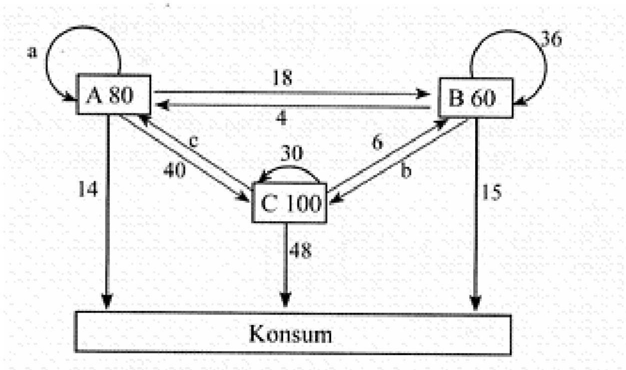
Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2005 Teil 2, Wirtschaftliche Anwendungen, Aufgabe B
Baden-Württemberg

Ein Betrieb besteht aus den drei Zweigwerken A, B und C.
Diese Betriebe sind nach dem Leontief-Modell miteinander verflochten.
Die Lieferung untereinander, die Marktabgabe sowie die Gesamtproduktion sind in Geldeinheiten (GE) angegeben.

Das Diagramm zeigt die Verflechtung.



a) Berechne die Inputmatrix.
Wie viel muss jedes Werk produzieren, damit Werk A Waren im Wert von 10 GE, Werk B Waren im Wert von 25 GE und Werk C Waren im Wert von 40 GE an den Konsum abgeben können ? (7 Punkte)

b) Zweigwerk A erhöht seine Produktion auf Waren im Wert von 120 GE und die Abgabe an den Konsum auf Waren im Wert von 32 GE.
Zweigwerk C liefert Waren im Wert von 64 GE an den Konsum. Wie groß ist die Abgabe von Werk B an den Konsum ?
Um wie viel Prozent muss die Produktion der Werke B und C im Vergleich zur ursprünglichen Produktion verändert werden ? (7 Punkte)

c) In einer Planrechnung wird von folgendem Produktionsvektor ausgegangen:
$\vec{x} = (100t \quad 80t \quad 120)^T$ mit $t > 0$
Bestimme den Konsumvektor in Abhängigkeit von t.
Die Marktabgabe des Werkes C beträgt 56 GE.
Wie groß sind dann die Marktabgaben der beiden anderen Werke ? (4 Punkte)

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2005 Teil 2, Wirtschaftliche Anwendungen, Lösungen Aufgabe B
Baden-Württemberg

a)

	A	B	C	Markt	Produktion
A	a	18	40	14	80
B	4	36	b	15	60
C	c	6	30	48	100

Daraus ergibt sich: a = 80 – 14 – 40 – 18 = 8
b = 60 – 15 – 36 – 4 = 5
c = 100 – 48 – 30 – 6 = 16

Inputmatrix A = $\begin{pmatrix} \frac{8}{80} & \frac{18}{60} & \frac{40}{100} \\ \frac{4}{80} & \frac{36}{60} & \frac{5}{100} \\ \frac{16}{80} & \frac{6}{60} & \frac{30}{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}05 & 0{,}6 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}$

Gegeben ist der Marktabgabevektor $\vec{y} = (10 \quad 25 \quad 40)^T$

$$(E-A)\cdot\vec{x} = \vec{y} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0{,}9 & -0{,}3 & -0{,}4 \\ -0{,}05 & 0{,}4 & -0{,}05 \\ -0{,}2 & -0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix}\cdot\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 25 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Mit GTR ergibt sich als Lösung: $\vec{x} = (80 \quad 84 \quad 92)^T$
Das heißt Werk A muss Waren im Wert von 80 GE, Werk B im Wert von 84 GE und Werk C im Wert von 92 GE produzieren.

b) Neuer Marktabgabevektor: $\vec{y} = \begin{pmatrix} 32 \\ y_2 \\ 64 \end{pmatrix}$; neuer Produktionsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 120 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$(E-A)\cdot\vec{x} = \vec{y} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0{,}9 & -0{,}3 & -0{,}4 \\ -0{,}05 & 0{,}4 & -0{,}05 \\ -0{,}2 & -0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 120 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ y_2 \\ 64 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 108 - 0{,}3x_2 - 0{,}4x_3 &= 32 \\ -6 + 0{,}4x_2 - 0{,}05x_3 &= y_2 \\ -24 - 0{,}1x_2 + 0{,}7x_3 &= 64 \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} -0{,}3x_2 - 0{,}4x_3 &= -76 \\ 0{,}4x_2 - 0{,}05x_3 - y_2 &= 6 \\ -0{,}1x_2 + 0{,}7x_3 &= 88 \end{aligned}$$

Lösung mit GTR: $x_2 = 72$, $x_3 = 136$, $y_2 = 16$

Werk B gibt Waren im Wert von 16 GE an den Konsum ab.

Werk B erhöht die Produktion von 60 GE auf 72 GE, also um 20%.
Werk C erhöht die Produktion von 100 GE auf 136 GE, also um 36%.

c) $(E-A)\cdot\vec{x}=\vec{y} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0{,}9 & -0{,}3 & -0{,}4 \\ -0{,}05 & 0{,}4 & -0{,}05 \\ -0{,}2 & -0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 100t \\ 80t \\ 120 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 66t-48 \\ 27t-6 \\ -28t+84 \end{pmatrix}$

Marktabgabe von C: $56=-28t+84 \Rightarrow t=1$
Marktabgabe von A: 66 – 48 = 18 GE
Marktabgabe von B: 27 – 6 = 21 GE.