Abiturprüfung Mathematik 2012 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien – Analysis, Aufgabe 1

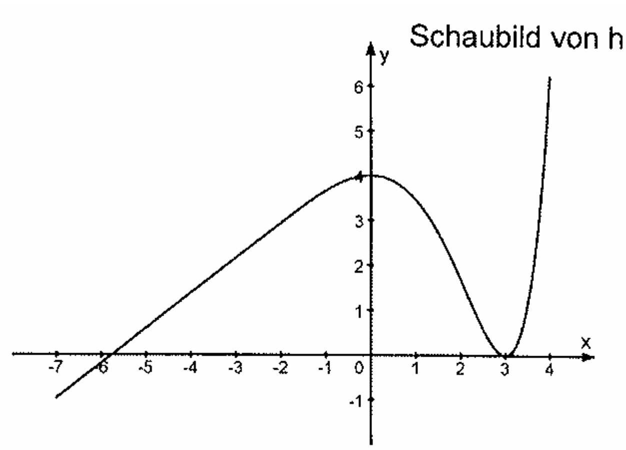
1.1 (8 Punkte)
Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion h mit der Definitionsmenge [-7 ; 4].
Die Funktion H ist eine Stammfunktion von h.
Begründen Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

(1) H hat zwei Wendestellen

(2) $h''(0,5)$ ist größer als $h''(3,5)$

(3) Die Wertemenge von h' enthält nur Zahlen, die größer als -3 sind.

(4) Das Schaubild von h' ist überall rechtsgekrümmt



1.2
Gegeben ist die Funktion s mit

$$s(x) = \frac{1}{2}x + 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

Das Schaubild von s ist C.

1.2.1 (6 Punkte)
Zeichnen Sie C für $-3 \le x \le 7$.
Untersuchen Sie, welche Werte die Steigung von C annehmen kann.

1.2.2 (12 Punkte)
Weisen Sie nach, dass die Gerade g mit der Gleichung $y = 0,5x - 1$ das Schaubild C an den Stellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 6$ berührt und dass C nie unterhalb von g verläuft.

C und g begrenzen für $-2 \le x \le 6$ eine Fläche, die von der Parallelen zu g durch den Punkt R(0/1) in zwei Teilflächen zerlegt wird.
Berechnen Sie den Inhalt der größeren Teilfläche.

1.2.3 (6 Punkte)
Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte von C.
Begründen Sie, dass alle Wendepunkte auf einer Geraden liegen.

1.3
Für jedes $a \in \mathbb{R}$ und a > 0 ist die Funktion f_a gegeben durch

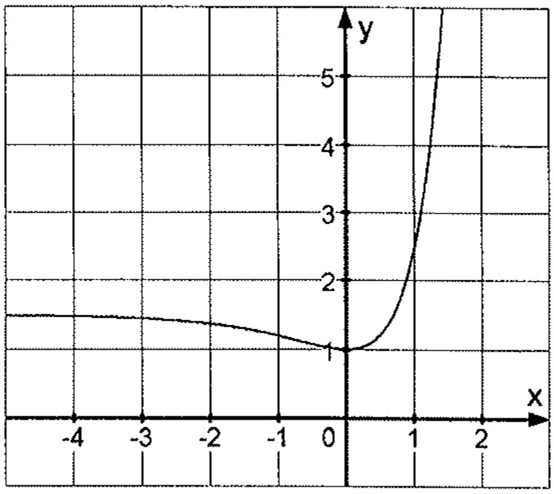
$$f_a(x) = ae^{2x} - e^x;\ x \in \mathbb{R}$$

Das Schaubild von f_a heißt K_a.

1.3.1 (4 Punkte)
Die Tangente und die Normale von K_2 im Punkt S(0/1) und die x-Achse begrenzen ein Dreieck.
Berechnen Sie die Länge der Hypotenuse dieses Dreiecks.

1.3.2 (4 Punkte)
Berechnen Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte von K_a.
Für welche Werte von a liegt der Schnittpunkt mit der x-Achse rechts von der y-Achse ?

1.3.3 (5 Punkte)
Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Stammfunktion F_a von f_a.
Bestimmen Sie den Wert von a sowie den Funktionsterm dieser Stammfunktion.



Abiturprüfung Mathematik 2012 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien – Analysis, Aufgabe 2

2.1
Für $t \in \mathbb{R}^*$ ist die Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = t \cdot \left(e^{x-t} - x\right) \;;\; x \in \mathbb{R}$$

Das Schaubild der Funktion f_t heißt K_t.

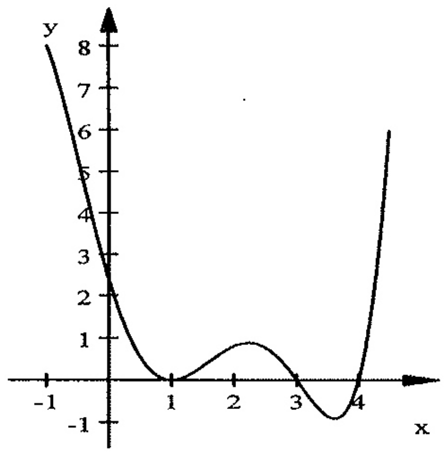
2.1.1 (7 Punkte)
Zeichnen Sie die Schaubilder K_{-1} und K_1 in ein gemeinsames Koordinatensystem ein. Geben Sie die Gleichungen der Asymptoten von K_{-1} und K_1 an und zeichnen Sie die Asymptoten in das Koordinatensystem ein.

2.1.2 (5 Punkte)
Das Schaubild K_1 und die 2.Winkelhalbierende schließen mit der y-Achse und der Geraden mit der Gleichung x = a für a < 0 eine Fläche ein.
Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche in Abhängigkeit von a.
Gegen welchen Wert strebt dieser Flächeninhalt für $a \to -\infty$?

2.1.3 (7 Punkte)
Untersuchen Sie K_t auf Hoch- und Tiefpunkte.
Bestimmen Sie alle Werte von t, für die die Gerade mit der Gleichung y = -12 Tangente an K_t ist.

2.1.4 (6 Punkte)
$P(1/0)$, $Q(u / f_3(u))$ und $R(u/0)$ sind für $1 < u \leq 4$ die Eckpunkte eines Dreiecks.
Berechnen Sie den Wert von u, für den der Flächeninhalt des Dreiecks maximal ist.

2.2
Die folgende Abbildung zeigt das Schaubild der Funktion g.



Das Schaubild einer Stammfunktion G von g ist C_G.

2.2.1 (3 Punkte)
Geben Sie alle Stellen an, an denen C_G einen Hochpunkt hat, und alle Stellen, an denen C_G einen Tiefpunkt hat. Begründen Sie Ihre Angaben.

2.2.2 (8 Punkte)
Begründen Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.

(1) $g''(2) > 0$

(2) Im Intervall [-1 ; 4,5] gibt es drei Stellen, an denen das Schaubild C_G die Steigung 4 hat.

(3) Das Schaubild von g' ist monoton fallend für $0 \le x \le 1$

(4) $\int_2^4 g(x)dx < 1$

2.3
Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) + 5$; $x \in \mathbb{R}$

2.3.1 (4 Punkte)
Beschreiben Sie, wie das Schaubild von h aus dem Schaubild mit der Gleichung $y = \sin(x)$ hervorgeht.

2.3.2 (5 Punkte)
Es gibt Ursprungsgeraden, die das Schaubild von h berühren.
Bestimmen Sie für eine dieser Geraden den Berührpunkt und die Gleichung.

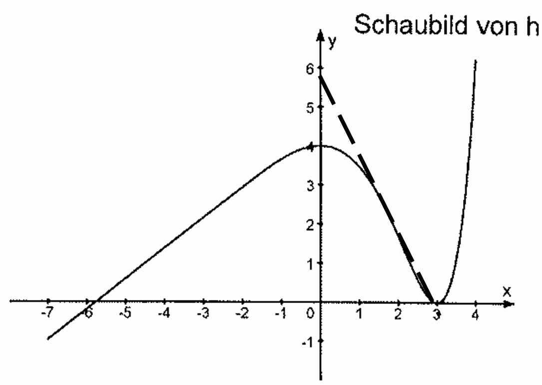
Abiturprüfung Mathematik 2012 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien – Analysis, Lösung Aufgabe 1

1.1

(1) Die Stammfunktion H hat genau dann eine Wendestelle, wenn die Ableitungsfunktion h eine Extremstelle besitzt.
Da h zwei Extremstellen bei x = 0 und x = 3 besitzt, besitzt H zwei Wendestellen.
Die Aussage ist wahr.

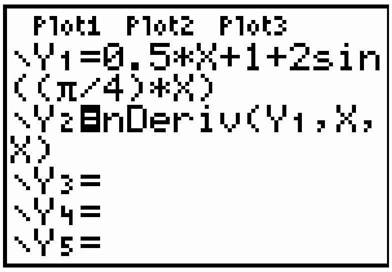
(2) $h''(0,5)$ ist negativ, da das Schaubild von h an der Stelle x = 0,5 rechtsgekrümmt ist.
$h''(3,5)$ ist positiv, da das Schaubild von h an der Stelle x = 3,5 linksgekrümmt ist.
Damit gilt $h''(3,5) > h''(0,5)$. Die Aussage ist falsch.

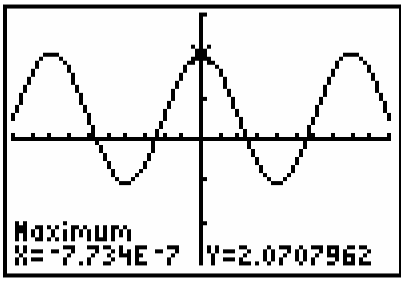
(3) Die Wertemenge von h' stellen die möglichen Steigungen der Tangenten dar, die man an das Schaubild von h anlegen kann.
Für x < 0 und für x > 3 sind die Tangentensteigungen positiv.
Im Bereich 0 < x < 3 sind die Tangentensteigungen negativ.
Die kleinste Steigung befindet sich am Wendepunkt von h. Die zugehörige Tangente ist gestrichelt eingezeichnet.
Die Steigung dieser Tangente beträgt ungefähr $m = -\frac{6}{3} = -2$.
Folglich sind alle Steigungen größer als -3. Die Aussage ist wahr.

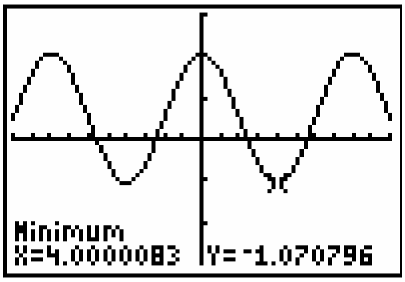


(4) Ungefähr bei x = 2 besitzt das Schaubild von h einen Wendepunkt mit einer Tangente, die eine minimale Steigung besitzt.
Somit besitzt das Schaubild von h' an der Stelle x = 2 einen Tiefpunkt.
Ein Schaubild mit einem Tiefpunkt ist an dieser Stelle linksgekrümmt.
Die Aussage ist falsch.

1.2.1
Um zu ermitteln, welche Steigungen das Schaubild C annehmen kann, muss der Wertebereich der Ableitungsfunktion $s'(x)$ bestimmt werden.
Dies kann mit dem GTR erfolgen:

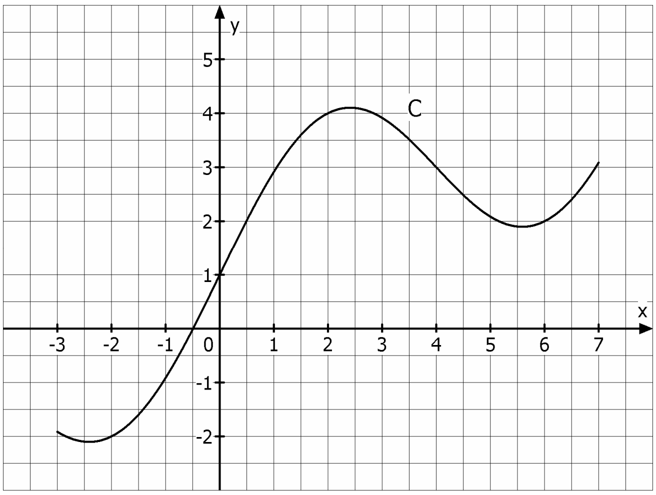






Der größte Wert von $s'(x)$ beträgt 2,0708.
Der kleinste Wert von $s'(x)$ beträgt -1,0708.
Die Steigung von C kann Werte annehmen im Intervall [-1,0708 ; 2,0708]

Zeichnung von C:



1.2.2
Die Gerade $g(x) = 0{,}5x - 1$ berührt das Schaubild von s(x), wenn folgende beiden Bedingungen erfüllt sind: $s(x) = g(x)$ und $s'(x) = g'(x)$.

Es gilt $g'(x) = 0{,}5$ und $s'(x) = \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

Nachweis der Berührung bei x = -2:

$g(-2) = 0{,}5 \cdot (-2) - 1 = -2 \qquad s(-2) = -1 + 1 + 2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2$

also $g(-2) = s(-2)$

$g'(-2) = 0{,}5$ und $s'(-2) = \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0{,}5$

also $g'(-2) = s'(-2)$

Damit ist die Berührung an der Stelle x = - 2 nachgewiesen.

Nachweis der Berührung bei x = 6:

$g(6) = 0{,}5 \cdot (6) - 1 = 2 \qquad s(6) = 3 + 1 + 2\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2$

also $g(6) = s(6)$

$g'(6) = 0{,}5$ und $s'(6) = \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0{,}5$

also $g'(6) = s'(6)$

Damit ist die Berührung an der Stelle x = 6 nachgewiesen.

Nachweis, dass das Schaubild C oberhalb von g verläuft:

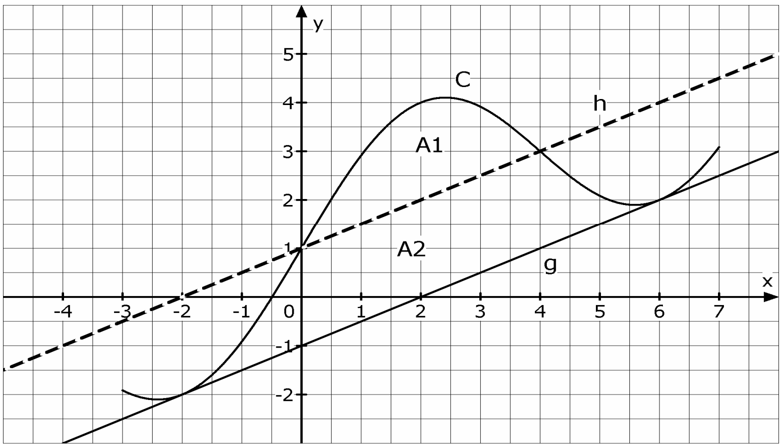
Hierzu muss gezeigt werden, dass die Ungleichung $s(x) \geq g(x)$ für alle x-Werte erfüllt ist.

Zu zeigen ist: $\frac{1}{2}x + 1 + 2\sin(\frac{\pi}{4}x) \geq \frac{1}{2}x - 1 \quad |-\frac{1}{2}x - 1$

$\Rightarrow 2\sin(\frac{\pi}{4}x) \geq -2 \quad \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{4}x) \geq -1$ und dies ist für alle x-Werte wahr.

Damit ist gezeigt, dass die Ungleichung für alle x-Werte erfüllt ist und das Schaubild C oberhalb von g verläuft.

Flächenberechnung:



Die komplette Fläche zwischen dem Schaubild C und der Gerade g beträgt:

$$A = \int_{-2}^{6} (s(x) - g(x))dx = 16 \text{ Flächeneinheiten (GTR)}$$

Die Gerade h besitzt die Gleichung $h(x) = 0{,}5x + 1$

(gleiche Steigung wie g(x) und y-Achsenabschnitt b = 1)

Berechnung der Schnittstellen von s(x) und h(x):

$$s(x) = h(x) \Rightarrow \frac{1}{2}x + 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) = 0{,}5x + 1$$

Mit dem GTR ergibt sich als Schnittstellen x = 0 und x = 4.

Berechnung der Fläche A1 : $A1 = \int_{0}^{4} (s(x) - h(x))dx = 5{,}093$ Flächeneinheiten

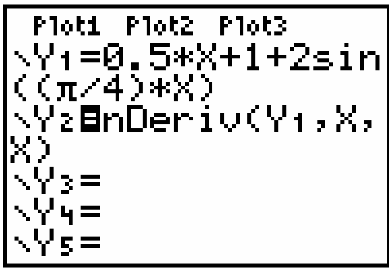
Daraus folgt für die gesuchte größere Teilfläche:

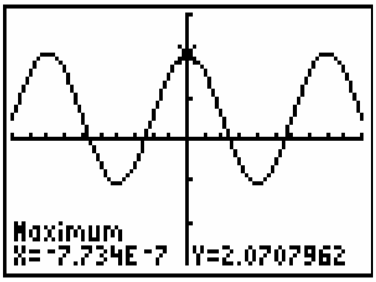
$A2 = A - A1 = 16 - 5{,}093 = 10{,}907$ Flächeneinheiten

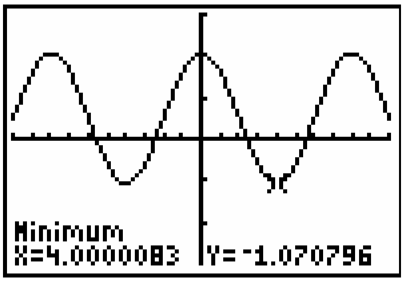
1.2.3

Berechnung der Wendepunkte von C:
Notwendige und hinreichende Bedingung: $s''(x) = 0$ und $s'''(x) \neq 0$

GTR:







Die Extremstellen der Ableitungsfunktion stellen die Wendestellen von s(x) dar.
Die Extremstellen liegen bei x = 0 bzw. x = 4 bzw. x = 8,…

Allgemein: $x = 4 \cdot k$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Es gilt: $s(4k) = \frac{1}{2} \cdot 4k + 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot 4k\right) = 2k + 1$

(die Sinusfunktion nimmt den Wert 0 an für alle ganzzahligen Werte von k)

Das Schaubild C besitzt somit unendlich viele Wendepunkte mit den Koordinaten
$W_k(4k / 2k + 1)$

Zur Begründung, dass die Wendepunkte alle auf einer Geraden liegen, wird die Ortskurve der Wendepunkte berechnet:

$x = 4k$ (1) und $y = 2k + 1$ (2)

Aus (1) $k = \frac{1}{4}x$ eingesetzt in (2): $y = 2 \cdot \frac{1}{4}x + 1 \Rightarrow y = 0{,}5x + 1$

Da die Ortskurve der Wendepunkte eine Gerade ist, liegen alle Wendepunkte auf einer Geraden.

1.3.1

Es gilt $f_2(x) = 2e^{2x} - e^x$ und $f_2'(x) = 4e^{2x} - e^x$

Die allgemeine Tangentengleichung lautet $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$
Im Punkt S(0/1) – also an der Stelle u = 0 – lautet die Tangentengleichung
$y = f_2'(0) \cdot (x - 0) + f_2(0)$

Es gilt $f_2(0) = 1$ und $f_2'(0) = 4e^0 - e^0 = 3$

$y = 3 \cdot (x - 0) + 1 \Rightarrow y = 3x + 1$ Tangentengleichung in S(0/1)

Die allgemeine Normalengleichung lautet $y = -\frac{1}{f'(u)} \cdot (x-u) + f(u)$

Im Punkt S(0/1) – also an der Stelle u = 0 – lautet die Normalengleichung

$y = -\frac{1}{f_2'(0)} \cdot (x-0) + f_2(0)$

Es gilt $f_2(0) = 1$ und $f_2'(0) = 4e^0 - e^0 = 3$

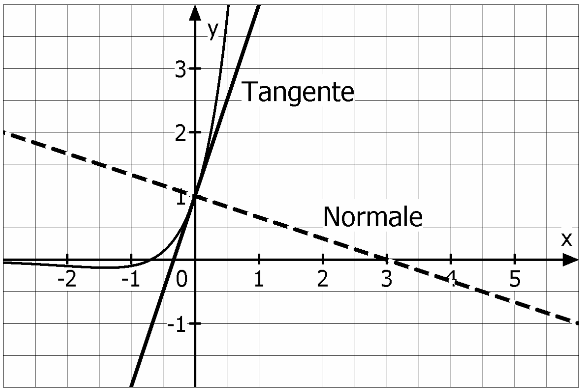
$y = -\frac{1}{3}(x-0) + 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + 1$ Normalengleichung in S(0/1)

Die Tangente und die Normale bilden mit der x-Achse ein rechtwinkliges Dreieck.

Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse: $3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

Schnittpunkt der Normale mit der x-Achse: $-\frac{1}{3}x + 1 = 0 \Rightarrow x = 3$

Die Hypotenuse des Dreiecks besitzt die Länge $3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$ Längeneinheiten



1.3.2

Schnittpunkt mit der y-Achse: $f_a(0) = a \cdot e^0 - e^0 = a - 1$ und damit $S_y(0/a-1)$

Schnittpunkt mit der x-Achse: $f_a(x) = 0 \quad \Rightarrow e^x \cdot (ae^x - 1) = 0$

Mit dem Satz vom Nullprodukt folgt $ae^x - 1 = 0 \Rightarrow x = \ln\left(\frac{1}{a}\right)$ und damit $N(\ln\left(\frac{1}{a}\right)/0)$

Der Schnittpunkt N liegt rechts von der y-Achse, wenn $\ln\left(\frac{1}{a}\right) > 0$ ist.

Der Wert des Logarithmus ist positiv, wenn $\frac{1}{a} > 1$ ist, also für $0 < a < 1$.

1.3.3

Die allgemeine Stammfunktion lautet $F_a(x) = \frac{1}{2} a \cdot e^{2x} - e^x + C$.

Da in der allgemeinen Stammfunktion nun zwei Parameter a und C enthalten sind, müssen zwei Bedingungen aus dem abgebildeten Schaubild abgelesen werden.

1.Bedingung: Die waagrechte Asymptote lautet y = 1,5 für $x \to -\infty$
Für $x \to -\infty$ strebt $F_a(x) \to C$, also ist C = 1,5

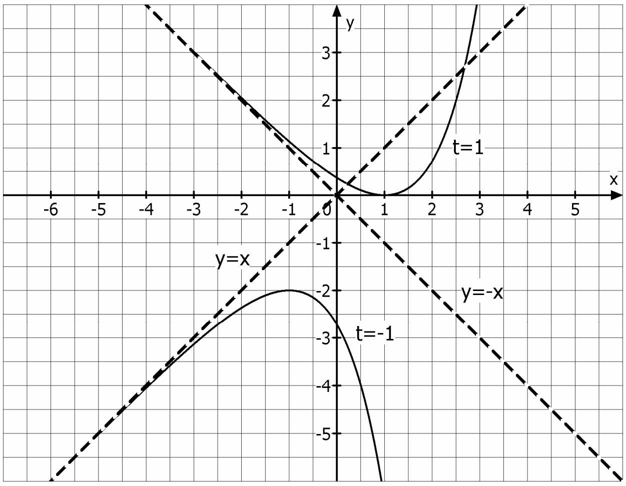
Das abgebildete Schaubild enthält außerdem den Punkt R(0/1).

$F_a(0) = \frac{1}{2} a - 1 + 1{,}5 = 1 \Rightarrow a = 1$ also lautet die Stammfunktion $F_1(x) = \frac{1}{2} e^{2x} - e^x + 1{,}5$

Abiturprüfung Mathematik 2011 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien – Analysis, Lösung Aufgabe 2

2.1.1

Zeichnung der Schaubilder für t = -1 und t = 1:



Asymotote von K_{-1}:

$f_{-1}(x) = -(e^{x+1} - x) = -e^{x+1} + x$

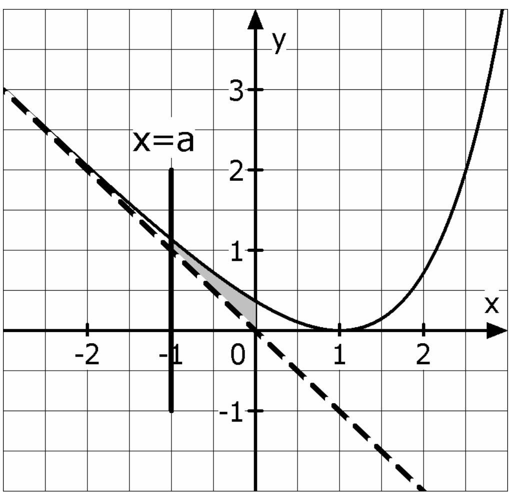
Für $x \to -\infty$ strebt $-e^{x+1} \to 0$, also lautet die schiefe Asymptote $y = x$

Asymotote von K_1:

$f_1(x) = e^{x-1} - x$

Für $x \to -\infty$ strebt $e^{x-1} \to 0$, also lautet die schiefe Asymptote $y = -x$

2.1.2



Die 2.Winkelhalbierende hat die Gleichung $y = -x$ (gestrichelte Gerade).

Berechnung der gesuchten Fläche:

$$A(a) = \int_a^0 (f_1(x) - (-x))dx = \int_a^0 (e^{x-1} - x + x)dx = \int_a^0 e^{x-1}dx = \left[e^{x-1}\right]_a^0 = e^{-1} - e^{a-1}$$

Für $a \to -\infty$ strebt $e^{a-1} \to 0$ und daher $A(a) \to e^{-1}$

2.1.3

Berechnung der Ableitungsfunktionen:

$f_t(x) = t \cdot \left(e^{x-t} - x\right)$

$f_t'(x) = t \cdot \left(e^{x-t} - 1\right)$ und $f_t''(x) = t \cdot e^{x-t}$

Notwendige und hinreichende Bedingung für Extrempunkte: $f_t'(x) = 0$ und $f_t''(x) \neq 0$

$f_t'(x) = 0 \Rightarrow t \cdot \left(e^{x-t} - 1\right) = 0$

$\Rightarrow e^{x-t} = 1 \Rightarrow x - t = \ln(1) \Rightarrow x = t$

$f_t''(t) = t \cdot e^0 = t$

Außerdem gilt $f_t(t) = t \cdot (1-t) = t - t^2$

Für t > 0 existiert ein Tiefpunkt $T(t / t - t^2)$

Für t < 0 existiert ein Hochpunkt $H(t / t - t^2)$

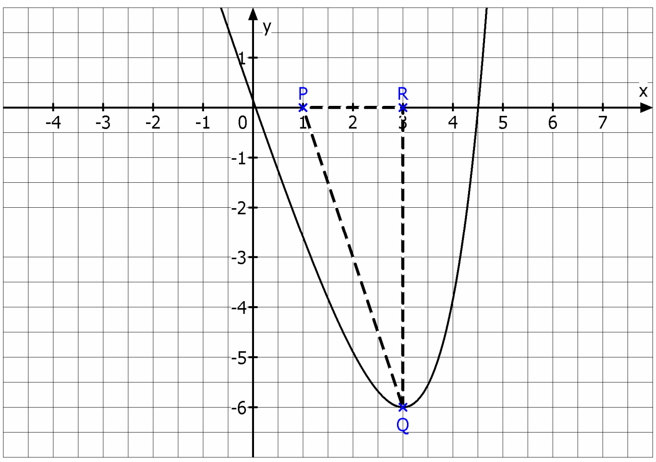
Die Gerade y = -12 ist waagrecht. Wenn diese Gerade eine Tangente sein soll, muss der Berührpunkt ein Extrempunkt sein.
Daraus folgt, dass der y-Wert des Extrempunktes -12 sein muss.

$\Rightarrow t - t^2 = -12 \Rightarrow t^2 - t - 12 = 0$

$t_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \dfrac{1 \pm 7}{2}$ also t = 4 oder t = -3.

2.1.4

Skizze des Dreiecks mit dem Schaubild für t = 3:

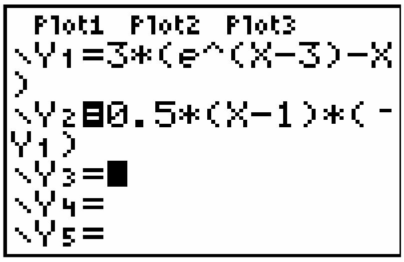


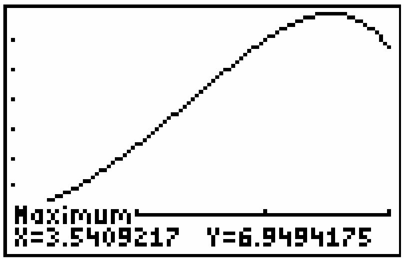
Die Fläche des Dreiecks lautet $A = \frac{1}{2} \cdot \overline{PR} \cdot \overline{QR}$

Es ist $\overline{PR} = u - 1$ (Differenz der beiden x-Werte)
und $\overline{QR} = 0 - f_3(u) = -f_3(u)$ (Differenz der beiden y-Werte)

Damit gilt $A(u) = \frac{1}{2}(u-1) \cdot (-f_3(u))$
Gesucht ist nun das globale Maximum von $A(u)$ im Intervall $1 < u \le 4$
Notwendige und hinreichende Bedingung für einen Hochpunkt: $A'(u) = 0$ und $A''(u) < 0$

GTR:





Das Schaubild von A(u) besitzt einen Hochpunkt bei u = 3,54 mit A(3,54) = 6,95.

Für die Randwerte gilt: A(1) = 0 und A(4) = 5,77.
Damit nimmt die Fläche für u = 3,54 ein globales Maximum an und der maximale Flächeninhalt beträgt 6,95 Flächeneinheiten.

2.2.1
Die Stammfunktion G besitzt dort einen Hochpunkt, an der die Ableitungsfunktion g eine Nullstelle mit einem Vorzeichenwechsel von + nach - besitzt.
Dies ist bei x = 3 der Fall.

Die Stammfunktion G besitzt dort einen Tiefpunkt, an der die Ableitungsfunktion g eine Nullstelle mit einem Vorzeichenwechsel von – nach + besitzt.
Dies ist bei x = 4 der Fall.

Anmerkung: An der Stelle x = 1 liegt eine Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel vor.
Das heißt, dass bei G dort ein Sattelpunkt vorliegt (also kein Extrempunkt)

2.2.2

(1) An der Stelle x = 2 ist das Schaubild von g rechtsgekrümmt, also ist $g''(2) < 0$.
Die Aussage ist falsch.

(2) Die Steigung an der Stammfunktion G wird berechnet über $G'(x) = g(x)$.
Damit die Steigung 4 ist, muss $g(x) = 4$ gelten.
Der Wert 4 wird von g(x) allerdings nur an zwei Stellen angenommen (ungefähr bei x = -0,3 und bei x = 4,5. Die Aussage ist falsch.

(3) Wenn $g'(x)$ monoton fallend ist, muss $g''(x) \le 0$ sein.
Dies bedeutet wiederum, dass das Schaubild im Bereich $0 \le x \le 1$ rechtsgekrümmt sein muss, was jedoch nicht so ist. Die Aussage ist falsch.

(4) Die Flächenzahl zwischen dem Schaubild von g und der x-Achse im Bereich x = 2 bis x = 3 wird positiv beim Integral erfasst.
Die Fläche zwischen x = 3 und x = 4 wird negativ beim Integral erfasst, da diese sich unterhalb der x-Achse befindet.
Da die beiden Flächen ungefähr gleich groß sind, ergibt sich als Integralwert näherungsweise Null – auf alle Fälle jedoch ein Wert kleiner als 1.
Die Aussage ist wahr.

2.3.1
Die einzelnen Schritte, wie die Funktionen auseinander hervorgehen, sehen wie folgt aus:

$$y = \sin(x) \rightarrow y = \cos(x) \rightarrow y = 2\cos(x) \rightarrow y = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) \rightarrow y = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) + 5$$

1.Umformung: Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ nach links

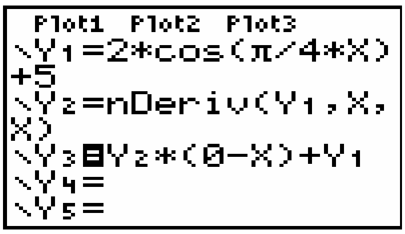
Eine Kosinusfunktion entsteht aus einer Sinusfunktion, in dem die Sinusfunktion um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschoben wird.

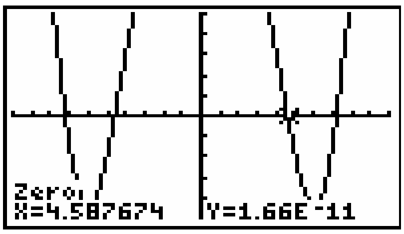
2.Umformung: Streckung mit Faktor 2 in y-Richtung
3.Umformung: Streckung mit Faktor $\frac{4}{\pi}$ in x-Richtung (Kehrwert !!)
4.Umformung: Verschiebung um 5 nach oben

2.3.2
Die allgemeine Tangentengleichung lautet $y = h'(u) \cdot (x - u) + h(u)$

Nun ist ein beliebiger Tangentenpunkt O(0/0) bekannt.
Einsetzen des Punktes in die allgemeine Tangentengleichung: $0 = h'(u) \cdot (0 - u) + h(u)$

Diese Gleichung wird nun mit dem GTR gelöst:





Eine Lösung lautet u = 4,588.
Der Berührpunkt lautet also $B(u / h(u)) = B(4{,}588 / 3{,}21)$.
Die Tangentengleichung lautet $y = h'(4{,}588) \cdot (x - 4{,}588) + h(4{,}588)$
$$\Rightarrow y = 0{,}7(x - 4{,}588) + 3{,}21$$

und vereinfacht: $y = 0{,}7x$