Abiturprüfung Mathematik 2009 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien ohne TG – Anwendungsorientierte Aufgabe
Teil 3, Aufgabe 2

2
In Cuxhaven wurden am 16.10.2007 vom Bundesamt für Seeschifffahrt und Hydrographie folgende Wasserstände gemessen.

t	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
h	552	650	666	561	450	385	533	647	675	588	474	403

h ist der Wasserstand (in cm über Pegelnull) zur Uhrzeit t. Dabei entspricht t = 0 der Uhrzeit 0:00 Uhr um 16.10.2007.

2.1
Stellen Sie den Wasserstand in Abhängigkeit von der Zeit grafisch dar.
(3 Punkte)

2.2
Der Zusammenhang zwischen Wasserstand und Zeit soll durch eine periodische Funktion beschrieben werden.
Bestimmen Sie einen passenden Funktionsterm.
(2 Punkte)

2.3
Verwenden Sie die in Aufgabenteil 2.2 bestimmte Funktion.

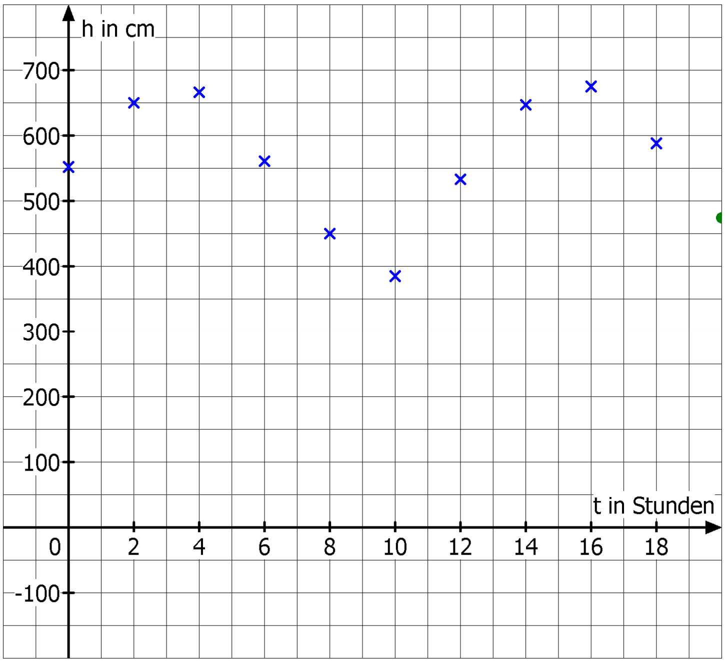
2.3.1
Um wie viel weicht die Periode von 12 Stunden ab ?
Um wie viel Uhr ist der Wasserstand am 16.10.2007 zum ersten Mal höchsten ?
Wie lange überschreitet der Wasserstand am 16.10.2007 die 6-m-Marke ?
(5 Punkte)

2.3.2
Um wie viel cm pro Minute steigt das Wasser höchstens ?
Um wie viel Uhr war am 20.10.2007 mit dem ersten höchsten Wasserstand zu rechnen ? (5 Punkte)

(15 Punkte)

Abiturprüfung Mathematik 2009 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien ohne TG – Anwendungsorientierte Aufgabe
Gruppe III, Lösung Aufgabe 2

2.1



2.2

Der passende Funktionsterm kann mit Hilfe der Regressionsrechnung ermittelt werden.

Die Anpassung erfolgt mit Hilfe des Befehls „SinReg“ mit dem GTR.

Als Funktionsgleichung ergibt sich $h(t) = 137{,}062 \cdot \sin(0{,}503t + 0{,}0128) + 544{,}813$

2.3.1

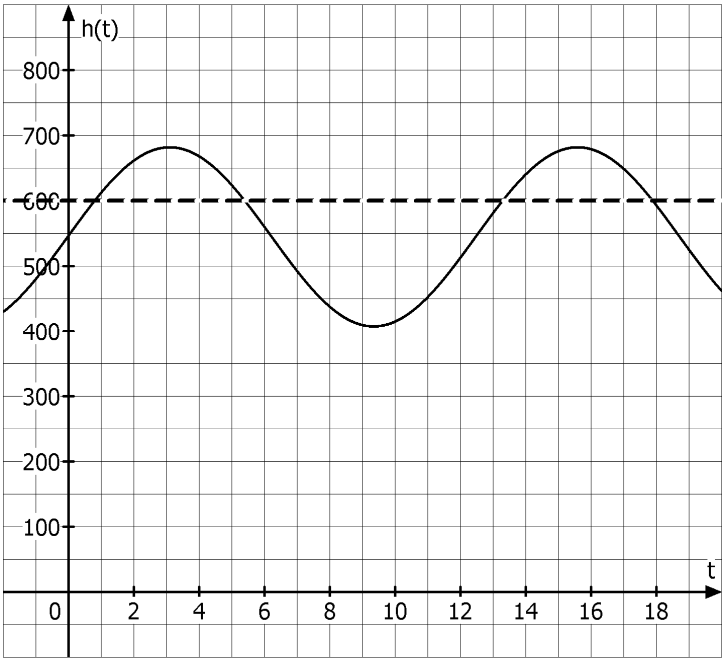
Die Periode des Schaubildes von h(t) beträgt $p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{0{,}503} = 12{,}49$ Stunden.

Die Abweichung beträgt ungefähr 0,5 Stunden.

Der erste Höchstwasserstand ergibt sich als erster Hochpunkt des Schaubildes.
Mit dem GTR folgt, dass für t = 3,097 der Höchstwasserstand 681,9 cm beträgt.

Der Zeitpunkt t = 3,097 entspricht ungefähr der Uhrzeit 3.06 Uhr.

Um zu ermitteln, wie lange die 6-m-Marke überschritten wird, wird das Schaubild von h(t) mit der waagrechten Geraden y = 600 geschnitten.



Als Schnittstellen ergeben sich:
$t_1 = 0{,}798$ und $t_2 = 5{,}396$ und $t_3 = 13{,}29$ und $t_4 = 17{,}89$.

Die 6-m-Marke wird laut Schaubild überschritten in den Zeiträumen $t_2 - t_1 = 4{,}6$ und $t_4 - t_3 = 4{,}6$.
Insgesamt wird die 6-m-Marke 9,2 Stunden, also 9 Stunden und 12 Minuten überschritten.

2.3.2
Der maximale Anstieg des Wassers (also der Punkt des Schaubildes mit maximaler Steigung) entspricht dem Wendepunkt des Schaubildes.

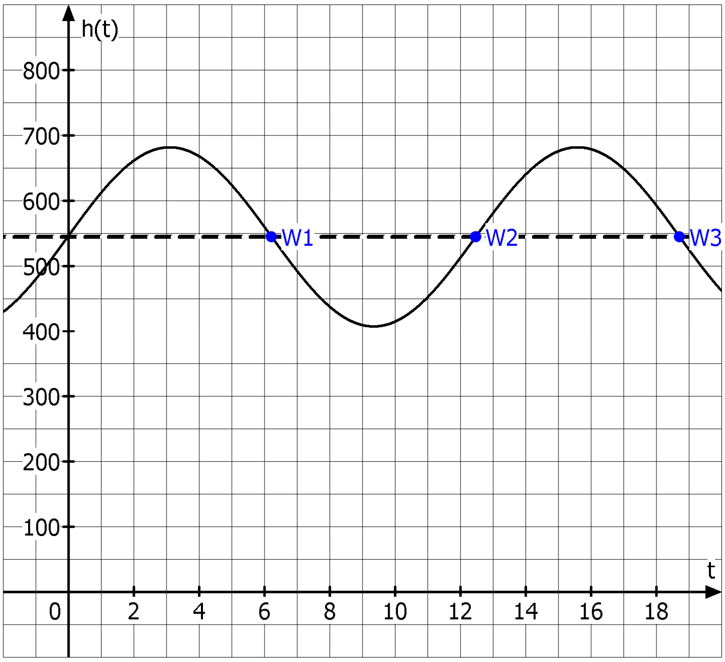
Die Wendepunkte der Sinusfunktion $y = \sin(x)$ entsprechen den Nullstellen des Schaubildes.
Das Schaubild von h(t) ist um 544,813 nach oben verschoben.

Somit besitzen die Wendepunkte von h(t) einen y-Wert von 544,813.

Die Schnittpunkte von h(t) mit der waagrechten Geraden y = 544,813 sind:
W1(6,22/544,8) und W2(12,47/544,8) und W3(18,71/544,8).

Anhand des Schaubildes ergibt sich, dass die Tangentensteigung an das Schaubild von h bei W1 und W3 negativ ist, das heißt, zu diesen Zeitpunkten fällt das Wasser.

Bei t = 12,47 steigt jedoch das Wasser, also ist dies die gesuchte Lösung.



Die maximale Steigung selbst ergibt sich mit $h'(t) = 137{,}062 \cdot \cos(0{,}503t + 0{,}0128) \cdot 0{,}503$

durch $h'(12{,}47) = 68{,}94 \ \frac{\text{cm}}{\text{Stunde}}$.

Der Tag 20.10.2007 (also 4 Tage später) entspricht dem Zeitintervall $96 \le t \le 120$.
Der erste Hochpunkt in diesem Intervall liegt bei t = 103,03 mit h(103,03)=681,875 cm.

Der Zeitpunkt t=103,03 entspricht am 20.10.2007 der Uhrzeit 7 Uhr.