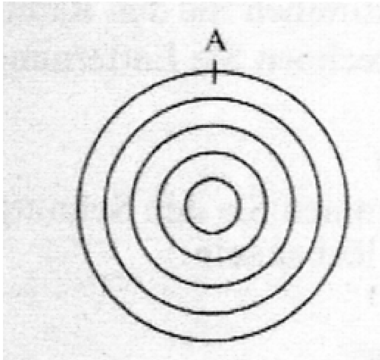
Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG, TG)
Hauptprüfung 2011 Teil 4, Vektorgeometrie, Aufgabe 1
Baden-Württemberg

1
Maike und Jan zielen mit Laserpointern auf eine Zielscheibe. Die Zielscheibe hat einen Durchmesser von 1 m. Sie befindet sich in der x_2x_3-Ebene und der Aufhängepunkt am oberen Rand der Scheibe liegt im Punkt A(0/3/2,5). Alle Koordinaten sind in Meter angegeben. Der Boden liegt in der x_1x_2-Ebene.



Die Spitze von Maikes Pointer befindet sich im Punkt M(4/2/1,4), die Richtung des Strahls ist durch den Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0,3 \\ 0,2 \end{pmatrix}$ gegeben.

Die Spitze von Jans Pointer befindet sich im Punkt J(3/4/2) und der Strahl trifft die Zielscheibe im Punkt T(0/2,8/2).

1.1
Zeigen Sie, dass der Strahl von Maikes Pointer die Zielscheibe trifft.
Wessen Strahl trifft die Zielscheibe näher an ihrem Zentrum ? (5 Punkte)

1.2
Maike dreht ihren Pointer so, dass die Richtung des Strahls nun durch $\vec{a_t} = \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 0,2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ gegeben ist, während die Spitze des Pointers im Punkt M verbleibt.

1.2.1
Berechnen Sie den Wert von t, für den sich der Laserstrahl von Maikes Pointer und der Laserstrahl von Jans Pointer schneiden. Bestimmen Sie den Schnittpunkt.
(5 Punkte)

1.2.2
Wenn der Laserstrahl von Maikes Pointer die Zielscheibe trifft, erzeugt er dort einen Lichtpunkt.
Bestimmen Sie den Wert von t, für den dieser Lichtpunkt dem Zentrum der Zielscheibe am nächsten liegt. (5 Punkte)
----
15 Punkte

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG, TG)
Hauptprüfung 2011 Teil 4, Vektorgeometrie, Lösung zu Aufgabe 1
Baden-Württemberg

1.1

Geradengleichung des Pointers von Maike: m: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1,4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0,3 \\ 0,2 \end{pmatrix}$

Nun muss der Schnittpunkt der Gerade m mit der x_2x_3-Ebene bestimmt werden.
Für den Schnittpunkt gilt $x_1 = 0$.

$\Rightarrow 4 - r = 0 \Rightarrow r = 4$

Setzt man r = 4 in die Gerade ein, ergibt sich der Schnittpunkt S(0/0,8/2,2).

Der Mittelpunkt Z der Scheibe liegt 0,5m unterhalb von A(0/3/2,5)
Damit lauten die Koordinaten des Mittelpunktes Z(0/3/2).

Für den Abstand des Punktes S von Z gilt: $\overline{SZ} = \left|\overrightarrow{SZ}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0,2 \\ 0,2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0,2^2 + 0,2^2} \approx 0,28\text{m}$

Da der Abstand geringer ist als der Radius der Scheibe, muss S innerhalb der Scheibe liegen.

Der Pointer von Jan trifft die Zielscheibe im Punkt T(0/2,8/2).

Für den Abstand des Punktes T von Z gilt: $\overline{TZ} = \left|\overrightarrow{TZ}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0,2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0,2^2} = 0,2\text{m}$

Der Strahl von Jans Pointer trifft die Zielscheibe näher am Zentrum als der Strahl von Maikes Pointer.

1.2.1

Die Geradengleichung von Maikes Pointer lautet nun: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1,4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 0,2 \end{pmatrix}$

Die Geradengleichung von Jans Pointer lautet: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1,2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Der Schnittpunkt der beiden Geraden ergibt sich durch Gleichsetzen:

$$\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\1,2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\1,4\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1\\t\\0,2\end{pmatrix}$$

Aus 3.Zeile: $2=1,4+0,2r\Rightarrow r=3$

Aus 1.Zeile: $3+3s=4-r\Rightarrow 3+3s=4-3\Rightarrow s=-\frac{2}{3}$

Aus 2.Zeile: $4+1,2\cdot(-\frac{2}{3})=2+3t\Rightarrow t=0,4$

Die beiden Strahlen treffen sich für t = 0,4.

Einsetzen von $s=-\frac{2}{3}$ in die Gerade von Jans Pointer ergibt den Schnittpunkt $S(1/3,2/2)$

1.2.2

Zunächst wird der vom Parameter t abhängige Schnittpunkt der Gerade von Maikes Pointer mit der x_2x_3-Ebene bestimmt:

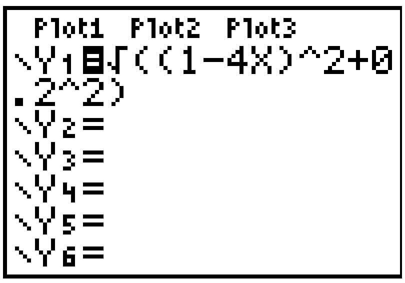
Gleichung von Maikes Pointer: $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\2\\1,4\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1\\t\\0,2\end{pmatrix}$

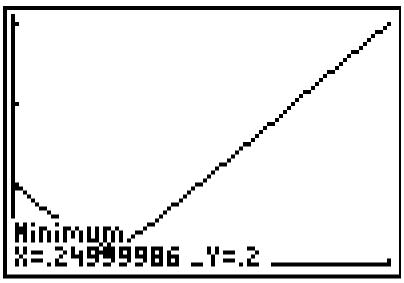
Setze $x_1=0\Rightarrow 4-r=0\Rightarrow r=4$.

Einsetzen von r = 4 in die Gerade ergibt $P(0/2+4t/2,2)$

Abstand von P zu Z: $\overline{PZ}=\left|\overrightarrow{PZ}\right|=\left|\begin{pmatrix}0\\1-4t\\-0,2\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(1-4t)^2+0,2^2}$

Gesucht ist der Wert von t, so dass der Wurzelterm minimal wird:





Für t = 0,25 ergibt sich ein Minimum. Der minimale Abstand beträgt dann 0,2.