Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2010 Teil 4, Lineare Optimierung, Aufgabe 2
Baden-Württemberg

2.1
Ein Supermarkt verkauft in seiner Backwarenabteilung Brötchen, die von zwei Lieferanten A und B stammen. Pro Tag werden höchstens 900 Brötchen benötigt. Auf Grund der bestehenden Lieferverträge muss der Supermarkt von A mindestens 150 und von B mindestens 100 Brötchen pro Tag abnehmen. Außerdem kann er von B höchstens doppelt so viele Brötchen beziehen wie von A. A kann maximal 400 Brötchen pro Tag liefern.

2.1.1
Beim Verkauf eines Brötchens von Lieferant A werden 10 Cent, beim Verkauf eines Brötchens von Lieferant B werden 15 Cent Gewinn erzielt.
Ermitteln Sie grafisch die täglichen Bestellmengen bei den beiden Lieferanten, so dass der Gewinn des Supermarktes maximal ist. (6 Punkte)

2.1.2
Die Geschäftsleitung des Supermarktes ändert die Verkaufspreise der Brötchen so, dass der Gewinn je Brötchen bei beiden Lieferanten gleich groß ist. Sie bestellt bei den beiden Lieferanten so viele Brötchen, dass der Gewinn maximal ist.
Geben Sie drei Möglichkeiten für solch eine Bestellung an.
Wie hoch muss der Gewinn je Brötchen mindestens sein, damit der maximale Gesamtgewinn mindestens 135 € beträgt ? (4 Punkte)

2.2
Die bisher bestehenden Lieferverträge laufen aus. Der Betreiber des Supermarktes denkt daran, im nächsten Jahr die Brötchen bei drei Lieferanten A, B und C selbst abzuholen. Pro Tag werden weiterhin höchstens 900 Brötchen benötigt.
Die Transportkosten je Brötchen betragen für die Abholung bei Lieferant A 2 Cent, bei B 3 Cent und bei C 4 Cent. Die Transportkosten sollen insgesamt höchstens 28 Euro betragen.
Außerdem sollen von Lieferant B höchstens 300 Brötchen pro Tag bezogen werden.
Beim Verkauf ergibt sich je Brötchen ein Gewinn von 10 Cent, falls es von A stammt, 12 Cent, falls es von B stammt, und 15 Cent, falls es von C stammt.
Der Gewinn soll maximal sein. Ermitteln Sie mit Hilfe des Simplex-Algorithmus die täglichen Bestellmengen bei den drei Lieferanten. Geben Sie den maximalen Gewinn an. (5 Punkte)

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2009 Teil 4, Lineare Optimierung, Lösung zu Aufgabe 2
Baden-Württemberg

2.1.1

Es sei x die Anzahl der Brötchen, die von Lieferant A stammen.
Es sei y die Anzahl der Brötchen, die von Lieferant B stammen.

Die Zielfunktion (die zu maximierende Gewinnfunktion) lautet

$Z = 0{,}1x + 0{,}15y \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{Z}{0{,}15}$

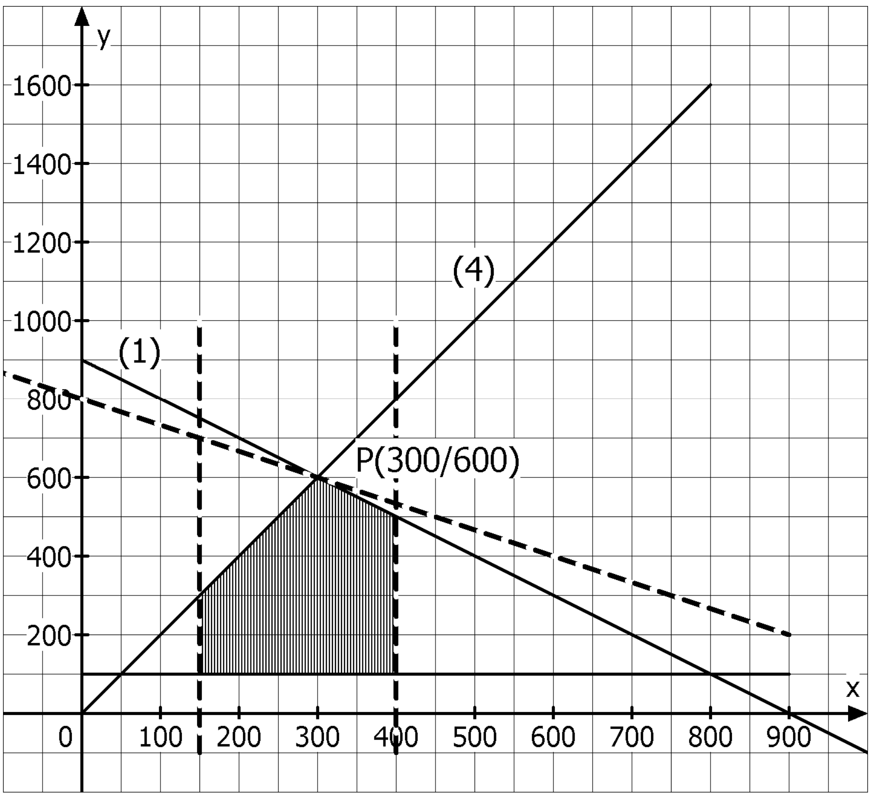
Die Nebenbedingungen lauten: $x, y \geq 0$

(1) $x + y \leq 900 \Rightarrow y \leq -x + 900$ (pro Tag maximal 900 Brötchen)

(2) $150 \leq x \leq 400$

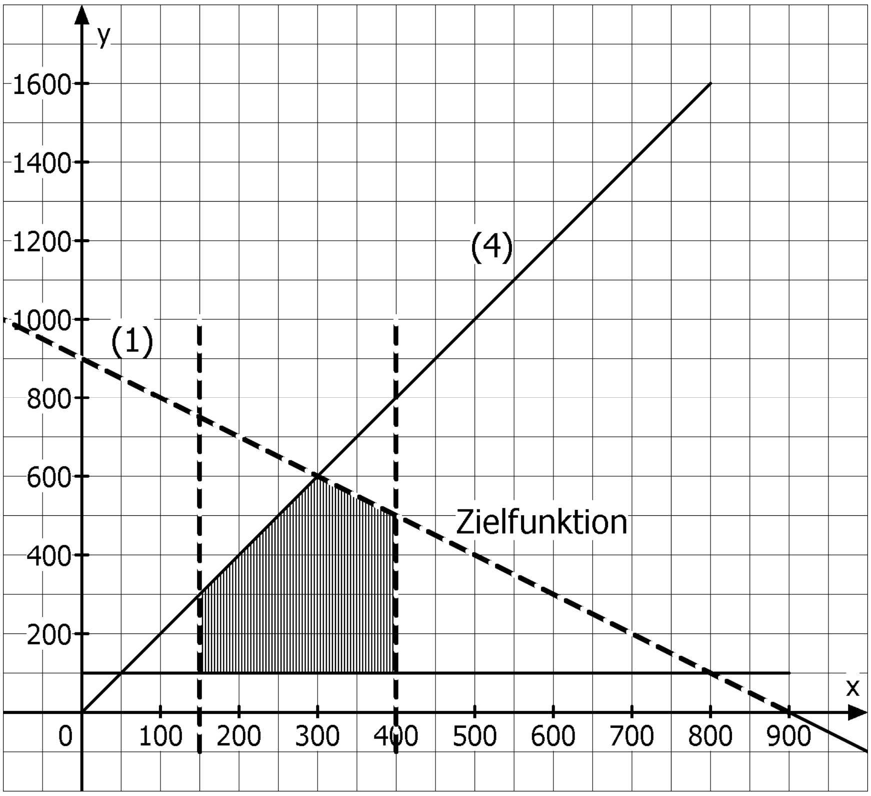
(3) $y \geq 100$

(4) $y \leq 2x$ (von B höchstens doppelt so viel wie von A)



Der schraffierte Bereich ist das Planungsvieleck.
Die gestrichelte Zielfunktionsgerade enthält den Punkt P(300/600).
Dies ist der optimale Punkt.
Wenn A 300 Brötchen liefert und B 600 Brötchen, ist der Gewinn mit
$Z = 0{,}1 \cdot 300 + 0{,}15 \cdot 600 = 120$ Euro maximal.

2.1.2
Der Gewinn sei bei beiden Brötchen k Euro.
Dann lautet die Gewinnfunktion $z = k \cdot x + k \cdot y \Rightarrow y = -x + \frac{Z}{k}$



Die gestrichelte Zielfunktionsgerade liegt genau auf der Gerade (1).
Die Zielfunktionsgerade hat nun mehrere Punkte mit dem Planungsvieleck gemeinsam.
Eine mögliche Lösung wäre x = 400 und y = 500.
Eine weitere Lösung wäre x = 300 und y = 600.
Eine weitere Lösung wäre x = 350 und y = 550.

In allen Fällen ergibt sich ein Gewinn von $Z = 900 \cdot k$.
Damit der maximale Gesamtgewinn 135 Euro beträgt muss der Gewinn je Brötchen
$k = \frac{135}{900} = 0{,}15$ Euro = 15 Cent betragen.

2.2
a = Anzahl der Brötchen, die bei Lieferant A bestellt werden
b = Anzahl der Brötchen, die bei Lieferant B bestellt werden
c = Anzahl der Brötchen, die bei Lieferant C bestellt werden

Die zu maximierende Gewinnfunktion lautet $Z = 0{,}1a + 0{,}12b + 0{,}15c$

Es gelten die folgenden Nebenbedingungen:
$a,b,c \geq 0$ (Nichtnegativitätsbedingung)
(1) $a + b + c \leq 900$ (maximal 900 Brötchen)
(2) $0{,}02a + 0{,}03b + 0{,}04c \leq 28$ (Transportkosten)
(3) $b \leq 300$

Aus dem Ungleichungssystem ergibt sich nach Einführung der Schlupfvariablen u_1, u_2, u_3 folgendes Simplextableau:

Nr.	a	b	c	u_1	u_2	u_3	Erg.	Quotient
(1)	1	1	1	1	0	0	900	900/1=900
(2)	0,02	0,03	**0,04**	0	1	0	28	28/0,04=700
(3)	0	1	0	0	0	1	300	--
(4)	0,1	0,12	0,15	0	0	0	Z	

Die größte positive Zahl in der letzten Zeile ist 0,15, der kleinste Quotient steht in der 2. Zeile. Somit ist 0,04 das Pivotelement.

Zunächst wird die 2.Zeile durch 0,04 dividiert:

Nr.	a	b	c	u_1	u_2	u_3	Erg.	Umformung
(1)	1	1	1	1	0	0	900	(1) – (2)
(2)	0,5	0,75	**1**	0	25	0	700	
(3)	0	1	0	0	0	1	300	
(4)	0,1	0,12	0,15	0	0	0	Z	(4) - $0{,}15 \cdot$ (2)

Nr.	a	b	c	u_1	u_2	u_3	Erg.	Quotient
(1)	**0,5**	0,25	0	1	-25	0	200	200/0,5=400
(2)	0,5	0,75	1	0	25	0	700	700/0,5=1400
(3)	0	1	0	0	0	1	300	--
(4)	0,025	0,0075	0	0	-3,75	0	Z-105	

Nun ist 0,5 das Pivotelement.

Division der ersten Zeile durch 0,5:

Nr.	a	b	c	u_1	u_2	u_3	Erg.	Umformung
(1)	**1**	0,5	0	2	-50	0	400	
(2)	0,5	0,75	1	0	25	0	700	(2) - $0{,}5 \cdot$ (1)
(3)	0	1	0	0	0	1	300	
(4)	0,025	0,0075	0	0	-3,75	0	Z-105	(4)- $0{,}025 \cdot$ (1)

Nr.	a	b	c	u_1	u_2	u_3	Erg.
(1)	1	0,5	0	2	-50	0	400
(2)	0	0,5	1	-1	50	0	500
(3)	0	1	0	0	0	1	300
(4)	0	-0,005	0	-0,05	-2,5	0	Z-115

Da nun alle Werte in der letzten Zeile negativ sind, ist das Optimum erreicht.
Es gilt a = 400, c = 500 und $u_3 = 300$.

Von Lieferant A werden 400 Brötchen und von C 500 Brötchen bestellt.
Der maximale Gewinn beträgt $Z = 0{,}1 \cdot 400 + 0{,}15 \cdot 500 = 115$ Euro.