Abiturprüfung Mathematik 2009 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien ohne TG – Anwendungsorientierte Aufgabe
Teil 3, Aufgabe 3

3

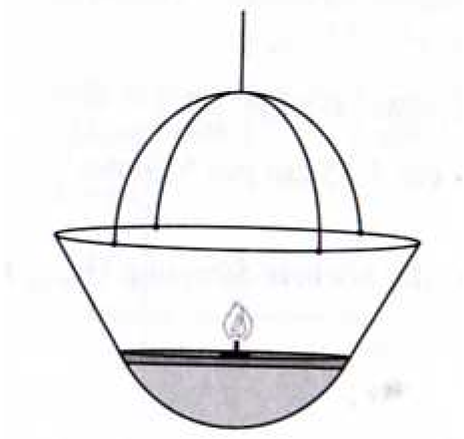


Abbildung 1

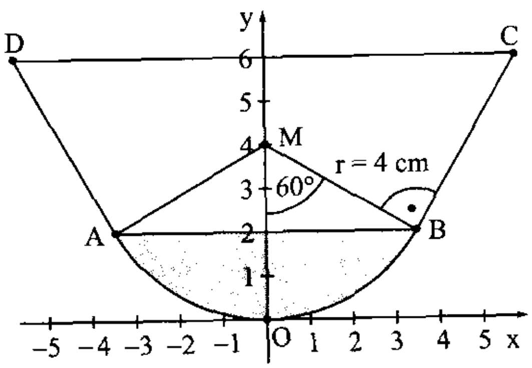


Abbildung 2

Die Abbildung 1 zeigt eine Glasschalenlampe mit Schwimmdocht. Bei dieser Lampenart wird auf das Öl ein schwimmfähiger Docht gesetzt.
Zur Kühlung wird das Öl mit Wasser unterschichtet.
Die Abbildung 2 zeigt den Längsschnitt der rotationssymmetrischen Glasschale.
Der Längsschnitt besteht aus einem Kreisbogen AOB mit dem Mittelpunkt M, an den sich in A und B die Strecken AD und BC tangential anschließen.
Eine Längeneinheit entspricht 1 cm.

3.1
Zeigen Sie: Die tangential in B anschließende Gerade hat die Gleichung
$y = \sqrt{3} \cdot x - 4$. (4 Punkte)

3.2
Die leere Schale wird bis zur Höhe des Punktes B mit Wasser gefüllt.
Wie viel Wasser befindet sich in der Schale ? (3 Punkte)

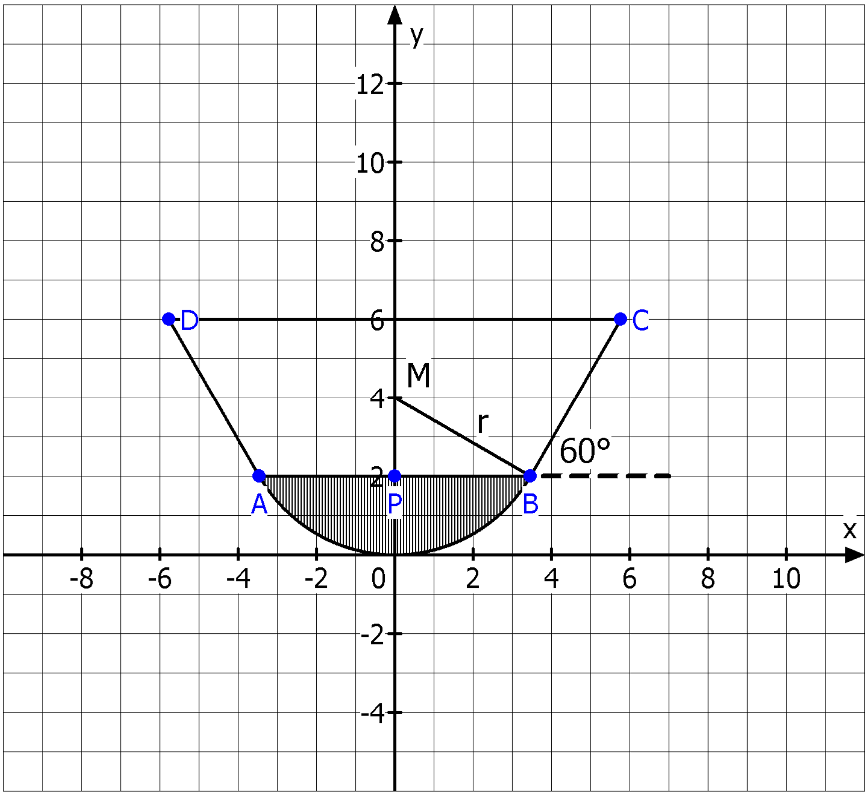
3.3
Nun übergießt man das Wasser mit Pflanzenöl, bis die Dicke der Ölschicht 0,5 cm beträgt. Wie viel Öl wird hierzu benötigt ? (3 Punkte)

3.4
Um das Licht im Glas noch besser zur Geltung zu bringen, gibt man noch 50 ml Wasser hinzu. Um wie viel cm wird das Schwimmlicht angehoben ? (5 Punkte)

----
15 Punkte

Abiturprüfung Mathematik 2009 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien ohne TG – Anwendungsorientierte Aufgabe
Gruppe III, Lösung Aufgabe 3

3.1



Gesucht ist die Tangentengleichung im Punkt B.
Zunächst müssen die Koordinaten von B ermittelt werden.

Hierzu wird die Strecke $\overline{PB}$ im Dreieck PBM mit dem Satz des Pythagoras ermittelt:
$\overline{PB} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12}$

Daher besitzt B die Koordinaten $B(\sqrt{12}/2)$.

Die Tangente besitzt einen Steigungswinkel (das heißt einen Winkel zur x-Achse bzw. zu einer parallelen Waagrechten) von 60°.

Es gilt $m_{Tangente} = \tan 60° = \sqrt{3}$

Einsetzen von P und der Steigung in die Punkt-Steigungsform:
$y - 2 = \sqrt{3} \cdot (x - \sqrt{12}) \Rightarrow y = \sqrt{3} \cdot x - \sqrt{36} + 2 \Rightarrow y = \sqrt{3} \cdot x - 4$ was zu zeigen war.

3.2
Gesucht ist das Volumen des Wassers, das sich in einem Kugelabschnitt (auch Kugelsegment genannt) befindet.

Die Volumenformel für einen Kugelabschnitt gemäß Formelsammlung lautet
$$V_{\text{Kugelabschnitt}} = \frac{1}{3}\pi \cdot h^2 \cdot (3r - h) = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot (3 \cdot 4 - 2) = \frac{40}{3}\pi$$

In der Kugelschale befinden sich ca. 41,89 cm³ Wasser.

3.3
Die Ölschicht, die 0,5cm dick werden soll, entspricht einem Kegelstumpf.

Dieser Körper kann als Rotationskörper aufgefasst werden. Hierbei rotiert die Tangente $y = \sqrt{3} \cdot x - 4$ um die y-Achse.

Das Volumen des entstehenden Rotationskörpers beträgt $V = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2 dy$.

Für die Nutzung der Volumenformel muss die Tangentengleichung nach x aufgelöst werden:
$$y = \sqrt{3} \cdot x - 4 \Leftrightarrow x = \frac{y+4}{\sqrt{3}}$$

$$V = \pi \cdot \int_2^{2,5} \left(\frac{y+4}{\sqrt{3}}\right)^2 dy = \frac{\pi}{3} \cdot \int_2^{2,5} (y^2 + 8y + 16)dy = \frac{\pi}{3} \cdot \left[\frac{1}{3}y^3 + 4y^2 + 16y\right]_2^{2,5} = 20{,}46 \text{ cm}^3$$

3.4
Nun ist im Gegensatz zu 3.3 das Volumen mit V = 50 cm³ vorgegeben und die obere Grenze des Integrals ist unbekannt:
$$50 = \pi \cdot \int_{2,5}^{c} \left(\frac{y+4}{\sqrt{3}}\right)^2 dy = \frac{\pi}{3} \cdot \int_{2,5}^{c} (y^2 + 8y + 16)dy = \frac{\pi}{3} \cdot \left[\frac{1}{3}y^3 + 4y^2 + 16y\right]_{2,5}^{c} = \frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{3}c^3 + 4c^2 + 16c - 70{,}208\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}c^3 + 4c^2 + 16c = 117{,}95$$

Mit dem GTR ergibt sich als Lösung c = 3,476.

Das Schwimmlicht wird somit um 3,476 – 2,5 = 0,976 cm angehoben.