Hauptprüfung Abiturprüfung 2014 (ohne CAS)

Baden-Württemberg

Anwendungsorientierte Aufgabe 1

Hilfsmittel: GTR, Formelsammlung

berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

März 2014

1

Die Gesamtkosten eines Unternehmens bei der Herstellung eines Produktes werden durch die Funktion K mit

$$K(x) = x^3 - 10x^2 + 40x + 100\,; \quad x \in [0;11]$$

beschrieben.
Dabei bezeichnen x die Produktionsmenge in Mengeneinheiten (ME) und K(x) die Gesamtkosten in Geldeinheiten (GE). Der Verkaufspreis beträgt 50 GE.
Der Erlös ist das Produkt aus Verkaufspreis und Verkaufsmenge.

Das Schaubild der Funktion K ist SK.

1.1
Zeichnen Sie das Schaubild SK.
Prüfen Sie, ob eine größere Produktionsmenge stets auch mit höheren Gesamtkosten verbunden ist.

(4 Punkte)

1.2
Der Gewinn ist die Differenz aus Erlös und Gesamtkosten.
Die Gewinnzone ist der Bereich, in dem die Produktionsmenge liegen muss, damit das Unternehmen keinen Verlust macht.

Berechnen Sie die Gewinnzone und den maximalen Gewinn.

Prüfen Sie, ob der mittlere Gewinn im Bereich der Gewinnzone 50% des maximalen Gewinns übersteigt.

(7 Punkte)

1.3
Die sogenannte "langfristige Preisuntergrenze" entspricht der Steigung der Tangente an SK, die durch den Ursprung verläuft.

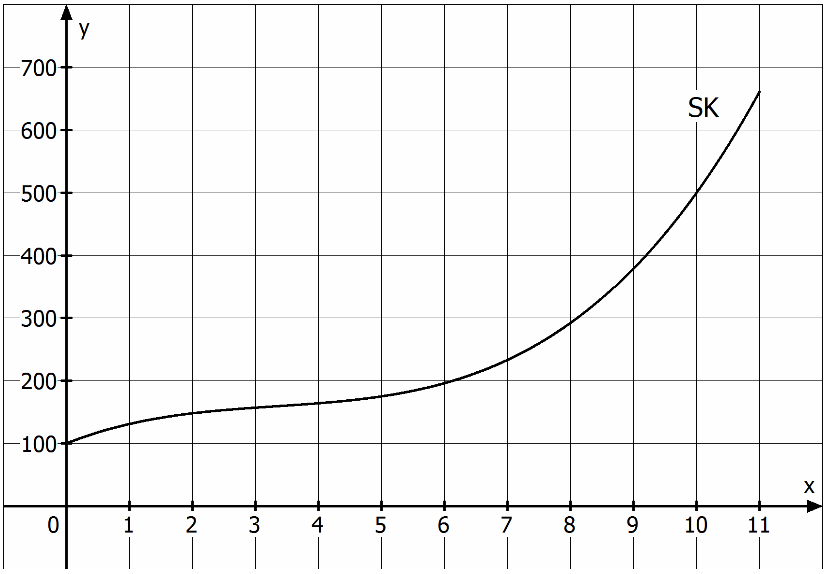
Zeichnen Sie diese Tangente ein.
Ermitteln Sie rechnerisch die "langfristige Preisuntergrenze".

(4 Punkte)

Lösungen

1.1

Zeichnen Sie das Schaubild SK:



Prüfen Sie, ob eine größere Produktionsmenge stets auch mit höheren Gesamtkosten verbunden ist.

Zu einer größeren Produktionsmenge gehören höhere Gesamtkosten, wenn das Schaubild SK streng monoton wächst.

Das Schaubild ist streng monoton, wenn $K'(x) > 0$ ist.
Es ist $K'(x) = 3x^2 - 20x + 40$.

Beim Schaubild von $K'(x)$ handelt es sich um eine nach oben geöffnete Parabel.
Der Tiefpunkt der Parabel hat die Koordinaten T(3,33/6,67) (GTR).
Damit liegt die Parabel immer oberhalb der x-Achse und daraus folgt $K'(x) > 0$
Somit ist K(x) streng monoton wachsend.

Ergebnis: Zu einer größeren Produktionsmenge gehören auch höhere Gesamtkosten.

1.2

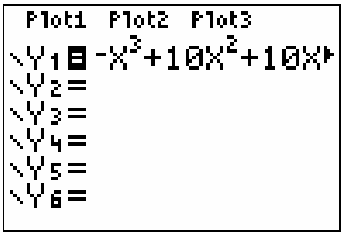
Berechnen Sie die Gewinnzone und den maximalen Gewinn.

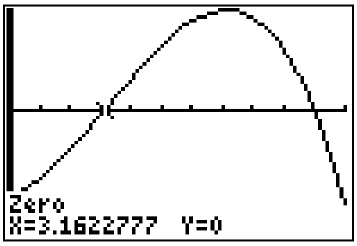
Da der Verkaufspreis 50 GE beträgt, lautet die Erlösfunktion $E(x) = 50x$

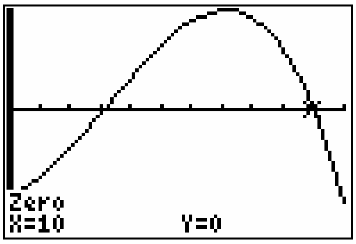
Die Gewinnfunktion beträgt
$G(x) = E(x) - K(x) = 50x - \left(x^3 - 10x^2 + 40x + 100\right) = -x^3 + 10x^2 + 10x - 100$

De Gewinnzone entspricht dem Intervall, in dem G(x) > 0 ist.

Berechnung mit dem GTR:







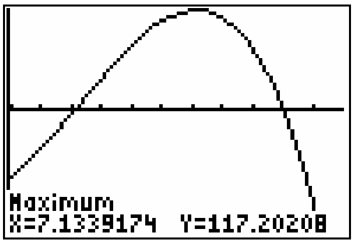
G(x) schneidet die x-Achse bei x = 3,16 und x = 10.

Ergebnis: Die Gewinnzone liegt im Intervall 3,16 ME < x < 10 ME.

Der maximale Gewinn entspricht dem y-Wert des Hochpunktes von G(x).

Die hinreichende Bedingung für ein relatives Maximum lautet $G'(x) = 0$ und $G''(x) < 0$.

GTR:



Ergebnis: Der maximale Gewinn beträgt 117,20 GE. Hierzu müssen x = 7,13 ME produziert und verkauft werden.

Prüfen Sie, ob der mittlere Gewinn im Bereich der Gewinnzone 50% des maximalen Gewinns übersteigt.

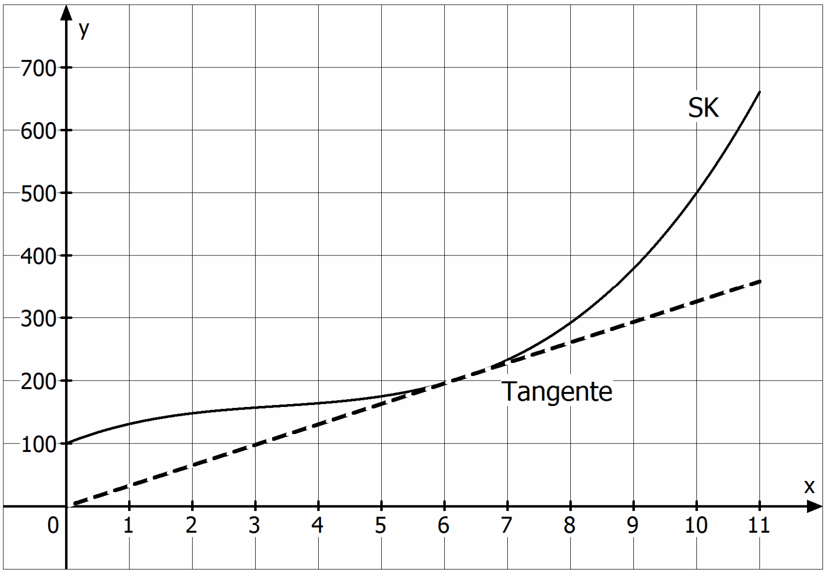
Der mittlere Gewinn in der Gewinnzone beträgt $\frac{1}{10 - 3{,}16} \cdot \int_{3{,}16}^{10} G(x)dx = 75{,}29$ GE.

50% des maximalen Gewinns sind $0{,}5 \cdot 117{,}20 = 58{,}6$ GE.

Ergebnis: Der mittlere Gewinn in der Gewinnzone ist größer als 50% des maximalen Gewinns. Die Werte unterscheiden sich um 16,69 GE.

1.3

Zeichnen Sie diese Tangente ein.

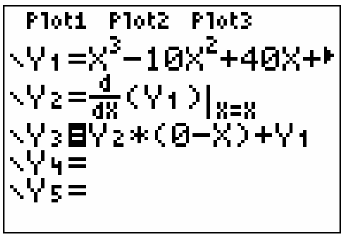


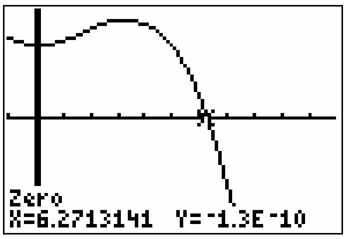
Ermitteln Sie rechnerisch die "langfristige Preisuntergrenze".

Gesucht ist die Steigung der Tangente an das Schaubild SK, die durch O(0/0) verläuft.

Allgemeine Tangentengleichung: $y = K'(u) \cdot (x-u) + K(u)$
Einsetzen des Punktes O(0/0): $0 = K'(u) \cdot (0-u) + K(u)$

Berechnung von u mit dem GTR:





Die Tangente berührt das Schaubild SK an der Stelle u = 6,271.
Die Tangentensteigung beträgt $K'(6{,}271) = 32{,}56$.

Ergebnis: Die langfristige Preisuntergrenze beträgt 32,56 GE.