Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG, BTG)
Hauptprüfung 2012 Teil 4, Lineare Optimierung, Aufgabe 1
Baden-Württemberg

1.1
Die Schülerbibliothek wird renoviert und bekommt neue Regale.
Es wird Platz für mindestens 4400 Bücher mittlerer Größe und für mindestens 2600 großformatige Bücher benötigt.
Ein Lieferant A bietet ein Regal zu einem Preis von 400 Euro an, in das man 110 Bücher mittlerer Größe und 100 großformatige Bücher stellen kann.
Ein Lieferant B bietet zum Preis von 600 Euro ein Regal an, das Platz für 220 Bücher mittlerer Größe und für 100 großformatige Bücher bietet.

Der örtliche Wirtschaftsförderplan schreibt der Schule vor, dass jeder Lieferant Regale im Wert von höchstens 9600 Euro liefern darf.

1.1.1 (6 Punkte)
Ermitteln Sie grafisch, wie viele Regale bei Lieferant A und wie viele Regale bei Lieferant B gekauft werden können, wenn die Kosten minimal sein sollen.
Geben Sie diese Kosten an.

1.1.2 (3 Punkte)
Der Lieferant A senkt den Preis für ein Regal auf 300 Euro.
Bestimmen Sie die Anzahl der Regale, die die Schule bei Lieferant A maximal bestellen darf, wenn die Kosten minimal sein sollen.
Wie hoch sind jetzt die minimalen Kosten ?

1.2 (6 Punkte)
Ein lineares Maximierungsproblem führt auf folgendes Simplextableau:

x	y	z	u	v	w	
1	1	0	1	0	–2	20
0	0	0	–1	1	3	70
0	0,2	1	0	0	–2	5
0	0	0	–3	0	–1	E – 78000

Es gilt $x, y, z, u, v, w \geq 0$.
Erläutern Sie, warum das Optimierungsproblem mehrere Lösungen besitzt.
Bestimmen Sie alle ganzzahligen Werte von z, für die es optimale Lösungen gibt.

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG, BTG)
Hauptprüfung 2012 Teil 4, Lineare Optimierung, Lösung zu Aufgabe 1
Baden-Württemberg

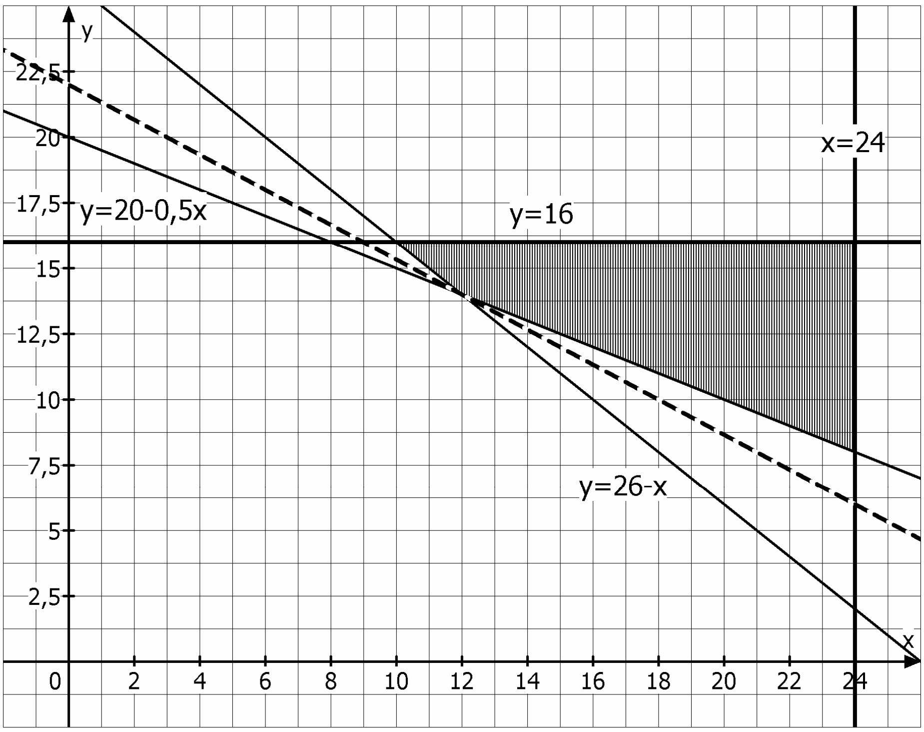
1.1.1

Folgende Variablen werden definiert:

x = Anzahl der bestellten Regale bei Lieferant A
y = Anzahl der bestellten Regale bei Lieferant B

Folgende Ungleichungen müssen erfüllt sein:
Mindestens 4400 Bücher mittlerer Größe: $110x + 220y \geq 4400 \quad \Rightarrow y \geq 20 - 0{,}5x$ (1)
Mindestens 2600 großformatige Bücher: $100x + 100y \geq 2600 \quad \Rightarrow y \geq 26 - x$ (2)
Maximal 9600 Euro für Lieferant A: $400x \leq 9600 \quad \Rightarrow x \leq 24$ (3)
Maximal 9600 Euro für Lieferant B: $600y \leq 9600 \quad \Rightarrow y \leq 16$ (4)

Zu minimieren ist die Kostenfunktion $K = 400x + 600y \quad \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{K}{600}$



Die gefärbte Fläche stellt die Menge aller Punkte dar, die sich aus dem Ungleichungssystem (1) bis (4) ergeben.

Die gestrichelte Gerade stellt die Kostengerade mit der Steigung $-\frac{2}{3}$ dar, die mit der gefärbten Fläche einen Punkt gemeinsam hat und einen möglichst kleinen y-Achsenabschnitt besitzt.

Der Schnittpunkt der Geraden (1) und (2) ist S(12/14).

Durch diesen Punkt verläuft auch die gestrichelte Gerade.

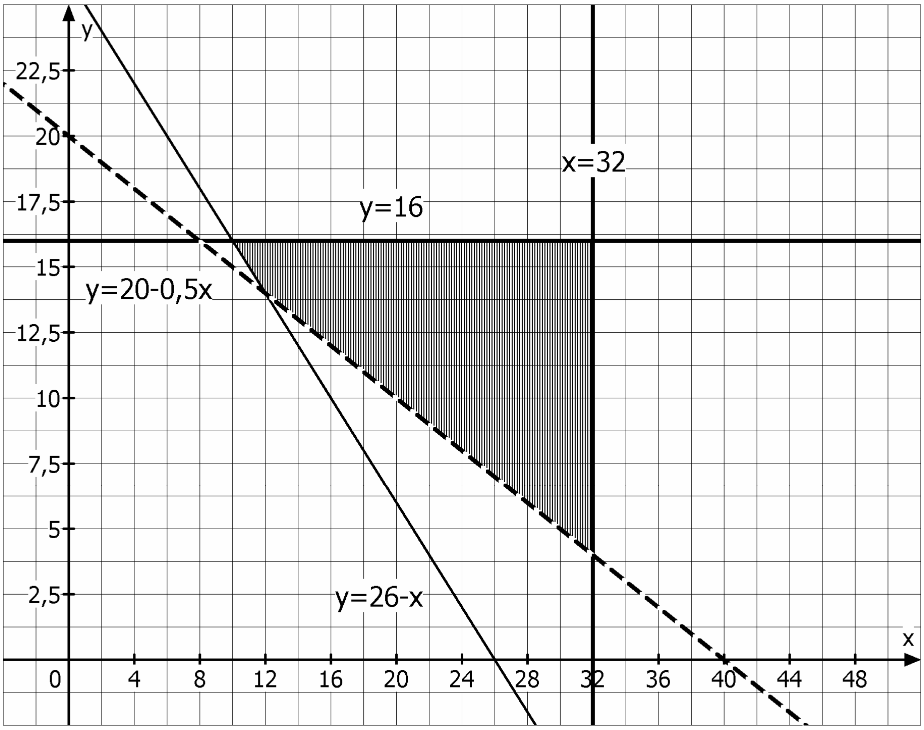
Einsetzen des Punktes S in die Kostengerade:

$14 = -\frac{2}{3} \cdot 12 + \frac{K}{600} \Rightarrow K = 13200$ Euro sind die minimalen Kosten.

1.1.2
Aufgrund der Preissenkung des Lieferants A sehen die Bedingungen nun so aus:

Mindestens 4400 Bücher mittlerer Größe: $110x + 220y \geq 4400 \quad \Rightarrow y \geq 20 - 0{,}5x$ (1)
Mindestens 2600 großformatige Bücher: $100x + 100y \geq 2600 \quad \Rightarrow y \geq 26 - x$ (2)
Maximal 9600 Euro für Lieferant A: $300x \leq 9600 \quad \Rightarrow x \leq 32$ (3)
Maximal 9600 Euro für Lieferant B: $600y \leq 9600 \quad \Rightarrow y \leq 16$ (4)

Zu minimieren ist die Kostenfunktion $K = 300x + 600y \quad \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{K}{600}$



Die gefärbte Fläche stellt die Menge aller Punkte dar, die sich aus dem Ungleichungssystem (1) bis (4) ergeben.

Die gestrichelte Gerade stellt die Kostengerade mit der Steigung $-\frac{1}{2}$ dar, die mit der gefärbten Fläche einen Punkt gemeinsam hat und einen möglichst kleinen y-Achsenabschnitt besitzt.
Die gestrichelte Gerade liegt gleichzeitig auf der Begrenzungsgerade (1) der Fläche.

Daher gibt es mehrere Lösungen für x und y, die zu minimalen Kosten führen.
Beispiel:
1.) x = 12 und y = 14
2.) x = 16 und y = 12
3.) x = 18 und y = 11 …

Einsetzen des Punktes S(12/14) (man könnte auch Q(16/12) einsetzen) in die Kostengerade:
$14 = -\frac{1}{2}\cdot 12 + \frac{K}{600} \Rightarrow K = 12000$ Euro sind die minimalen Kosten.

1.2

Das Simplextableau ist bereits optimal, das heißt ein weiterer Simplexschritt ist nicht erforderlich und die Tabelle ist bereits im optimierten Zustand.
Das erkennt man daran, dass in der letzten Zeile keine positiven Zahlen mehr vorliegen.

Auswertung:
Aus der 4.Zeile folgt: E - 78.000 = -3u - w bzw. E = 78.000 - 3u - w
Für u = w = 0 erhält man den maximalen Wert E = 78.000.

Dies ist jedoch nicht die einzige Lösung, die auf das Optimum von E = 78000 führt.

Die ersten drei Zeilen führen zu diesem Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lllll} x & +y & & = & 20 \\ & & v & = & 70 \\ & 0{,}2y & +z & = & 5 \end{array}$$

Für x, y und z sind nur zwei Bedingungen vorhanden, also kann man eine Variable frei wählen, woraus man erkennt, dass die Lösung nicht eindeutig ist.

Dieses Gleichungssystem besitzt unendlich viele Lösungen (3 Gleichungen, 4 Variable).
Nun sollen alle Lösungen gefunden werden, so dass alle Variablen ≥ 0 und z ganzzahlig ist.

1.Fall: z = 0 ; dann folgt y = 25 und x = -5 ; damit ist dies keine zulässige Lösung
2.Fall: z = 1; dann folgt y = 20 und x = 0 ; zulässige Lösung
3.Fall: z = 2; dann folgt y = 15 und x = 5; zulässige Lösung
4.Fall: z = 3; dann folgt y = 10 und x = 10; zulässige Lösung
5.Fall: z = 4; dann folgt y = 5 und x = 15; zulässige Lösung
6.Fall: z = 5; dann folgt y = 0 und x = 20; zulässige Lösung

Daraus folgt, dass für alle ganzzahligen Werte von z zwischen 1 und 5 optimale Lösungen (also E = 78.000) existieren.