Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2005 Gruppe II, Vektorgeometrie, Aufgabe A
Baden-Württemberg

a) Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$(t-2)\cdot x_2 = t^2 - 4$$
$$(t^2 - 3t + 2)\cdot x_3 = 4t^2 - 12t + 8$$

Für welchen Wert von t hat dieses lineare Gleichungssystem
- unendlich viele Lösungen
- genau eine Lösung ? (3 Punkte)

Bestimme den Lösungsvektor für t = 1. (2 Punkte)

Im Anschauungsraum sind die Punkte A(2/1/0), B(1/1/3) und $C_t(0/t-2/6)$ mit $t \in \mathbb{R}$ gegeben.

b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden durch A und B mit der x_2x_3-Ebene. (3 Punkte)

c) Die Punkte A, B und C_4 bilden ein Dreieck. Bestimmen Sie einen vierten Punkt D so, dass das Viereck ABC_4D ein Parallelogramm ist. (3 Punkte)

d) Für welche Werte von t legen die Punkte A, B und C_t eine Ebene fest ? (4 Punkte)

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2005 Gruppe II, Vektorgeometrie, Lösung zu Aufgabe A
Baden-Württemberg

a) Zunächst wird die 3.Zeile des Gleichungssystems betrachtet.

Für den Fall, dass $t^2 - 3t + 2 = 0$ ist, gibt es keine eindeutige Lösung mehr.
Die Gleichung ist erfüllt für t = 1 oder t = 2 (GTR oder Mitternachtsformel).

Für t = 1, für dessen Wert auch der Lösungsvektor bestimmt werden soll gilt:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_2 &= -3 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Die letzte Zeile ist eine wahre Aussage und kann ignoriert werden.
Aus der 2.Zeile folgt $x_2 = 3$.
Da in der 1.Zeile nun zwei Variablen vorkommen, wird eine Variable durch den Parameter s ersetzt: $x_3 = s$ mit $s \in \mathbb{R}$.
Daraus folgt $x_1 = 1 - 3 - s = -2 - s$.

Lösungsvektor für t = 1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2-s \\ 3 \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$.

Für t = 1 existieren damit unendlich viele Lösungen.

Für t = 2 gilt:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Auch dieses LGS besitzt unendlich viele Lösungen, allerdings müssen hier, da zwei wahre Aussagen 0 = 0 vorkommen, zwei Parameter r und s einführen.

Für $t \neq 1$ und $t \neq 2$ besitzt das LGS genau eine Lösung.

b) Geradengleichung durch A und B: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Für den Schnittpunkt mit der x_2x_3 – Ebene gilt $x_1 = 0$.

Daraus folgt $0 = 2 - r \Rightarrow r = 2$
Einsetzen von r = 2 in die Geradengleichung ergibt S(0/1/6).

c) Der Punkt D habe die Koordinaten $D(d_1/d_2/d_3)$. Für das Parallelogramm gilt:
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC_4}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-d_1 \\ 2-d_2 \\ 6-d_3 \end{pmatrix}$$ und daraus folgt D(1/2/3).

d) Aufstellen einer Ebenengleichung in Parameterform:

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ t-3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Es handelt sich dann um eine tatsächliche Ebenengleichung, wenn die Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ t-3 \\ 6 \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind, d.h. wenn sie keine Vielfachen zueinander sind.

Für welche t-Werte sind die Vektoren Vielfache ?

$$k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ t-3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Aus der 1. und 3.Zeile folgt k = 2, dann ergibt sich aus der 2.Zeile t = 3.

Fazit: Für t = 3 legen die Punkte keine Ebene fest, für alle anderen Werte für t legen sie eine Ebene fest.