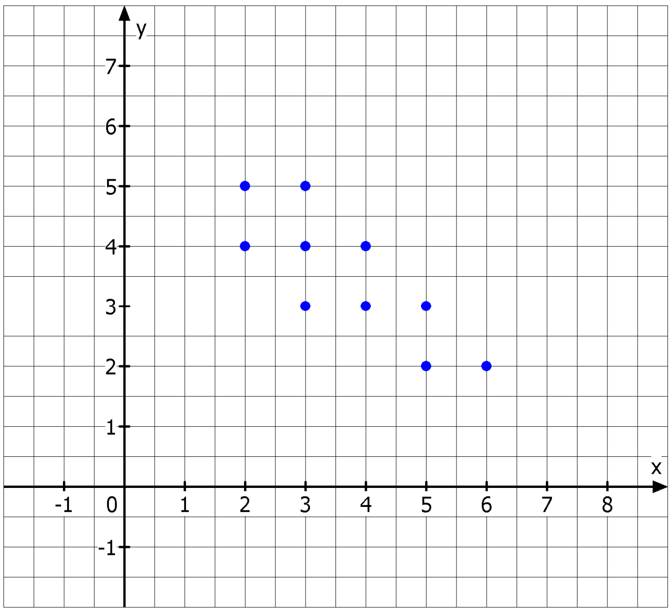
Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2009 Teil 4, Lineare Optimierung, Aufgabe 2
Baden-Württemberg

2.1
Die Abbildung zeigt die Lösungsmenge einer Optimierungsaufgabe.



Stellen Sie mittels linearer Ungleichungen geeignete Restriktionen auf.

(4 Punkte)

2.2
In einem Betrieb werden die Produkte P_1 und P_2 auf den Maschinen A, B und C gefertigt.
Die Fertigungszeit pro Stück in Stunden und die maximalen Laufzeiten der Maschinen pro Woche in Stunden sind der nachfolgenden Tabelle zu entnehmen.

	Fertigungszeit P_1	Fertigungszeit P_2	Max. Laufzeit
Maschine A	2	1	120
Maschine B	1	1	70
Maschine C	1	3	150

Der Reingewinn für P_1 beträgt 10 Euro pro Stück, für P_2 15 Euro pro Stück.

2.2.1
Bestimmen Sie den maximalen Gewinn, wenn alle hergestellten Produkte verkauft werden.
Begründen Sie, dass es nicht möglich ist, alle Maschinen voll auszulasten.

(7 Punkte)

2.2.2
Gibt es Produktionsmengen, bei welchen die Maschinen A und C gleiche Laufzeiten haben und die Maschine B vierzig Stunden weniger läuft als Maschine A ?

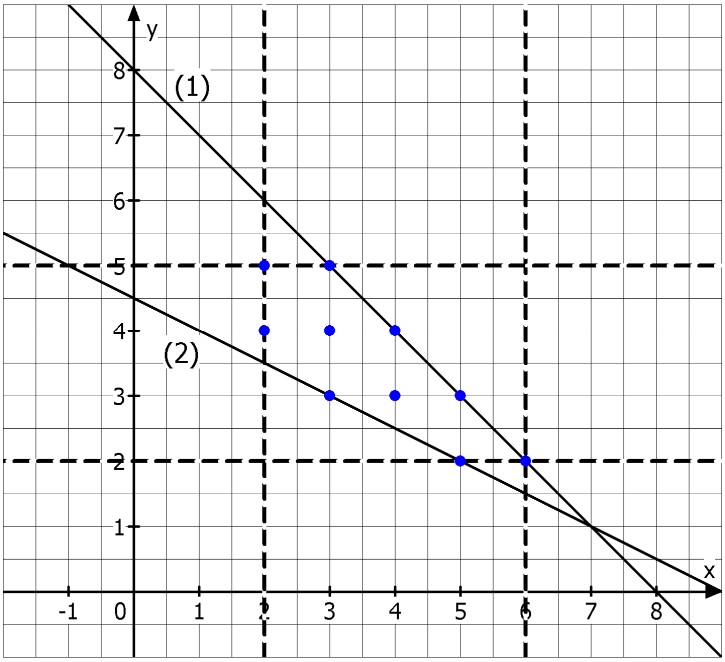
(4 Punkte)

----

15 Punkte

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2009 Teil 4, Lineare Optimierung, Lösung zu Aufgabe 2
Baden-Württemberg

2.1



Die Gleichungen der Geraden (1) und (2) lauten:

(1): $y = -x + 8$
(2): $y = -0{,}5x + 4{,}5$

Damit lauten die Ungleichungen:
$2 \le y \le 5$ und $2 \le x \le 6$
$y \ge -0{,}5x + 4{,}5$
$y \le -x + 8$
Da die Restriktion nur auf die Punkte bezogen ist und nicht eine komplette Fläche dargestellt ist, muss außerdem $x, y \in \mathbb{N}$ gelten.

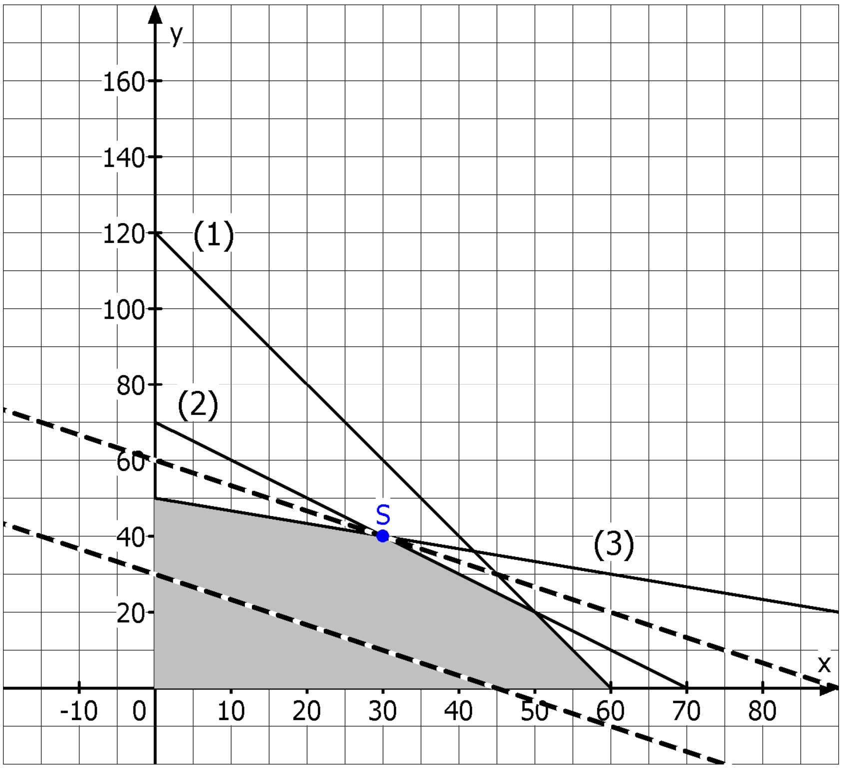
2.2.1

Es werden x Stück von Produkt P_1 und y Stück von Produkt P_2 hergegestellt.

Folgende Ungleichungen ergeben sich für die einzelnen Maschinen:
Maschine A: $2x + y \le 120 \Leftrightarrow y \le 120 - 2x$ (1)
Maschine B: $x + y \le 70 \Leftrightarrow y \le 70 - x$ (2)
Maschine C: $x + 3y \le 150 \Leftrightarrow y \le 50 - \frac{1}{3}x$ (3)

Zu maximieren ist der Gewinn $G = 10x + 15y \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{G}{15}$ (4)

Die Ungleichungen werden nun in dem Koordinatensystem als Planungsvieleck veranschaulicht:



Die Gerade (4) ist als gestrichelte Gerade eingezeichnet und diese wird möglichst weit parallel verschoben unter der Bedingung, dass die Gerade noch einen gemeinsamen Punkt mit dem Planungsvieleck besitzt.

Die gestrichelte Gerade enthält den Punkt S als Schnittpunkt der Geraden (2) $y = 70 - x$ und (3) $y = 50 - \frac{1}{3}x$. Dieser lautet S(30/40).

Der Gewinn wird somit maximal wenn x = 30 und y = 40 ist.
Der maximale Gewinn beträgt $G = 10 \cdot 30 + 15 \cdot 40 = 900$ Euro.

Da die Gerade (1) nicht den Schnittpunkt S enthält, ist die Maschine (1) nicht ausgelastet. Da es generell keinen gemeinsamen Schnittpunkt aller drei Geraden gibt, ist es grundsätzlich nicht möglich, alle 3 Maschinen gleichzeitig auszulasten.

2.2.2

Die Laufzeit der Maschine A sei b Stunden.
Die Laufzeit der Maschine B sei b – 40 Stunden.
Die Laufzeit der Maschine C sei b Stunden.

Damit gilt folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrcl} 2x & +y & = & a \\ x & +y & = & a-40 \\ x & +3y & = & a \end{array}$$

Umgeformt ergibt sich daraus:

$$\begin{array}{rrrcr} 2x & +y & -a & = & 0 \\ x & +y & -a & = & -40 \\ x & +3y & -a & = & 0 \end{array}$$

Das Gleichungssystem besitzt die Lösung x = 40, y = 20, a = 100.

Der der Punkt (40/20) innerhalb des Planungsvielecks liegt, ist dies eine zulässige Lösung.