Hauptprüfung Abiturprüfung 2015 (ohne CAS)

Baden-Württemberg

Analysis

Hilfsmittel: GTR, Formelsammlung

berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

August 2015

1.1

Für jedes $t \neq 0$ ist die Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = x^3 - 3t \cdot x^2 + \left(\frac{9}{4}t^2 + 1\right) \cdot x \quad \text{mit} \quad x \in \mathbb{R}$$

Das Schaubild von f_t ist K_t.

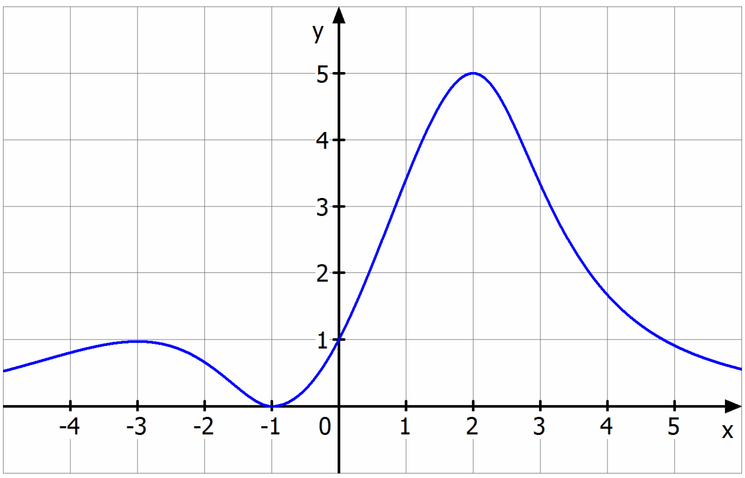
1.1.1
Zeigen Sie, dass K_1 keine Extrempunkte besitzt.
Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von K_1.
Zeichnen Sie K_1 für $0 \leq x \leq 3$. (8 Punkte)

1.1.2
Die Tangente an K_1 im Ursprung begrenzt mit K_1 eine Fläche.
Zeichnen Sie diese Tangente in das Koordinatensystem von 1.1.1 ein.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche mit Hilfe einer Stammfunktion. (8 Punkte)

1.1.3
Zeigen Sie, dass jedes Schaubild K_t die erste Winkelhalbierende berührt.
(4 Punkte)

1.1.4
Berechnen Sie die Steigung m_t von K_t an der Stelle x = 1.
Zeigen Sie, dass $m_t \geq 0$ für alle $t \neq 0$. (4 Punkte)

1.2
Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Schaubilds der Funktion h.



Begründen Sie, warum folgende Aussagen wahr sind:
1. Das Schaubild von h besitzt eine Wendetangente, deren Steigung größer als eins ist.
2. $h'(1) \cdot h'(3) < 0$
3. $\int_1^3 h(x)dx < 10$
4. Jede Stammfunktion von h ist im Intervall [0;4] streng monoton steigend.

(8 Punkte)

1.3
Für jedes a > 0 ist die Funktion g_a gegeben durch
$g_a(x) = a \cdot \sin(a \cdot x) + a$ mit $x \in \mathbb{R}$
Das Schaubild von g_a ist C_a.

1.3.1
Beschreiben Sie, wie C_2 aus der Kurve mit der Gleichung y = sin(x) entsteht.
Zeichnen Sie C_2.

(6 Punkte)

1.3.2
Jeder Extrempunkt von C_a und seine beiden benachbarten Wendepunkte sind die Eckpunkte eines Dreiecks.
Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt eines solchen Dreiecks nicht von a abhängt.
Für welchen Wert von a ist ein solches Dreieck rechtwinklig ?

(7 Punkte)

Lösungen

1.1.1

Nachweis, dass K_1 keine Extrempunkte besitzt:

Es gilt: $f_1(x) = x^3 - 3 \cdot x^2 + 3{,}25x$

$f_1'(x) = 3x^2 - 6 \cdot x + 3{,}25$ und $f_1''(x) = 6x - 6$

Hinreichende Bedingung für Extrempunkte: $f_1'(x) = 0$ und $f_1''(x) \neq 0$

$f_1'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x + 3{,}25 = 0$

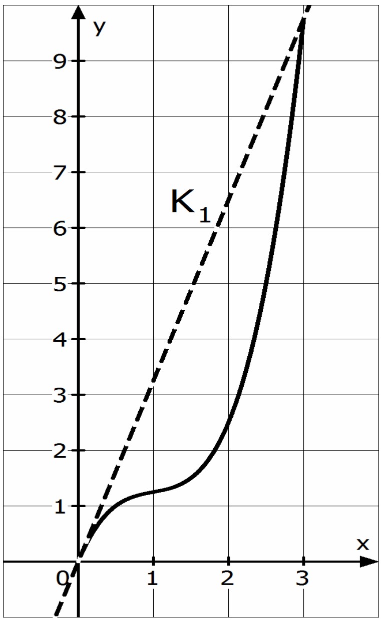
Die quadratische Gleichung ist nicht lösbar, da die Diskriminante der Mitternachtsformel $b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 3 \cdot 3{,}25 = -3$ negativ ist.

Das Schaubild K_1 besitzt daher keine waagrechten Tangenten und somit auch keine Extrempunkte.

Krümmungsverhalten:

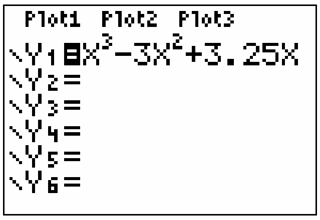
Es gilt $f_1''(x) = 6x - 6$
K_1 ist rechtsgekrümmt, wenn $6x - 6 < 0 \Rightarrow x < 1$
K_1 ist linksgekrümmt, wenn $6x - 6 > 0 \Rightarrow x > 1$

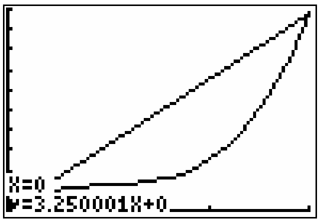
Zeichnung:
(inkl. der Tangente aus Aufgabe 1.1.2)



1.1.2

Berechnung der Tangentengleichung im Ursprung mit dem GTR:

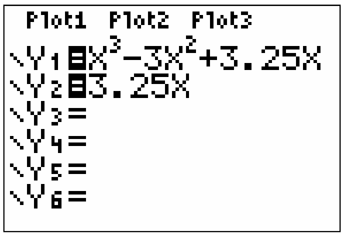


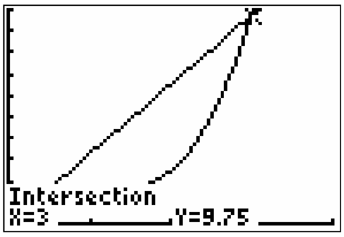


Gleichung der Tangente: $y = 3{,}25x$

Zeichnung: siehe Teilaufgabe 1.1.1

Schnittstellen der Tangente mit dem Schaubild K_1:





GTR: x = 0 und x = 3.

Fläche zwischen Tangente und K_1:

$$A = \int_0^{3,5} (3{,}25x - (x^3 - 3x^2 + 3{,}25x))dx = \int_0^3 (-x^3 + 3x^2)dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3 \right]_0^3 = -\frac{1}{4} \cdot 3^4 + 3^3 = \frac{27}{4}$$

1.1.3

Die erste Winkelhalbierende hat die Gleichung $g(x) = x$

Bedingung für die Berührung: $f_t(x) = g(x) \quad (1)$

$f_t'(x) = g'(x) \quad (2)$

Bedingung (1): $x^3 - 3t \cdot x^2 + (\frac{9}{4}t^2 + 1) \cdot x = x$

Bedingung (2): $3x^2 - 6t \cdot x + \frac{9}{4}t^2 + 1 = 1$

Aus (2) folgt: $3x^2 - 6t \cdot x + \frac{9}{4}t^2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{6t \pm \sqrt{36t^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2{,}25t^2}}{6} = \frac{6t \pm 3t}{6}$

Daraus folgt $x_1 = 1{,}5t$ und $x_2 = 0{,}5t$

Einsetzen von $x_1 = 1{,}5t$ in (1): $(1{,}5t)^3 - 3t \cdot (1{,}5t)^2 + (\frac{9}{4}t^2 + 1) \cdot 1{,}5t = 1{,}5t$

$3{,}375t^3 - 6{,}75t^3 + 3{,}375t^3 + 1{,}5t = 1{,}5t \Rightarrow 0 = 0$

Es ergibt sich eine wahre Aussage, daher liegt bei x = 1,5t eine Berührung für alle Werte von t vor, was zu zeigen war.

Einsetzen von $x_2 = 0,5t$ in (1): $(0,5t)^3 - 3t\cdot(0,5t)^2 + (\frac{9}{4}t^2+1)\cdot 0,5t = 1,5t$

$$0,125t^3 - 0,75t^3 + 1,125t^3 + 0,5t = 1,5t$$

Daraus folgt keine allgemeine wahre Aussage, da die Ausdrücke mit "t" nicht wegfallen.
Somit liegt bei x = 0,5t keine Berührung vor für alle t.

1.1.4

Steigung an der Stelle x = 1: $f_t'(1) = 3 - 6t + \frac{9}{4}t^2 + 1 = \frac{9}{4}t^2 - 6t + 4$

Anschaulich stellt die Funktion $m(t) = \frac{9}{4}t^2 - 6t + 4$ eine nach oben geöffnete Parabel dar.
Um nachzuweisen, dass $m(t) \geq 0$ ist, berechnet man den Scheitelpunkt (Tiefpunkt) der Parabel:

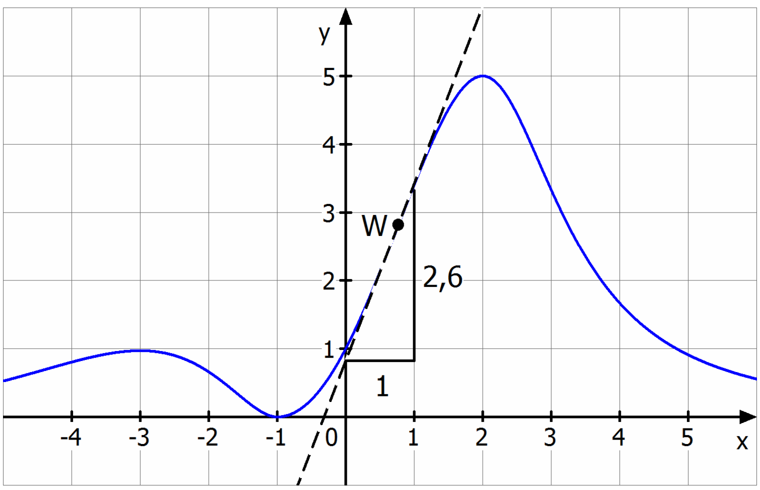
$$m'(t) = 0 \Rightarrow 4,5t - 6 = 0 \Rightarrow t = \frac{4}{3}$$

Berechnung des y-Wertes des Tiefpunktes: $m(\frac{4}{3}) = 0$

Da der tiefste Punkt der Parabel den y-Wert 0 besitzt, muss $m(t) \geq 0$ gelten.

1.2

1.) Die Aussage ist wahr. Zeichnet man in das Schaubild von h ungefähr an der Stelle x = 0,8 die Wendetangente ein, besitzt diese eine Steigung von ungefähr m = 2,6 > 1.



2.) Die Aussage ist wahr. Da $h'(1) > 0$ ist und $h'(3) < 0$ ist, gilt $h'(1)\cdot h'(3) < 0$.

3.) Die Aussage ist wahr. Die Fläche zwischen x = 1 und x = 3 unterhalb des Schaubildes von h ist kleiner als 10, was man durch Abzählen der Kästchen feststellen kann.

Andere Begründung: $\int_1^3 h(x)dx < \int_1^3 5dx = 10$

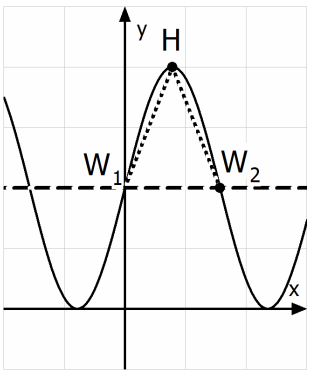
4.) Die Aussage ist wahr. Da das Schaubild von h im Intervall [0;4] oberhalb der x-Achse verläuft, ist jede Stammfunktion von h in diesem Intervall monoton steigend.

1.3.1

Es gilt $g_2(x) = 2 \cdot \sin(2x) + 2$
Das Schaubild C_2 entsteht aus y = sin(x) durch folgende Schritte:
1. Streckung mit dem Faktor 2 in y-Richtung $(2\sin(x))$
2. Stauchung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in x-Richtung $(2\sin(2x))$
3. Verschiebung um 2 Einheiten nach oben in y-Richtung $(2\sin(2x) + 2)$

1.3.2

Skizze:



Die Periode von C_a ist $p = \frac{2\pi}{a}$.

Koordinate eines Hochpunktes: $H(\frac{2\pi}{4a} / 2a)$ bzw. $H(\frac{\pi}{2a} / 2a)$
(der x-Wert von H ist eine Viertel Periode von der y-Achse entfernt)

Koordinaten der Wendepunkte: $W_1(0/a)$ und $W_2(\frac{\pi}{a}/a)$

Flächeninhalt des Dreiecks: $A = \frac{1}{2} \cdot \overline{W_1W_2} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{a} \cdot a = \frac{1}{2}\pi$ und dies ist unabhängig von a.

Da das Dreieck gleichschenklig ist, kann nur im Punkt H ein rechter Winkel entstehen.
Hierzu muss bei W_1 ein 45°-Winkel existieren, das heißt, die Steigung der Gerade durch W_1 und H muss m = 1 sein.

$$m_{W_1H} = \frac{y_H - y_{W_1}}{x_H - x_{W_1}} = \frac{2a - a}{\frac{\pi}{2a} - 0} = a \cdot \frac{2a}{\pi} = \frac{2a^2}{\pi}$$

Bedingung: $\frac{2a^2}{\pi} = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow a = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Da a > 0 sein soll, ist nur für $a = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ das Dreieck rechtwinklig.