Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG, BTG, TG)
Hauptprüfung 2011 Teil 2, Stochastik, Aufgabe 1
Baden-Württemberg

1
Beim Skatspiel besteht ein Spielkartensatz aus 32 Karten.
Die Kartenwerte 7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, Ass gibt es in jeder der vier Spielfarben Karo, Herz, Pik und Kreuz.
Vor einem Spiel werden die Karten gemischt. Beim Austeilen erhält jeder Spieler zehn Karten. Zwei Karten werden verdeckt in die Mitte gelegt, sie bilden den Skat.

1.1 (6 Punkte)
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
A: Im Skat liegen zwei Kreuz-Karten.
B: Im Skat liegt kein Ass.
C: Im Skat liegt genau ein Bube.

Eine Karte im Skat ist ein Bube. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass auch die andere Karte ein Bube ist ?

1.2 (4 Punkte)
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler nach dem Austeilen alle Buben auf der Hand hat ?

1.3 (5 Punkte)
Alle Karten mit den Werten 7, 8 oder 9 heißen Luschen.
Zwei Abiturienten spielen mit dem Kartensatz und legen n Karten, die keine Luschen sind, auf die Seite.
Einer der Abiturienten darf aus den restlichen Karten zwei Karten auf einmal ziehen.
Bestimmen Sie n so, dass die Wahrscheinlichkeit, genau eine Lusche zu ziehen, mindestens 50% beträgt.

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG, BTG, TG)
Hauptprüfung 2011 Teil 2, Stochastik, Lösung Aufgabe 1 Baden-Württemberg

1.1

Als Urnenmodell beschrieben handelt es sich hier um eine Ziehung mit einem Griff (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge und ohne Wiederholung) aus einer Urne mit 32 Kugeln.

$$P(A) = \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{24}{0}}{\binom{32}{2}} = \frac{28}{496} = \frac{7}{124}$$

Erklärung Zähler: Von den 8 Kreuzkarten sollen 2 gezogen werden, von den restlichen 24 Karten keine.
Erklärung Nenner: Von den gesamten 32 Skatkarten werden 2 gezogen.

$$P(B) = \frac{\binom{4}{0} \cdot \binom{28}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{378}{496} = \frac{189}{248}$$

Erklärung Zähler: Von den 4 Assen wird keines gezogen, von den restlichen 28 Karten zwei.

$$P(C) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{28}{1}}{\binom{32}{2}} = \frac{112}{496} = \frac{7}{31}$$

Erklärung Zähler: Von den 4 Buben wird genau einer gezogen, von den restlichen 28 Karten ebenfalls genau eine.

D: Eine Karte im Skat ist ein Bube. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass auch die andere Karte ein Bube ist ?

Hinweis: Diese Frage ist leider nicht eindeutig gestellt. Es gibt hier zwei Lösungsmöglichkeiten mit unterschiedlichen Ergebnissen hinsichtlich der Wahrscheinlichkeit.

1.Interpretation:

Es handelt sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit mit der Bedingung. Die Bedingung „Eine Karte im Skat ist ein Bube“ wird so interpretiert, dass mindestens eine Karte im Skat ein Bube ist. Das heißt, dass ein angenommener Spielleiter sich beide Karten im Skat anschaut und dann die Information gibt, dass mindestens eine Karte ein Bube ist.

Folgende Ereignisse werden hierfür definiert:
E: Im Skat liegen zwei Buben
F: Im Skat liegt mindestens ein Bube.

Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$ wobei $P(E \cap F) = P(E)$

Es gilt $P(E) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{28}{0}}{\binom{32}{2}} = \frac{6}{496} = \frac{3}{248}$ und $P(F) = P(C) + P(E) = \frac{7}{31} + \frac{3}{248} = \frac{59}{248}$

Daraus folgt $P(D) = P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{P(E)}{P(F)} = \frac{\frac{3}{248}}{\frac{59}{248}} = \frac{3}{59}$

2.Interpretation:

Es handelt sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit mit der Bedingung. Die Bedingung „Eine Karte im Skat ist ein Bube“ wird so interpretiert, dass die 1.Karte im Skat ein Bube ist. Das heißt, dass ein angenommener Spielleiter sich nur die 1.Karte im Skat anschaut und dann die Information gibt, dass die 1.Karte ein Bube ist.

Folgende Ereignisse werden hierfür definiert:
E: Im Skat liegen zwei Buben
F: Die 1.Karte im Skat ist ein Bube

Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$ wobei $P(E \cap F) = P(E)$

Es gilt $P(E) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{28}{0}}{\binom{32}{2}} = \frac{6}{496} = \frac{3}{248}$ und $P(F) = \frac{4}{32}$

Daraus folgt $P(D) = P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{P(E)}{P(F)} = \frac{\frac{3}{248}}{\frac{4}{32}} = \frac{3}{31}$

1.2

P(„ein Spieler hat alle Buben auf der Hand“) = $\frac{\binom{4}{4} \cdot \binom{28}{6}}{\binom{32}{10}} = \frac{376740}{64512240} = \frac{21}{3596} \approx 0{,}0058$

1.3

Insgesamt gibt es in dem Kartenspiel 12 Luschen (3 Luschen für jede der 4 Farben) und 20 „Nicht-Luschen“.

Nun werden n Nicht-Luschen (wobei $n \le 12$ ist) auf die Seite gelegt.

Übrig bleiben 32 – n Karten, in denen noch 12 Luschen und 20-n Nicht-Luschen enthalten sind.

Nun werden zwei Karten auf einmal (mit einem Griff) gezogen.

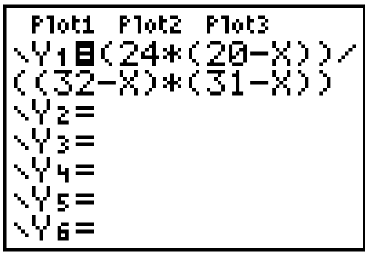
$$P(\text{"genau eine Lusche"}) = \frac{\binom{12}{1}\cdot\binom{20-n}{1}}{\binom{32-n}{2}} = \frac{12\cdot(20-n)}{\frac{(32-n)\cdot(31-n)}{2}} = \frac{24\cdot(20-n)}{(32-n)\cdot(31-n)}$$

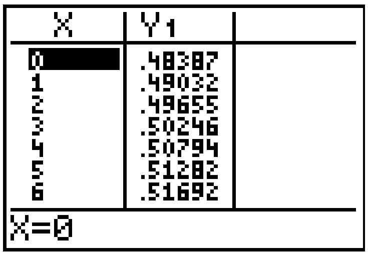
Erklärung Zähler: Von den 12 Luschen soll eine gezogen werden und von den 20-n Nicht-Luschen soll ebenfalls eine gezogen werden.

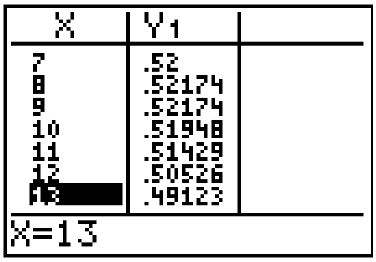
Erklärung Nenner: Von den insgesamt 32 – n Karten werden zwei gezogen.

Gesucht ist nun der Wert von n, so dass gilt: $\frac{24\cdot(20-n)}{(32-n)(31-n)} \ge 0{,}5$

Mit dem GTR erhält man:







Anhand der Wertetabellen erkennt man, dass die Wahrscheinlichkeit 0,5 übersteigt für $3 \le n \le 12$.