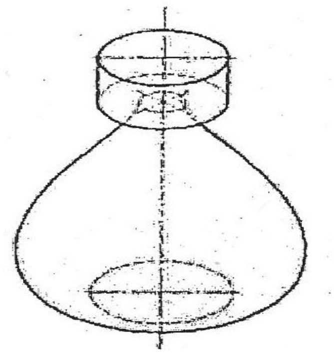
Abiturprüfung Mathematik 2013 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien – Anwendungsorientierte Aufgabe
Teil 3, Aufgabe 2

2
Ein Parfumhersteller möchte ein neues Produkt auf den Markt bringen. Das Parfum wird in einem gläsernen Flakon angeboten.

Die Mantelfläche des Flakons wird durch Rotation des Schaubilds der Funktion f mit

$f(x) = 0{,}02x^3 - 0{,}33x^2 + 1{,}20x + 1{,}75$;
$x \in [-0{,}5; 8]$

um die x-Achse erzeugt.



Dabei gilt: 1 Längeneinheit entspricht 1 cm.
Die Öffnung befindet sich bei x = 8.

Der Flakon wird durch einen Korken mit aufgesetztem Glaszylinder verschlossen.
Der Verschluss ist so gestaltet, dass nur der Glaszylinder (Durchmesser 2,72 cm; Höhe 1,5 cm) übersteht.
Die Rotationsachsen des Flakons und des Verschlusses stimmen überein.

2.1 (5 Punkte)
Zeichnen Sie die Außenkontur des verschlossenen Flakons mit dem Glaszylinder in ein Koordinatensystem.

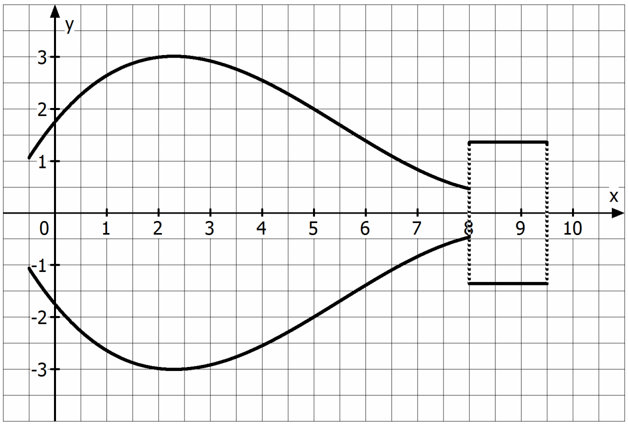
2.2 (5 Punkte)
Die Wandstärke des Flakons, parallel zum Boden des Flakons gemessen, beträgt 0,2 cm, die Dicke des Bodens 0,5 cm.
Prüfen Sie, ob der Flakon die gewünschte Füllmenge von 100 ml fasst, wenn bis zum oberen Rand ein Abstand von mindestens 2 cm eingehalten werden muss.

2.3 (5 Punkte)
Die Verpackung des Flakons besteht aus stabilem dünnem Karton und hat die Form einer quadratischen Pyramide. Der Boden des Flakons steht dabei auf der Grundfläche der Pyramide. Jede Seitenfläche der Verpackung berührt sowohl den Flakon als auch den oberen Rand des Verschlusses.
Berechnen Sie die Höhe dieser Verpackung.

Abiturprüfung Mathematik 2013 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien – Anwendungsorientierte Aufgabe
Teil 3, Lösung Aufgabe 2

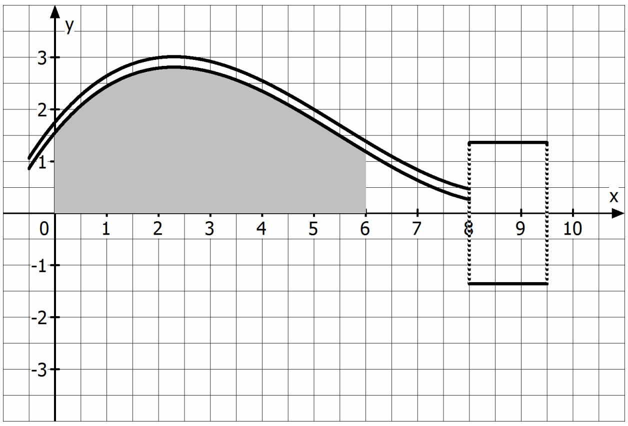
2.1

Außenkontur des Flakons:
Das obere Schaubild gehört zur Funktion $f(x)$.
Das untere Schaubild gehört zur Funktion $-f(x)$.



Die waagrechten Geraden entsprechen dem Glaszylinder mit Höhe 1,5 cm und Durchmesser 2,72 cm.

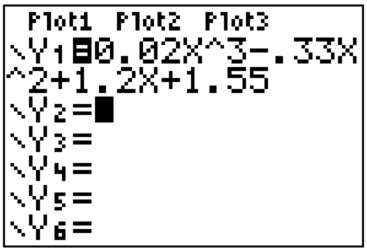
2.2

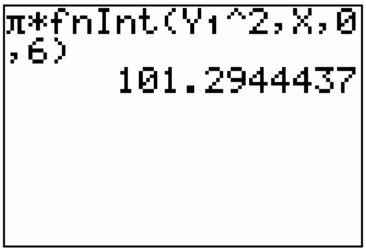


Die zu berechnende Füllmenge entspricht dem Volumen eines Rotationskörpers.
Da die Wandstärke 0,2 cm entspricht, lautet die Randfunktion
$g(x) = f(x) - 0,2 = 0,02x^3 - 0,33x^2 + 1,2x + 1,55$

Da der Boden 0,5cm dick ist, startet das Integral bei x = 0.
Da vom oberen Rand 2 cm Abstand vorhanden sein sollten, endet das Integral bei x = 6.

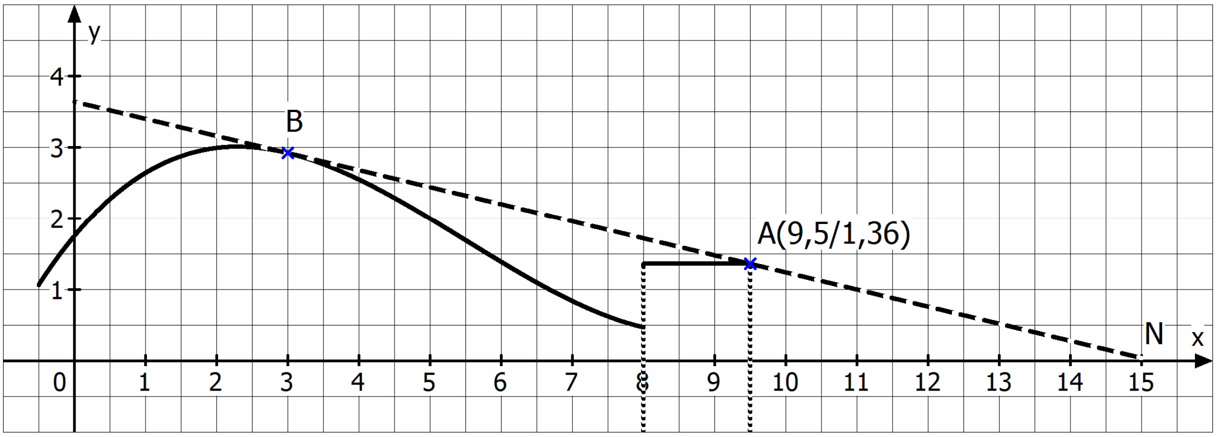
$$\text{Füllmenge} = \pi \cdot \int_0^6 (f(x) - 0,2)^2 \, dx$$





Der Flakon fasst 101,3 cm³ = 101,3 ml und damit fasst er die gewünschte Menge von 100 ml.

2.3



Die Höhe der Pyramide erhält man folgendermaßen:

1.) Lege vom oberen Rand des Verschlusses (dies entspricht Punkt A(9,5/1,36)) eine Tangente an das Schaubild von f(x) und bestimmte den Berührpunkt B.

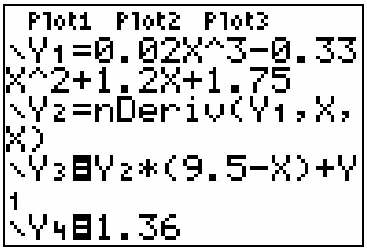
2.) Bestimme die Gleichung der Tangente in B.
3.) Bestimme den Schnittpunkt N der Tangente mit der x-Achse

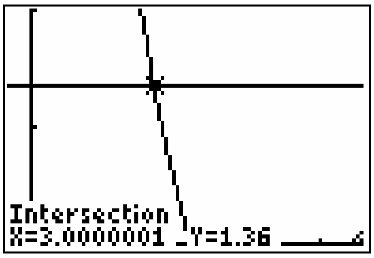
Die waagrechte Strecke von P(-0,5/0) bis N entspricht der Höhe der Pyramide.
(Der Start ist bei x = -0,5 da auch die Dicke des Bodens berücksichtigt werden muss)

zu 1.)
Die allgemeine Tangentengleichung lautet $y = f'(u)\cdot(x-u)+f(u)$
A(9,5/1,36) liegt auf der Tangente: $1{,}36 = f'(u)\cdot(9{,}5-u)+f(u)$

Berechnung von u mit dem GTR:
Y1 = f(x)
Y2 = $f'(x)$
Y3 = Y2*(9,5-X) + Y1
Y4 = 1,36

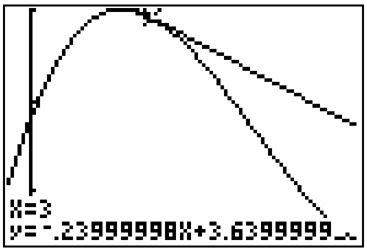
Schnittstelle von Y3 und Y4 ergibt den Wert von u:





Mit dem GTR ergibt sich, dass die Tangente das Schaubild an der Stelle u = 3 berührt.

2.) Die Gleichung der Tangente an der Stelle x = 3 kann mit dem GTR ermittelt werden:



Die Gleichung der Tangente lautet $y = -0,24x + 3,64$.

3.) Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse:

$$0 = -0,24x + 3,64 \Rightarrow x = \frac{91}{6}$$

Die Höhe der Verpackung beträgt $\frac{91}{6} + 0,5 \approx 15,67$ cm