Abiturprüfung Mathematik 2011 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien – Anwendungsorientierte Aufgabe
Teil 3, Aufgabe 3

3.1
Bei der Planung einer Bohrinsel geht man von einer Betriebsdauer von 20 Jahren aus.
Die geplante Förderrate wird beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{16}{25}t^3 + \frac{24}{5}t^2 + 25; & 0 \le t \le 5 \\ 65; & 5<t \le 18 \\ -\frac{65}{4}t^2 + 585t - 5200; & 18 < x \le 20 \end{cases}$$

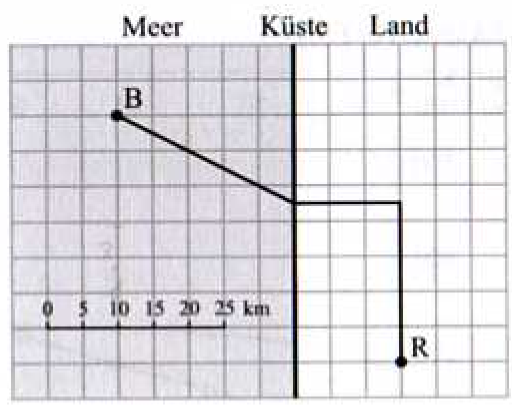
f(t) ist dabei die Förderrate in Millionen Barrel pro Jahr, t ist die Zeit in Jahren nach Beginn der Förderung.

3.1.1
Skizzieren Sie das Schaubild der Funktion f. (2 Punkte)

3.1.2
Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Förderrate am stärksten steigt. (3 Punkte)

3.1.3
Wie viele Barrel Öl soll die Bohranlage gemäß der Planung über die gesamte Zeitdauer fördern ? (4 Punkte)

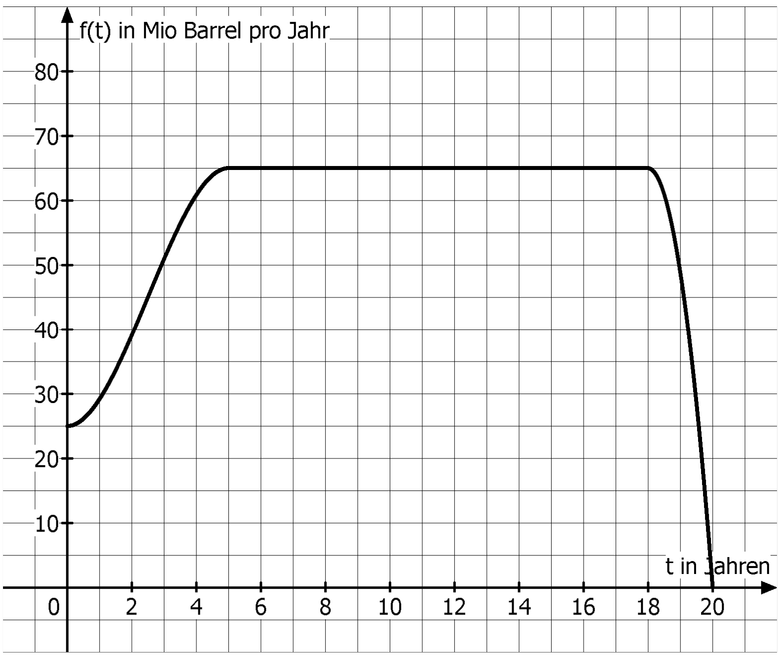
3.2
Von der Bohrinsel soll eine Pipeline zu einer Raffinerie verlegt werden. Jeder Kilometer, der im Wasser verlegt wird, kostet 950.000 €. Über Land kostet die Pipeline 420.000 € pro Kilometer. Aufgrund von Umweltschutzbestimmungen darf die Pipeline auf der Landseite nur parallel oder senkrecht zur Küste verlaufen. Die Lage der Bohrinsel und der Raffinerie R sowie ein möglicher Pipelineverlauf können aus der Grafik entnommen werden.
Bestimmen Sie unter den gegebenen Bedingungen die Kosten für den kostengünstigsten Pipelineverlauf



(6 Punkte)
----
15 Punkte

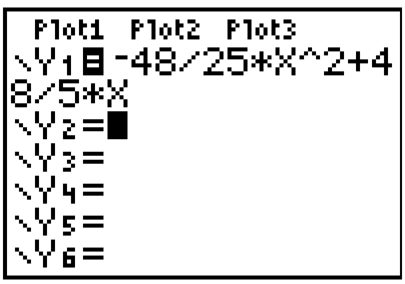
Abiturprüfung Mathematik 2011 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien – Anwendungsorientierte Aufgabe
Teil 3, Lösung Aufgabe 3

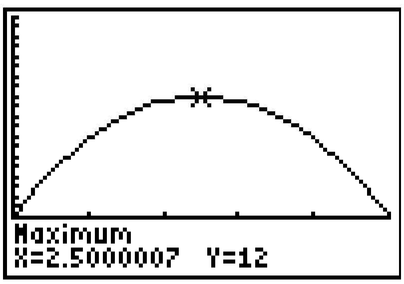
3.1.1 Skizze von f(t):



3.1.2
Anhand des Schaubildes erkennt man, dass der stärkste Anstieg im Intervall $t \in [0;5]$ existiert.
Da der Anstieg durch die Funktion $f'(t)$ beschrieben wird, ist das Maximum der Ableitungsfunktion im Intervall [0;5] gesucht.

Im Intervall [0;5] gilt $f'(t) = -\frac{48}{25}t^2 + \frac{48}{5}t$





Die Förderrate ist maximal nach 2,5 Tagen.

3.1.3

Da es sich bei der Funktion f(t) um eine „Förderrate“, also um eine momentane Änderungsrate handelt, muss man zur Ermittlung der geförderten Menge Öl die Fläche zwischen der Funktion f(t) und der t-Achse bestimmen.

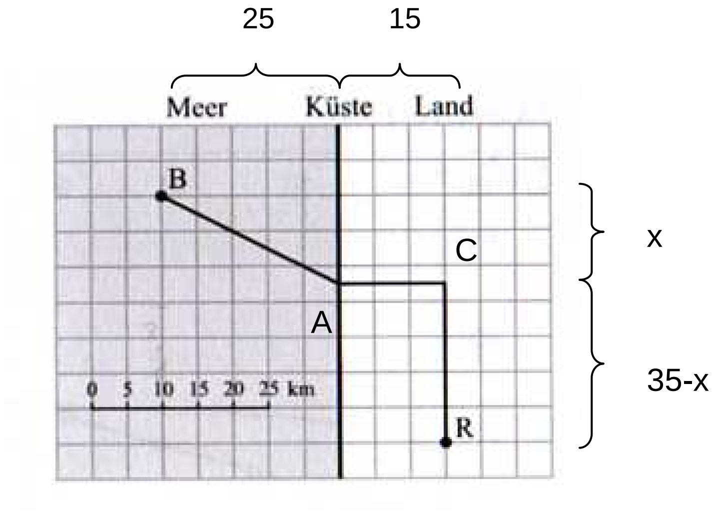
Menge in den ersten 5 Tagen: $\int_0^5 \left(-\frac{16}{25}t^3 + \frac{24}{5}t^2 + 25\right)dt = 225$ (GTR)

Menge vom 5. bis 18.Tag: $\int_5^{18} 65dt = 845$ (GTR)

Menge vom 18. bis 20. Tag: $\int_{18}^{20} \left(-\frac{65}{4}t^2 + 585t - 5200\right)dt = 86,67$ (GTR)

Die gesamte Menge in den 20 Jahren beträgt 225 + 845 + 86,67 = 1156,67 Millionen Barrel

3.2

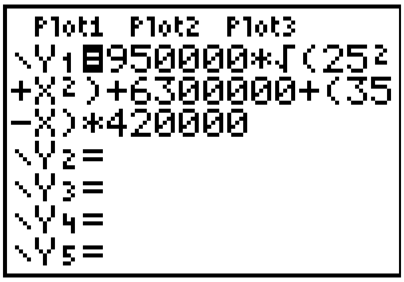


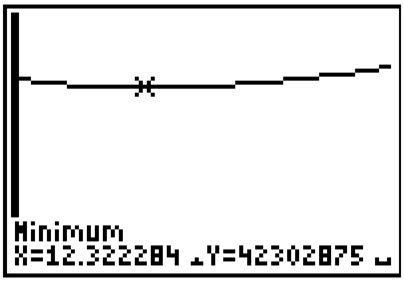
Die Pipeline besteht aus drei Teilstrecken $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ und $\overline{CR}$.

$\overline{AB} = \sqrt{25^2 + x^2}$ (Satz des Pythagoras) mit Kosten $K_1(x) = 950000 \cdot \sqrt{25^2 + x^2}$
$\overline{AC} = 15$ mit Kosten $K_2(x) = 15 \cdot 420000 = 6300000$
$\overline{CR} = 35 - x$ mit Kosten $K_3(x) = (35 - x) \cdot 420000$

Die Gesamtkosten betragen $K(x) = 950000 \cdot \sqrt{25^2 + x^2} + 6300000 + (35 - x) \cdot 420000$

Gesucht ist x, so dass die Kosten minimal werden.





Mit dem GTR ergibt sich:
Die Kosten werden minimal für x = 12,32 km.
Die minimalen Kosten betragen 42.302.875 €.