Monatsaufgabe: März 2006

Nuss oder π-nuts???

Diesmal möchte ich euch von einem Problem schildern, mit dem ich vor kurzem konfrontiert wurde. Ich weiß natürlich, dass das Problem keine allzu harte Nuss sondern eher Peanuts darstellt. Dann viel Spaß beim knacken und genießen!!!

In ein Quadrat mit der Seitenlänge a - halten wir uns nicht mit schnöden Zahlen auf - wird ein Kreis so einbeschrieben, dass die Umfangslinie das Quadrat in genau vier Punkten berührt.

Daraufhin wird in den Kreis ein Quadrat hineingelegt, das mit seinen vier Eckpunkten den Kreisumfang gerade berührt.

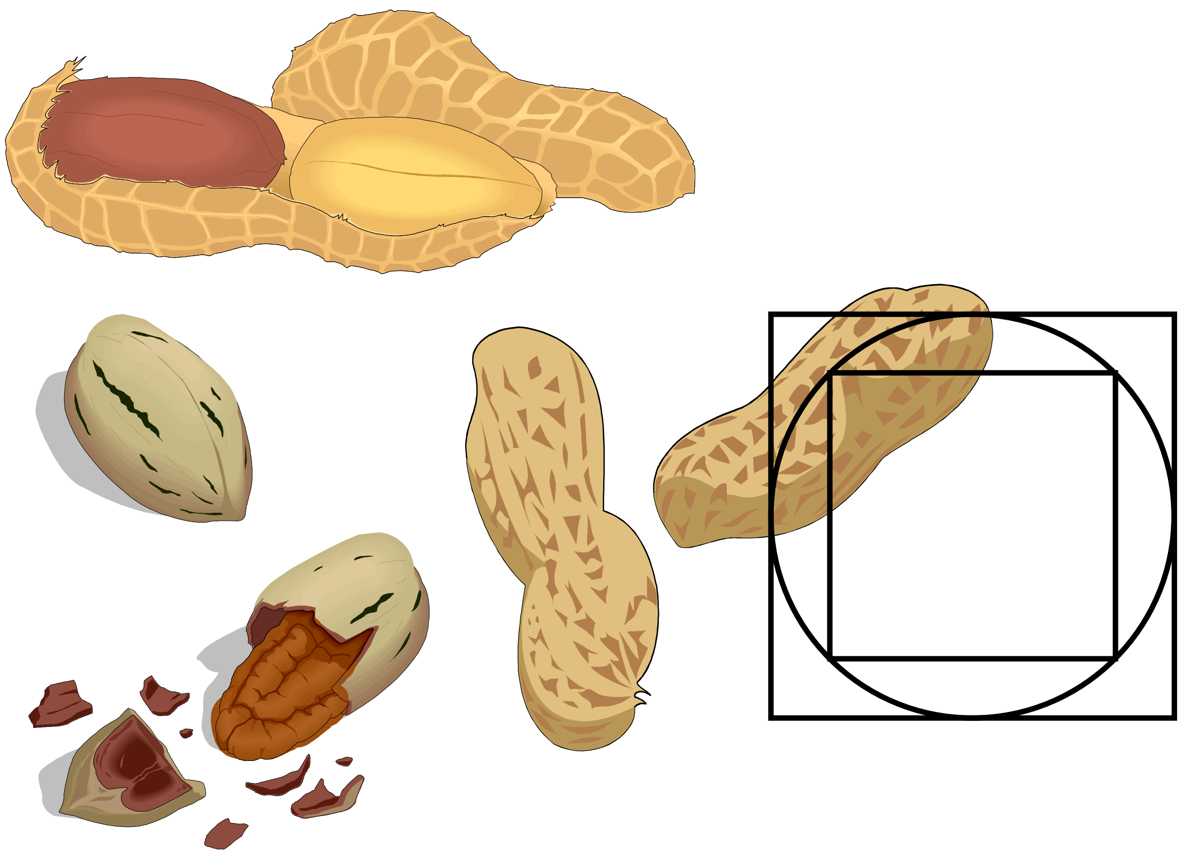
Dieses Spiel setzt sich immer weiter fort.

Problem 1: **Wie groß ist die Seitenlänge des zweiten Quadrats?**

Problem 2: **Wie groß ist die Seitenlänge des n-ten Quadrats?**

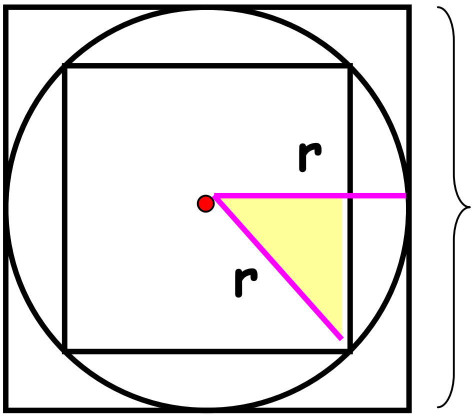
Problem 3: **Wie groß ist die Einzelfläche der ersten 3 Quadrate?**

Problem 4: **Wie groß ist die Flächensumme der ersten n Quadrate und gegen welchen Grenzwert strebt diese, wenn n in die Unendlichkeit ginge?**



Lösung:

a) Seitenlänge des zweiten Quadrats



Der Radius **r** des Innenkreises ist die Hälfte der Seitenlänge a. Die neue Seitenlänge des inneren Quadrats muss dann mit Pythagoras ermittelt werden.

Die Seitenlängen des neuen gleichschenkligen (gelben) Dreiecks lautet dann:

r (= Hypotenuse) und s (Katheten).

$$\text{Es gilt:} \quad r = \frac{1}{2}a$$

$$s^2 + s^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad 2s^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 \quad \Rightarrow \quad s = \sqrt{\frac{1}{8}}\,a \quad \Rightarrow \quad 2s = \sqrt{\frac{1}{2}}\,a$$

b) Seitenlänge des n-ten Quadrates

$$\text{Es gilt:} \quad r_2 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}\,a$$

$$s^2 + s^2 = r_2^{\,2} \quad \Rightarrow \quad 2s^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}\,a\right)^2 \quad \Rightarrow \quad s = \frac{1}{4}a \quad \Rightarrow \quad 2s = \frac{1}{2}a$$

n	**1**	**2**	**3**	...	**n**
Länge	a	$\sqrt{\frac{1}{2}}\,a$	$\frac{1}{2}a$	...	$\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^{n-1} a$

c) + d) Einzelflächen und Flächensumme

n	1	2	3	…	n
Länge	a	$\sqrt{\frac{1}{2}}\,a$	$\frac{1}{2}a$	…	$\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^{n-1} a$
Fläche	a^2	$\frac{1}{2}a^2$	$\frac{1}{4}a^2$	…	$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} a^2$
Flächensumme	a^2	$\frac{3}{2}a^2$	$\frac{7}{4}a^2$	…	$\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}a^2 = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]a^2$

Geometrische Summenformel zur Ermittlung der Flächensumme S:

$$S_n = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}a^2 = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]a^2$$

$$S = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}a^2 = a^2\cdot\lim_{n\to\infty}2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 2a^2$$

Herleitung der Flächensumme S:

$$I.)\ S = a^2 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}a^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} a^2$$

$$II.)\ S \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}a^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} a^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n} a^2$$

$$\xrightarrow{I.)-II.)}$$

$$S - \frac{1}{2}\cdot S = a^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n} a^2$$

$$S\left(1-\frac{1}{2}\right) = a^2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]$$

$$\Rightarrow\ S\left(1-\frac{1}{2}\right) = a^2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right] \Rightarrow\ S = a^2\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{\frac{1}{2}} = a^2\cdot 2\cdot\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \lim_{n\to\infty} S = 2\cdot a^2\cdot\lim_{n\to\infty}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right] \xrightarrow{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\to 0} 2\cdot a^2$$