Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2006 Teil 2, Lineare Optimierung, Aufgabe 1
Baden-Württemberg

1.1
Ein Unternehmer verleiht Fahrräder. Er möchte 40 neue Fahrräder kaufen. Er hat Angebote für die drei Fabrikate A, B und C. Vom Typ A möchte er mindestens 10 und vom Typ B mindestens 8 Fahrräder bestellen.
Erfahrungsgemäß fallen jährlich Wartungskosten an, die vom Fahrradtyp abhängen.
Die jährlichen Kosten für die Wartung pro Fahrrad und der Kaufpreis pro Fahrrad sind aus der Tabelle ersichtlich.

	Typ A	Typ B	Typ C
Wartungskosten pro Fahrrad in €	10	45	40
Kaufpreis pro Fahrrad in €	600	300	400

Die gesamten Wartungskosten für die neuen Fahrräder dürfen pro Jahr 1400 € nicht überschreiten. Die Anschaffungskosten sollen bei den gegeben Bedingungen möglichst klein sein.

1.1.1
Wie viele Fahrräder von jedem Typ muss der Unternehmer kaufen, damit die Anschaffungskosten minimal sind ? (9 Punkte)

1.1.2
Das Fahrrad vom Typ B wird nicht mehr hergestellt. Das Nachfolgemodell kostet 400 €. Die Wartungskosten für das Nachfolgemodell betragen weiterhin 45 € pro Fahrrad. Alle anderen Bedingungen bleiben unverändert. Der Unternehmer will die Anschaffungskosten weiterhin minimieren. Welche Möglichkeiten ergeben sich nun für das Unternehmen ? (6 Punkte)

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2006 Teil 2, Lineare Optimierung, Lösung zu Aufgabe 1
Baden-Württemberg

1.1.1
Der Händler kauft 3 verschiedene Fahrräder A, B und C.
Er kauft x Stück vom Typ A.
Er kauft y Stück vom Typ B.
Er kauft z Stück vom Typ C.

Folgende Bedingungen ergeben sich aus der Aufgabenstellung:
(1) $x + y + z = 40$ (insgesamt 40 Fahrräder)
(2) $x \geq 10$ (mindestens 10 Fahrräder vom Typ A)
(3) $y \geq 8$ (mindestens 8 Fahrräder vom Typ B)
(4) $z \geq 0$ (mindestens 0 Fahrräder vom Typ C)
(5) $10x + 45y + 40z \leq 1400$ (Wartungskosten maximal 1400 Euro)

Zu minimieren sind die Anschaffungskosten $K = 600x + 300y + 400z$ (5)

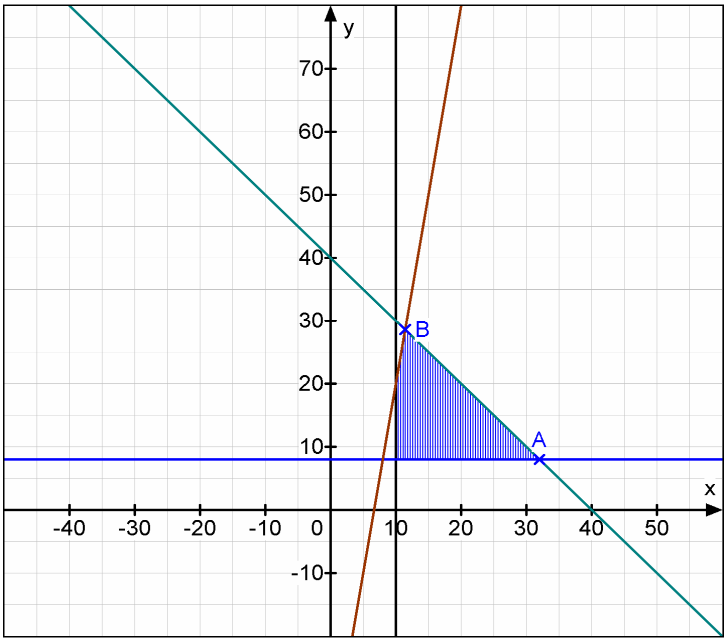
Aus (1) folgt: $z = 40 - x - y$
Eingesetzt in (5) ergibt $K = 600x + 300y + 400(40 - x - y) = 200x - 100y + 16000$
Aufgelöst nach y: $y = 2x + 160 - \frac{K}{100}$ (6)

Aus (5) ergibt sich mit (1): $10x + 45y + 40(40 - x - y) \leq 1400$
$-30x + 5y \leq -200 \Rightarrow y \leq 6x - 40$ (5*)
Aus (4) ergibt sich mit (1): $40 - x - y \geq 0 \Rightarrow y \leq 40 - x$ (4*)

Nun werden die Schaubilder der Bedingungen (2), (3), (4*) und (5*) in ein Koordinatensystem eingezeichnet.

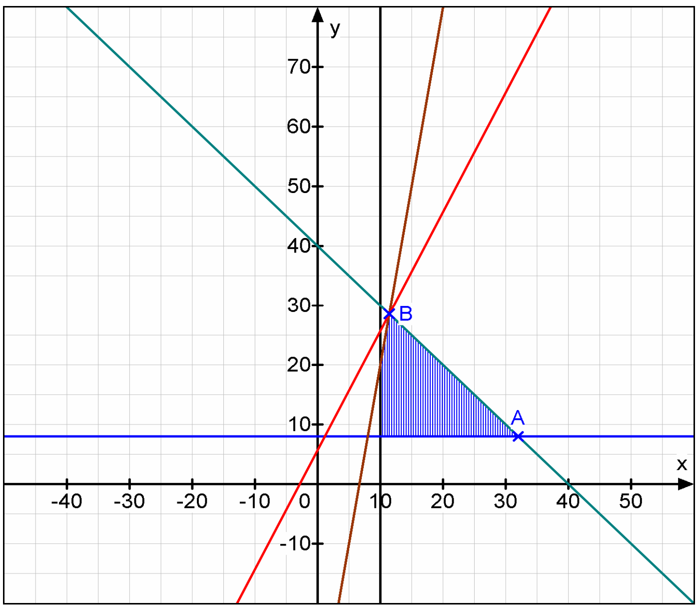
A ist der Schnittpunkt von (3) und (6*):
$8 = 40 - x \Rightarrow x = 32$ und damit gilt A(32/8).

B ist der Schnittpunkt von (4*) und (5*):
$6x - 40 = 40 - x \Rightarrow 7x = 80 \Rightarrow x = \frac{80}{7}$
Der y-Wert von B wird berechnet mit $40 - \frac{80}{7} = \frac{200}{7}$ und daraus folgt $B(\frac{80}{7} / \frac{200}{7})$
bzw. gerundet B(11,43/28,6).



Nun wird die Gerade $y = 2x + 160 - \frac{K}{100}$ mit noch unbekanntem y-Achsenabschnitt so eingezeichnet, dass dieser möglichst groß wird (wenn K minimal werden soll, wird der y-Achsenabschnitt $160 - \frac{K}{100}$ möglichst groß) und die Gerade mit dem schraffierten Flächenstück noch einen Eckpunkt gemeinsam hat.

Die Gerade mit dem größten y-Achsenabschnitt geht durch B(11,43/28,6)



Da für x und y nur ganzzahlige Werte in Frage kommen, könnte gelten:

1.) x = 11 , y = 28 und damit z = 1:

Wartungskosten = $10 \cdot 11 + 45 \cdot 28 + 40 \cdot 1 = 1410$ Euro.

Da die Wartungskosten kleiner als 1400 Euro sein sollen, kommt diese Möglichkeit nicht in Frage.

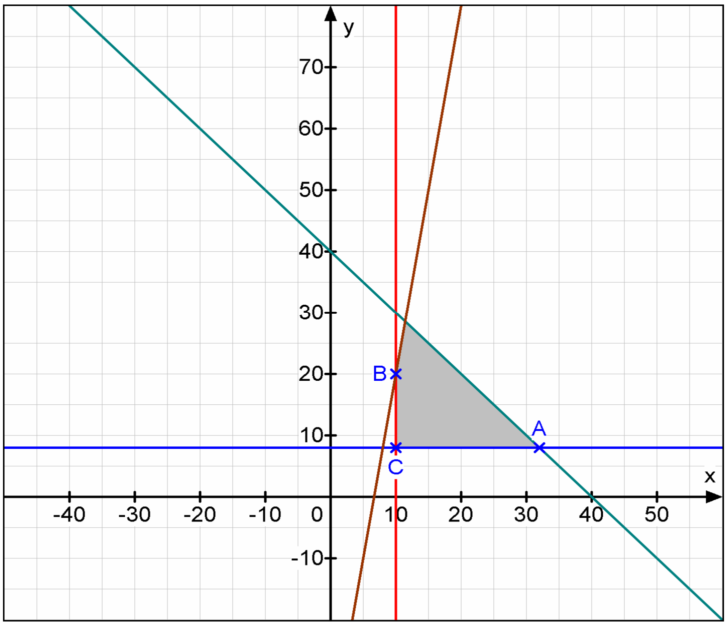
2.) x = 12, y = 28 und damit z = 0:

Wartungskosten = $10 \cdot 12 + 45 \cdot 28 + 40 \cdot 0 = 1380$ Euro und dies ist kleiner als 1400 Euro.
Die Kosten betragen dann $K = 600 \cdot 12 + 300 \cdot 28 = 15600$ Euro.

1.1.2
Der Preis vom Typ B beträgt nun 400 Euro, alle anderen Angaben bleiben gleich.
Die schraffierte Fläche ändert sich somit gegenüber 1.1.1 nicht.

Die neue Kostenfunktion lautet: $K = 600x + 400y + 400z$
$\Rightarrow K = 600x + 400y + 400(40 - x - y) = 200x + 1600$
Aufgelöst nach x ergibt sich $x = -80 + \frac{K}{200}$

Wenn K minimal ist, wird auch x minimal.



Für die Lösung kommen alle Punkte auf der Strecke BC in Frage, bei denen die Koordinaten ganzzahlig sind.
Es gilt B(10/20) und C(10/8).

Es werden somit 10 Fahrräder vom Typ A gekauft.
Für y gilt $8 \le y \le 20$ und für z gilt mit $z = 40 - x - y$ die Bedingung
$z = 40 - 10 - y = 30 - y$.