Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2005 Gruppe II, Lineare Optimierung, Aufgabe B
Baden-Württemberg

Ein Betrieb stellt auf drei Maschinen verschiedene Produkte her. Die Bearbeitungszeiten in Minuten für die Produkte A und B und deren Verkaufspreise sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

Produkt	Maschine 1	Maschine 2	Maschine 3	Verkaufspreis in €
A	6	3	3	200
B	3	3	9	300

In der kommenden Fertigungswoche hat Maschine 1 noch 1200 Minuten, Maschine 2 noch 720 Minuten und Maschine 3 noch 1440 Minuten freie Kapazität für die Produktion von A und B.

a) Bestimmen Sie grafisch das Erlösmaximum. (6 Punkte)

b) Berechnen Sie mithilfe des Simplex-Verfahrens die Stückzahlen für die beiden Produkte so, dass der Erlös maximal wird.
Nehmen Sie Stellung zu der Behauptung des Produktionsleiters: „Nicht alle Kapazitäten sind voll ausgeschöpft.“ (8 Punkte)

c) Im Betrieb sind Zusatzinvestitionen zur Kapazitätsausweitung bei Maschine 2 geplant. Die Kapazitätsgrenze von Maschine 2 soll so angehoben werden, dass sich das Erlösmaximum dann ergibt, wenn alle drei Maschinen voll ausgelastet sind. Kennzeichnen Sie in Ihrer Zeichnung zu a), wo das neue Erlösmaximum liegt. Erläutern Sie Ihre Überlegung dazu.
Berechnen Sie das neue Erlösmaximum und die Kapazitätsausweitung bei Maschine 2 in Minuten. (4 Punkte)

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2005 Gruppe II, Lineare Optimierung, Lösung zu Aufgabe B
Baden-Württemberg

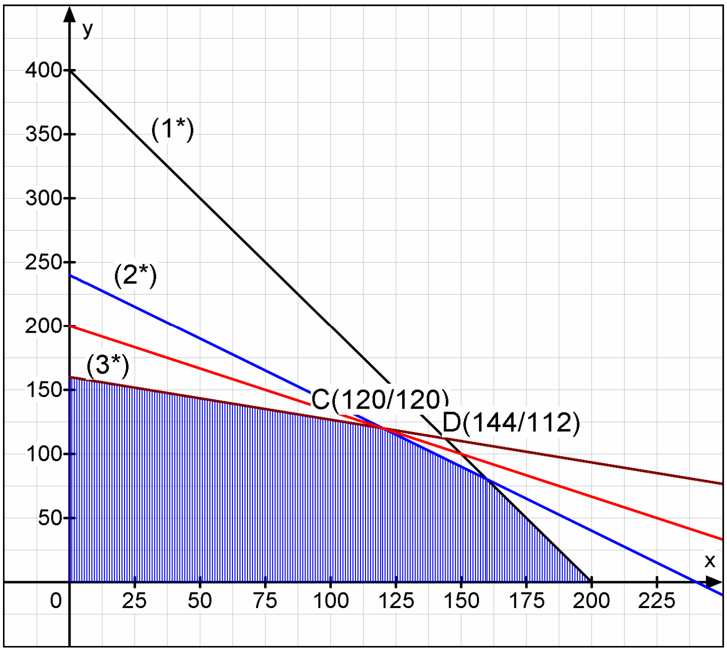
a) Bezeichnungen:
x sei die Produktionsmenge von A
y sei die Produktionsmenge von B

Folgende Bedingungen gelten für die Variablen x und y:
$x \geq 0$, $y \geq 0$
Zeit für Maschine 1: $6x + 3y \leq 1200$ (1)
Zeit für Maschine 2: $3x + 3y \leq 720$ (2)
Zeit für Maschine 3: $3x + 9y \leq 1440$ (3)

Zu maximieren ist die Erlösfunktion $E = 200x + 300y$ (4)

Aus (1) folgt: $y \leq 400 - 2x$ (1*)
Aus (2) folgt: $y \leq -x + 240$ (2*)
Aus (3) folgt: $y \leq 160 - \frac{1}{3}x$ (3*)
Aus (4) folgt: $y = -\frac{2}{3}x + \frac{E}{300}$ (4*)

Aus den Ungleichungen (1*) bis (3*) ergibt sich die folgende eingefärbte Fläche:



Die Geraden (2*) und (3*) schneiden sich in C(120/120).

Nun wird gemäß (4*) die Gerade $y = -\frac{2}{3}x + C = -\frac{2}{3}x + \frac{E}{300}$ so in das Koordinatensystem eingezeichnet, dass die Gerade noch einen gemeinsamen Punkt mit der markierten Fläche besitzt und der y-Achsenabschnitt C der Gerade einen möglichst großen Wert annimmt.

Die rote Gerade mit dem größten y-Achsenabschnitt geht durch den Punkt C(120/120).
Damit ergibt sich ein maximaler Erlös, wenn von A und B jeweils 120 ME produziert werden.
Maximaler Erlös $E = 200 \cdot 120 + 300 \cdot 120 = 60000$ Euro.

b) Für das Simplex-Verfahren müssen für die Ungleichungen (1) bis (3) drei Schlupfvariablen u, v und w eingeführt werden:

$6x + 3y + u = 1200$
$3x + 3y + v = 720$
$3x + 9y + w = 1440$
Zielfunktion: $E = 200x + 300y$

Aufbau des Simplex-Tableaus:

x	y	u	v	w		Einschränkung
6	3	1	0	0	1200	400
3	3	0	1	0	720	240
3	9	0	0	1	1440	160
200	300	0	0	0	E	

Die Spalte mit der größten Zahl bei der Zielfunktionszeile ist die Pivotspalte (hier y).
Die Werte der Spalte „Einschränkung“ ergeben sich aus der Division der Spalte 6 durch die Elemente der Pivotspalte (1200:3 ; 720:3 ; 1440 :9).

Die Zeile, in der die kleinste Zahl bei „Einschränkung“ steht, ist die Pivotzeile. Dies ist in diesem Fall mit 160 die 3.Zeile.

Das Element, das sowohl in der Pivotspalte als auch in der Pivotzeile steht, ist das so genannte Pivotelement – hier 9.

Nun werden alle Elemente der Pivotspalte durch übliche Zeilenumformungen zu Null gemacht, außer das Pivotelement selbst.

Damit ergibt sich

x	y	u	v	w		Einschränkung
15	0	3	0	-1	2160	144
6	0	0	3	-1	720	120
3	9	0	0	1	1440	480
300	0	0	0	-100	3E-144000	

Nun ist die erste Spalte (x) die Pivotspalte und die 2.Zeile die Pivotzeile.

x	y	u	v	w	
0	0	6	-15	3	720
6	0	0	3	-1	720
0	18	0	-3	3	2160
0	0	0	-150	-50	3E-180000

Division der 2.Zeile durch 6 und der 3.Zeile durch 18 ergibt nun

x	y	u	v	w	
0	0	6	-15	3	720
1	0	0	0,5	$-\frac{1}{6}$	120
0	1	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	120
0	0	0	-150	-50	3E-180000

Die optimalen Produktionsmengen betragen 120 Stück von A und 120 Stück von B

Prüfung der Ausschöpfung der Kapazitäten:
Auslastung Maschine 1: $6 \cdot 120 + 3 \cdot 120 = 1080$ Minuten.
Da die freien Kapazitäten bei 1200 Minuten liegen, sind noch 120 Minuten frei.

Auslastung Maschine 2: $3 \cdot 120 + 3 \cdot 120 = 720$ Minuten, also ausgelastet.
Auslastung Maschine 3: $3 \cdot 120 + 9 \cdot 120 = 1440$ Minuten, also augelastet.

Wegen Maschine 1 hat der Produktionsleiter recht.

c) Betrachtet man nur die Maschine 1 und 3, dann liegt die optimale Produktionsmenge im Punkt D des obigen Schaubildes.
Das Gleichsetzen der Geradengleichungen (1*) und (3*) ergibt den Schnittpunkt D(144/112).
Der Erlös zu dieser Funktion beträgt $E = 200 \cdot 144 + 300 \cdot 112 = 62400$ Euro.

Die dafür benötigte Kapazität der Maschine 2 beträgt $144 \cdot 3 + 112 \cdot 3 = 768$ Minuten
Aufgrund der vorhandenen Kapazität von 720 Minuten muss eine Kapazitätsausweitung um 48 Minuten erfolgen.