein Minimum darstellt.

Lösung:

$$f(h) = w(h) \cdot \ddot{a}(h)$$

$$f(h) = (0,01h^2 - 0,16h + 0,9) \cdot (0,25h + 1)$$

$$f(h) = 0,0025h^3 - 0,03h^2 + 0,065h + 0,9$$

$$f'(h) = 0,0075h^2 - 0,06h + 0,065 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow h_1 = 1,3 \quad \vee \quad h_2 = 6,7$$

$$f''(h) = 0,015h - 0,06$$

$$f''(1,3) = 0,015 \cdot 1,3 - 0,06 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max.}$$

$$f''(6,7) = 0,015 \cdot 6,7 - 0,06 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min.}$$

j) Zeichnen Sie die Gesamtfrustfunktion $f(h)$ für $h \in [0; 10]$.

Lösung:

