Abiturprüfung Mathematik 2010 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien – Analysis, Aufgabe 1

1.1
Für jedes $a \in \mathbb{R}^*$ ist die Funktion f_a gegeben durch

$$f_a(x) = ax \cdot (x+1)(x+3),\ x \in \mathbb{R}$$

Das Schaubild von f_a ist K_a.

1.1.1 (4 Punkte)
Zeichnen Sie K_{-2} und K_1 in ein gemeinsames Koordinatensystem.

1.1.2 (6 Punkte)
Berechnen Sie den Inhalt der gesamten Fläche, die von K_1 und der Normalen von K_1 im Ursprung eingeschlossen wird.

1.1.3 (5 Punkte)
Die Punkte A(-1/0), B(u/0) und $C(u / f_{-2}(u))$ bilden für -1 < u < 0 ein Dreieck.
Für welches u ist der Flächeninhalt dieses Dreiecks maximal ?

1.1.4 (8 Punkte)
Beschreiben Sie, wie K_a aus K_1 entsteht.
Geben Sie die Schnittpunkte von K_a mit den Koordinatenachsen an.
Bestimmen Sie die Hoch- und Tiefpunkte von K_a.

1.1.5 (6 Punkte)
Bestimmen Sie den Wert von a, für den der Wendepunkt von K_a exakt auf der Geraden mit der Gleichung y = 20 liegt.

1.1.6 (6 Punkte)
Für $a \in \mathbb{R}^*$ und $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion h gegeben durch

$$h(x) = ax(x+1)^n(x+3),\ \ x \in \mathbb{R}$$

Jemand behauptet, dass sich bei geeigneter Wahl von a und n die skizzierten Schaubilder ergeben.
Prüfen Sie diese Behauptung für jedes der folgenden Schaubilder und ermitteln Sie gegebenenfalls die passenden Werte für a und n.

Schaubild 1

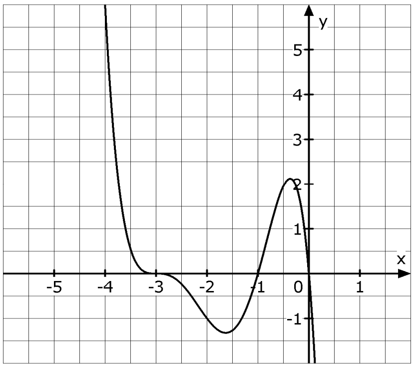


Schaubild 2

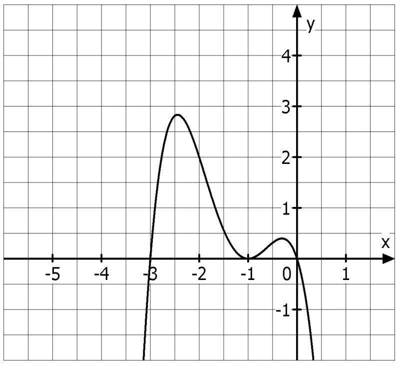
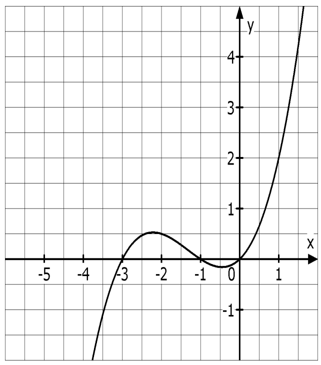


Schaubild 3



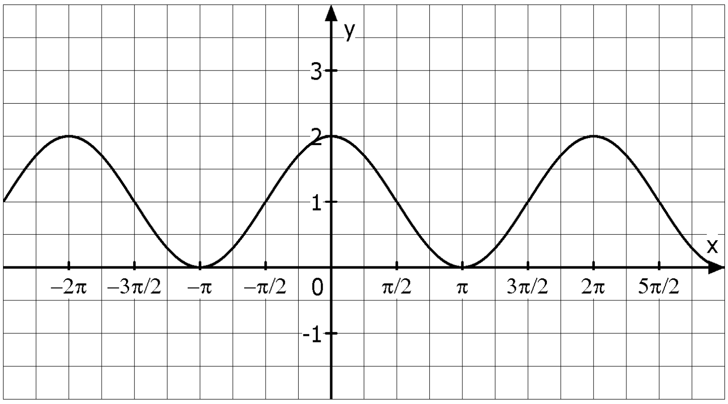
1.2
Gegeben ist die Funktion g durch $g(x) = 3e^{-x},\ \ x \in \mathbb{R}$

1.2.1 (4 Punkte)
Das Schaubild von g, die beiden Koordinatenachsen und die Gerade mit der Gleichung x = 2,5 begrenzen eine Fläche. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche exakt.

1.2.2 (6 Punkte)
Die Fläche aus 1.2.1 rotiert um die x-Achse. Dabei entsteht ein Rotationskörper. Der Rotationskörper wird so durchbohrt, dass die Bohrachse mit seiner Symmetrieachse übereinstimmt. Diese Bohrung hat den Durchmesser 1.
Welches Volumen hat der Restkörper ?

Abiturprüfung Mathematik 2010 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien – Analysis, Aufgabe 2

2.1
Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f mit $-2\pi < x < 2\pi$.



2.1.1 (5 Punkte)
Begründen Sie anhand der Abbildung, welche der folgenden Aussagen falsch oder wahr sind.

- f ist monoton steigend
- Das Schaubild von f ist symmetrisch zur y-Achse
- Das Schaubild von f hat in $P(\frac{\pi}{2} / f(\frac{\pi}{2}))$ dieselbe Steigung wie die erste Winkelhalbierende.

2.1.2 (5 Punkte)
Geben Sie einen Funktionsterm von f' an.
Die Schaubilder von f und f' schneiden sich auf der y-Achse. Bestimmen Sie f(x).

2.2
Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = x + \sin(x)$ für $x \in [-4;4]$.
K ist das Schaubild von g.

2.2.1 (3 Punkte)
Zeichnen Sie das Schaubild von K.

2.2.2 (9 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Wendepunkte von K auf der ersten Winkelhalbierenden liegen.
K und die erste Winkelhalbierende schließen im 1.Quadranten eine Fläche ein.
Bestimmen Sie eine Parallele zur y-Achse, welche diese Fläche im Verhältnis 1:2 teilt.

2.2.3 (5 Punkte)
Die Gerade mit der Gleichung x = u für $0 < u < \pi$ schneidet die erste Winkelhalbierende im Punkt P und das Schaubild K im Punkt Q. P und Q bilden zusammen mit dem Ursprung ein Dreieck. Für welchen Wert von u ist der Flächeninhalt dieses Dreiecks maximal ?

2.2.4 (7 Punkte)
Das Schaubild einer Polynomfunktion 4.Grades schneidet die x-Achse in A(-1/0) und verläuft durch B$(2/\frac{9}{5})$. Es hat im Ursprung einen Wendepunkt und schneidet dort das Schaubild K senkrecht. Bestimmen Sie einen Funktionsterm dieser Polynomfunktion.

2.3
Für jedes $t \in \mathbb{R}^*$ ist die Funktion h_t gegeben durch

$$h_t(x) = -\frac{1}{20}tx^4 + \frac{9}{20}tx^3 - \frac{1}{2}x, \quad x \in \mathbb{R}$$

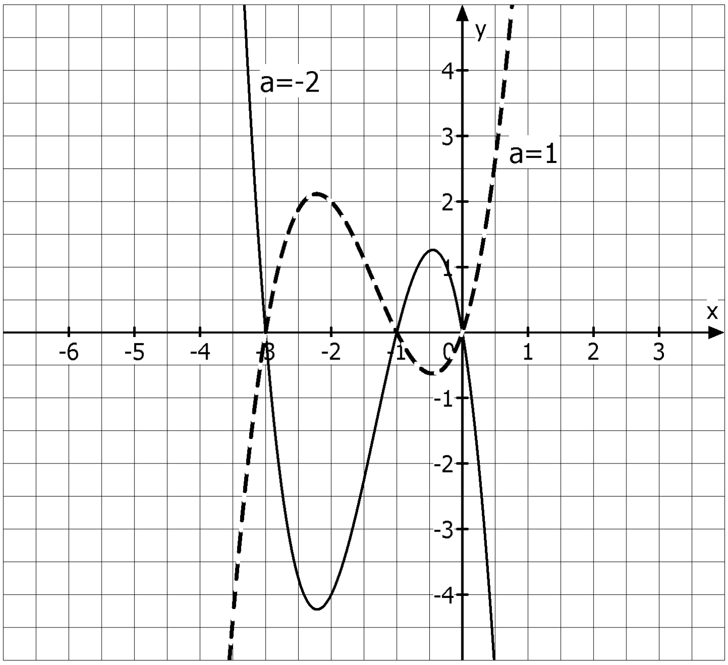
Das Schaubild von h_t heißt H_t.

2.3.1 (5 Punkte)
Bestimmen Sie die Bereiche, in denen h_1 monoton wachsend und gleichzeitig das zugehörige Schaubild rechtsgekrümmt ist.

2.3.2 (6 Punkte)
Prüfen Sie, ob es ein t gibt, so dass H_t einen Wendepunkt mit waagrechter Tangente hat.

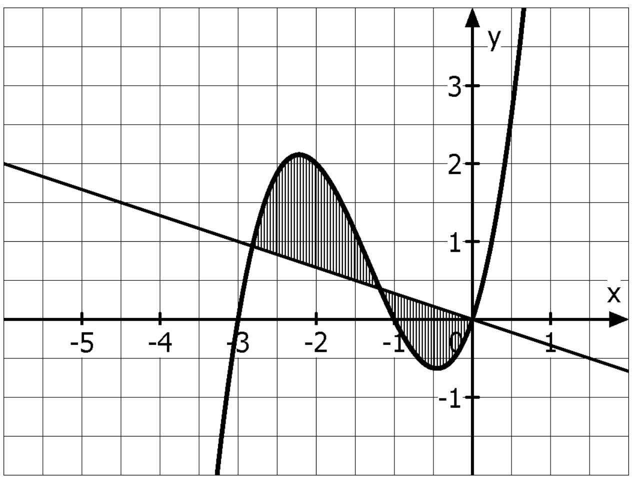
Abiturprüfung Mathematik 2010 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien – Analysis, Lösung Aufgabe 1

1.1.1
Skizze für a = -2 und a =1



1.1.2

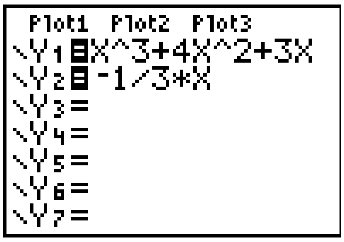
Berechnung der Normalengleichung von K_1 im Ursprung:
Es gilt $f_1(x) = x^3 + 4x^2 + 3x$ mit $f_1'(x) = 3x^2 + 8x + 3$
Tangentensteigung bei x = 0: $f_1'(0) = 3$
Normalensteigung bei x = 0: $m_{Norm} = -\frac{1}{m_{Tangente}} = -\frac{1}{3}$
Normalengleichung im Ursprung: $y = -\frac{1}{3}x$

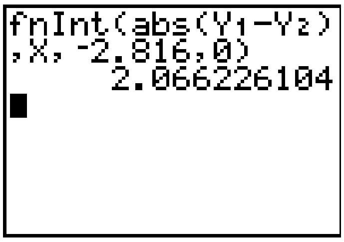


Die Normale und die Funktion f_1 schneiden sich bei x = -2,816 und x = -1,184 (GTR).

$$A_{gesamt} = \int_{-2,816}^{-1,184} \left(f_1(x) - (-\frac{1}{3}x) \right) dx + \int_{-1,184}^{0} \left(-\frac{1}{3}x - f_1(x) \right) dx$$

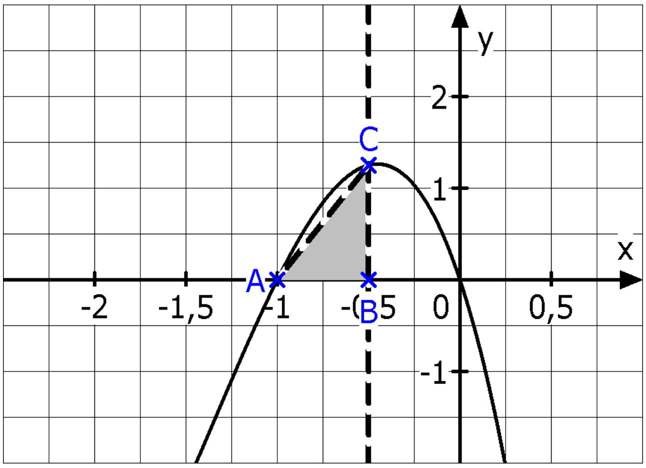
Mit dem GTR kann auch alternativ das Integral $A = \int_{-2,816}^{0} \left| f_1(x) - (-\frac{1}{3}x) \right| dx$ berechnet werden:





Die Fläche beträgt insgesamt A = 2,066 Flächeneinheiten.

1.1.3

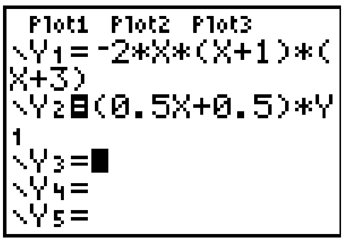


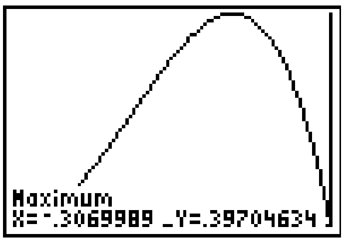
Die Fläche des Dreiecks beträgt

$$A(u) = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot (u - (-1)) \cdot (f_{-2}(u) - 0) = (0,5u + 0,5) \cdot f_{-2}(u)$$

Gesucht ist das Maximum der Funktion A(u) für -1 < u < 0.

Berechnung mit dem GTR:





Die Dreiecksfläche wird maximal für u = -0,307 und die maximale Dreiecksfläche beträgt A = 0,397 Flächeneinheiten.

1.1.4

K_a entsteht aus K_1 durch die Streckung/Stauchung von K_1 mit dem Faktor $|a|$ in y-Richtung.
Ist a < 0 erfolgt eine zusätzliche Spiegelung an der x-Achse.

Schnittpunkt mit der x-Achse: $f_a(x) = ax \cdot (x+1)(x+3) = 0$
Mit dem Satz vom Nullprodukt folgt daraus x = 0 oder x = -1 oder x = -3.
Die Nullstellen lauten $N_1(0/0)$, $N_2(-1/0)$, $N_3(-3/0)$.

Schnittpunkt mit der y-Achse: $f_a(0) = 0 \Rightarrow S_y(0/0) = N_1$

Extrempunkte von K_a:

$f_a(x) = ax \cdot (x^2 + 4x + 3) = ax^3 + 4ax^2 + 3ax$

$f_a'(x) = 3ax^2 + 8ax + 3a$ und $f_a''(x) = 6ax + 8a$

Hinreichende Bedingung für Extrempunkte: $f_a'(x) = 0$ und $f_a''(x) \neq 0$

$f_a'(x) = 0 \Rightarrow 3ax^2 + 8ax + 3a = 0 \Rightarrow 3x^2 + 8x + 3 = 0$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64-36}}{6} = \frac{-8 \pm \sqrt{28}}{6} = \frac{-8 \pm 2\cdot\sqrt{7}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{7}}{3}$$

$x_1 \approx -0{,}45$ und $x_2 \approx -2{,}22$

$f_a''(-0{,}45) = 5{,}3a$

Für a > 0 existiert bei x = -0,45 ein Tiefpunkt: TP(-0,45/-0,63a)
Für a < 0 existiert bei x = -0,45 ein Hochpunkt: HP(-0,45/-0,63a)

$f_a''(-2{,}22) = -5{,}32a$

Für a >0 existiert bei x = -2,22 ein Hochpunkt: HP(-2,22/2,11a)
Für a <0 existiert bei x = -2,22 ein Tiefpunkt: TP(-2,22/2,11a)

1.1.5
Berechnung des Wendepunktes:

Hinreichende Bedingung: $f_a''(x) = 0$ und $f_a'''(x) \neq 0$

$f_a''(x) = 0 \Rightarrow 6ax + 8a = 0 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$

$f_a'''(x) = 6a \Rightarrow f_a'''(-\frac{4}{3}) \neq 0 \Rightarrow WP(-\frac{4}{3} / \frac{20}{27}a)$

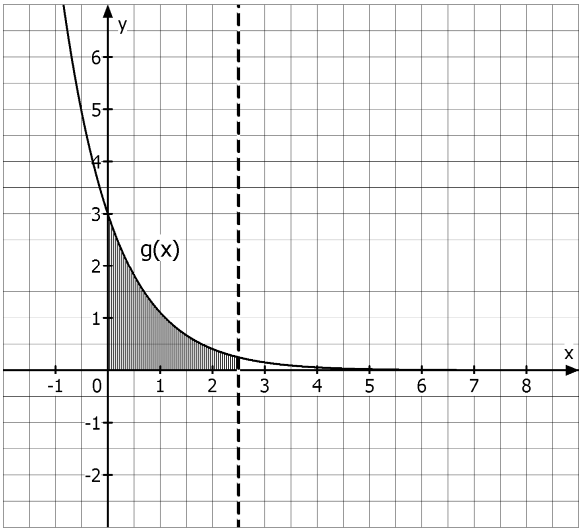
Damit der Wendepunkt auf der Geraden y = 20 liegt, muss gelten: $\frac{20}{27}a = 20 \Rightarrow a = 27$

1.1.6
Das Schaubild 1 hat bei x = -3 eine dreifache Nullstelle, da dort ein Sattelpunkt existiert.
Daher kann der dargestellte Funktionsterm dieses Schaubild nicht erzeugen.

Das Schaubild 2 hat bei x = -3 und x = 0 eine einfache Nullstelle und bei x = -1 eine doppelte Nullstelle, da dort ein Extrempunkt existiert.
Also ist n = 2.
Der Punkt P(-2/2) liegt auf dem Schaubild.
Einsetzen von P in die Funktionsgleichung ergibt: $f(-2) = (-2+3)\cdot(-2+1)^2\cdot(-2)\cdot a = 2$
$\Rightarrow a = -1$

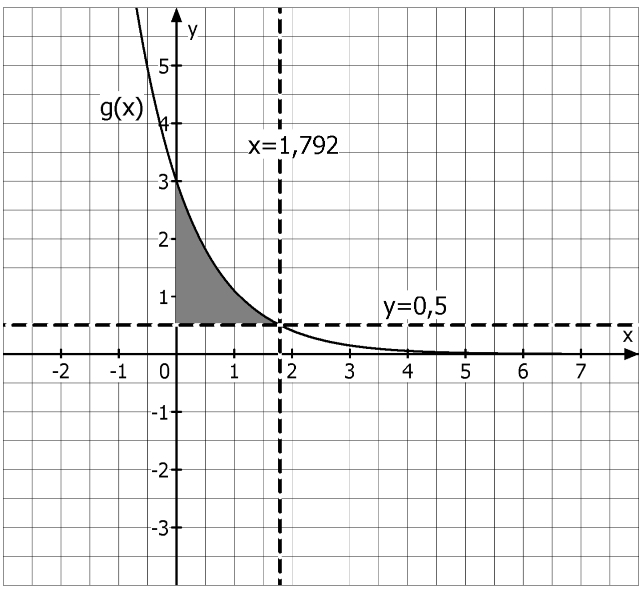
Das Schaubild 3 hat bei x = -3 und x = 0 eine einfache Nullstelle und bei x = -1 ebenfalls eine einfache Nullstelle. Also ist n = 1.
Der Punkt P(1/2) liegt auf dem Schaubild.
Einsetzen von P in die Funktionsgleichung ergibt: $f(1) = (1+3)\cdot(1+1)\cdot 1\cdot a = 2 \Rightarrow a = 0{,}25$

1.2.1



$$A = \int_0^{2,5} 3\cdot e^{-x}dx = \left[-3e^{-x}\right]_0^{2,5} = -3e^{-2,5} + 3e^0 = 2{,}754 \text{ Flächeneinheiten}$$

1.2.2



Die Bohrung entspricht einem Zylinder mit dem Radius r = 0,5.
Die Höhe des Zylinders entspricht der Stelle, an der das Schaubild von f(x) den y-Wert 0,5 (Zylinderradius) annimmt:

$$f(x) = 0{,}5 \Rightarrow 3e^{-x} = 0{,}5 \Rightarrow x = -\ln\frac{1}{6} = 1{,}792 \text{ (siehe Schaubild oben)}$$

Das Volumen des Körpers, der sich durch Rotation der grauen Fläche um die x-Achse ergibt, wird berechnet durch

$$V = \pi \cdot \int_0^{1{,}792} \left(3e^{-x}\right)^2 dx - V_{Zylinder}$$

Es gilt $V_{Zylinder} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 0{,}5^2 \cdot 1{,}792 = 1{,}407$

und $\pi \cdot \int_0^{1{,}792} \left(3e^{-x}\right)^2 dx = 13{,}745$ (GTR)

Das Volumen des Restkörpers beträgt V = 13,745 – 1,407 = 12,34 Volumeneinheiten.

Abiturprüfung Mathematik 2010 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien – Analysis, Lösung Aufgabe 2

2.1.1

f ist monoton steigend:
Diese Behauptung ist wahr, da das Schaubild von f' nie unterhalb der x-Achse liegt und somit $f'(x) \geq 0$ für alle x mit $-2\pi < x < 2\pi$ gilt. Dies ist die Bedingung dafür, dass f monoton steigt.

Das Schaubild von f ist symmetrisch zur y-Achse:
Diese Behauptung ist falsch, da das Schaubild von f monoton steigend ist und damit eine Symmetrie zur y-Achse nicht möglich ist.

Das Schaubild hat in P dieselbe Steigung wie die erste Winkelhalbierende:
Diese Behauptung ist wahr.
Es gilt $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, also ist die Steigung der Tangente in P gleich 1. Die erste Winkelhalbierende y = x besitzt ebenfalls die Steigung 1.

2.1.2

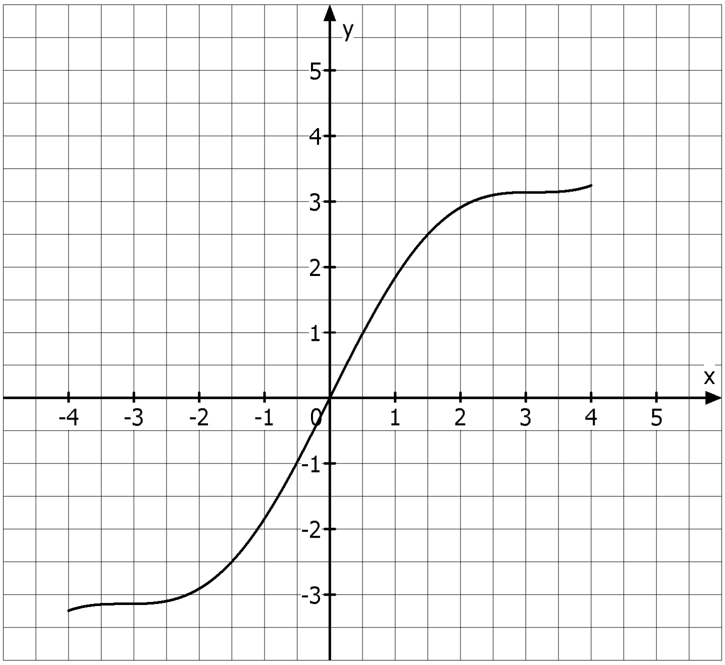
Die Funktion kann als allgemeine Kosinusfunktion dargestellt werden:
$f'(x) = a \cdot \cos(b \cdot (x - c)) + d$

Die Amplitude des Schaubildes ist a = 1. Das Schaubild ist um d = 1 nach oben verschoben.
Die Periode ist 2π, also ist b = 1.
Da das Schaubild nicht nach links oder rechts verschoben ist, ist c = 0.

Die Funktionsgleichung lautet $f'(x) = \cos(x) + 1$.

Daraus folgt $f(x) = \sin(x) + x + C$.
Da sich die Schaubilder von f und f' auf der y-Achse schneiden, muss f(0) = 2 sein.
$\Rightarrow f(0) = \sin(0) + 0 + C = 2 \Rightarrow C = 2$
Also ist $f(x) = \sin(x) + x + 2$

2.2.1
Schaubild K von g(x):



2.2.2
Berechnung der Wendepunkte von K:
Es gilt $g'(x) = \cos(x) + 1$ und $g''(x) = -\sin(x)$ und $g'''(x) = -\cos(x)$

Hinreichende Bedingung für Wendepunkte: $g''(x) = 0$ und $g'''(x) \neq 0$

$g''(x) = 0 \Rightarrow x = -\pi$ oder x = 0 oder $x = \pi$

$g'''(0) \neq 0 \Rightarrow W_1(0/0)$

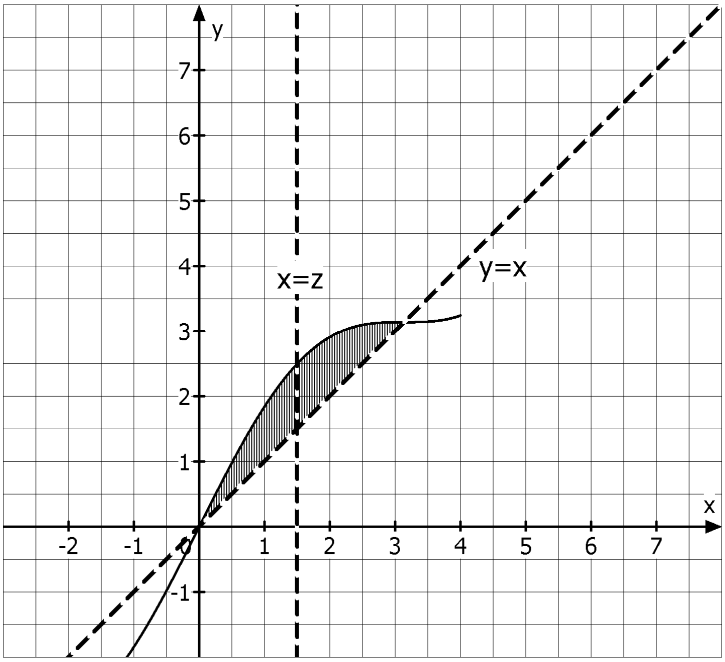
$g'''(-\pi) \neq 0 \Rightarrow W_2(-\pi/-\pi)$

$g'''(\pi) \neq 0 \Rightarrow W_3(\pi/\pi)$

Damit liegen alle drei Wendepunkte auf der ersten Winkelhalbierenden y = x, da ihre x- und y-Werte jeweils gleich sind.

Für die Bestimmung der Parallele wird zunächst die gesamte Fläche zwischen dem Schaubild von g(x) und der ersten Winkelhalbierenden y = x ermittelt (siehe Skizze unten):

$$A_{gesamt} = \int_0^{\pi} (x + \sin(x) - x)dx = \int_0^{\pi} \sin(x)dx = [-\cos(x)]_0^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2$$



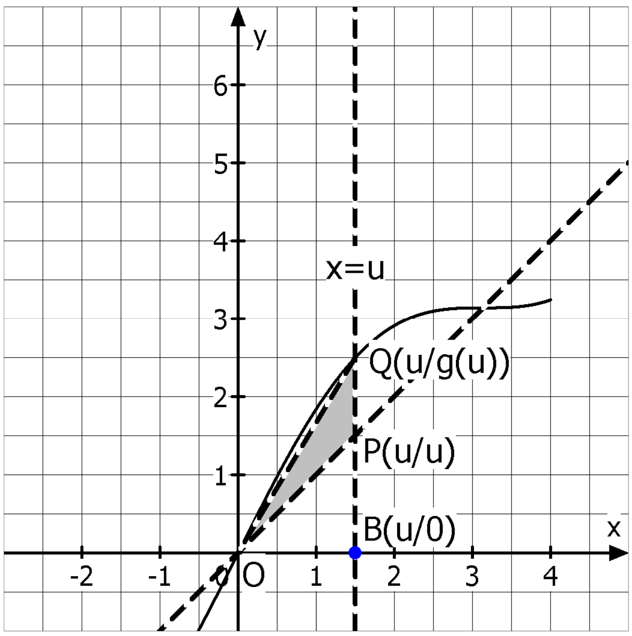
Nun ist die Parallele x = z zur y-Achse gesucht, so dass der linke Teil der Fläche $\frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$ beträgt:

$$\frac{2}{3} = \int_0^z (x + \sin(x) - x)dx = [-\cos(x)]_0^z = -\cos(z) + 1$$

$$\Rightarrow \cos(z) = \frac{1}{3} \Rightarrow z = 1{,}231$$

Die Gerade x = 1,231 teilt die Gesamtfläche im Verhältnis 1:2.

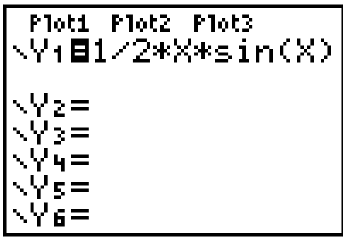
2.2.3

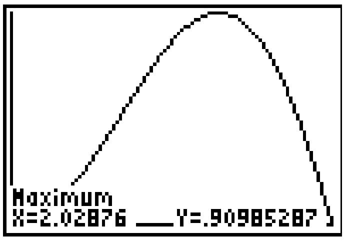


Formel für die Fläche des Dreiecks: $A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot \overline{PQ} \cdot \overline{OB}$

(Die Strecke $\overline{OB}$ ist die Höhe des Dreiecks OPQ, die außerhalb des Dreiecks liegt)
Es gilt $\overline{PQ} = g(u) - u = u + \sin(u) - u = \sin(u)$ und $\overline{OB} = u - 0 = u$

Die Flächeninhaltsfunktion lautet $A(u) = \frac{1}{2} \cdot \sin(u) \cdot u$
Bestimmung des Maximums für die Fläche des Dreiecks mit dem GTR:





Die Fläche des Dreiecks wird maximal für u = 2,03. Die maximale Fläche beträgt 0,91 Flächeneinheiten.

2.2.4
Die Funktion hat die Gleichung $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
Es gilt $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$ und $f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$
Folgende Bedingungen sind gegeben:
A(-1/0) liegt auf dem Schaubild: $f(-1) = 0 \Rightarrow a - b + c - d + e = 0$
B(2/$\frac{9}{5}$) liegt auf dem Schaubild: $f(2) = \frac{9}{5} \Rightarrow 16a + 8b + 4c + 2d + e = \frac{9}{5}$
O(0/0) liegt auf dem Schaubild: $f(0) = 0 \Rightarrow e = 0$ (*)
Wendestelle bei x = 0: $f''(0) = 0 \Rightarrow 2c = 0 \Rightarrow c = 0$ (**)
Senkrechter Schnitt bei x = 0: $f'(0) \cdot g'(0) = -1 \Rightarrow d \cdot 2 = -1 \Rightarrow d = -0{,}5$ (***)

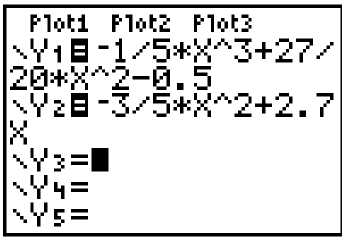
Unter Berücksichtigung von (*), (**) und (***) ergibt sich das Gleichungssystem:
$a - b + 0{,}5 = 0 \Rightarrow a - b = -0{,}5$
$16a + 8b - 1 = \frac{9}{5} \Rightarrow 16a + 8b = \frac{14}{5}$
Daraus ergibt sich a = -0,05 und b = 0,45.
Die Funktionsgleichung lautet $f(x) = -0{,}05x^4 + 0{,}45x^3 - 0{,}5x$

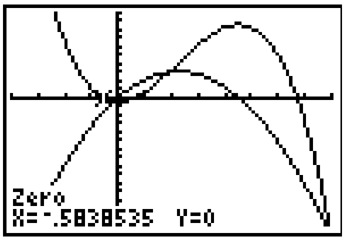
2.3.1

Gegeben ist die Funktion $h_1(x) = -\frac{1}{20}x^4 + \frac{9}{20}x^3 - \frac{1}{2}x$
Bedingung für monoton wachsend: $h_1'(x) \geq 0 \Rightarrow -\frac{1}{5}x^3 + \frac{27}{20}x^2 - \frac{1}{2} \geq 0$

Bedingung für Rechtskrümmung: $h_1''(x) < 0 \Rightarrow -\frac{3}{5}x^2 + \frac{27}{10}x < 0$

Mit dem GTR lässt man nun beide Ableitungsschaubilder einzeichnen:





Das Schaubild von f' verläuft oberhalb der x-Achse für x < -0,583.
Da das Schaubild von $f''(x)$ in diesem Bereich unterhalb der x-Achse verläuft, sind die beiden Bedingungen für x < -0,583 erfüllt.
Beide Bedingungen sind ebenfalls erfüllt für 4,5 < x < 6,69.

2.3.2

Berechnung es Wendepunktes:

Es gilt $h_t'(x) = -\frac{1}{5}tx^3 + \frac{27}{20}tx^2 - \frac{1}{2}$ und $h_t''(x) = -\frac{3}{5}tx^2 + \frac{27}{10}tx$ und $h_t'''(x) = -\frac{6}{5}tx + \frac{27}{10}t$

Hinreichende Bedingung für Wendepunkte: $h_t''(x) = 0$ und $h_t'''(x) \neq 0$

$h_t''(x) = 0 \Rightarrow -\frac{3}{5}tx^2 + \frac{27}{10}tx = 0 \Rightarrow tx \cdot \left(-\frac{3}{5}x + \frac{27}{10}\right) = 0 \Rightarrow$ x = 0 oder x = 4,5.

$h_t'''(0) = \frac{27}{10}t \neq 0 \Rightarrow W_1(0/0)$

$h_t'''(4{,}5) = -\frac{27}{10}t \neq 0 \Rightarrow W_2(4{,}5/\frac{6561}{320}t - 2{,}25)$

Es gilt $h_t'(0) = -0{,}5$, das heißt bei x = 0 liegt kein Wendepunkt mit waagrechter Tangente vor.

$h_t'(4{,}5) = \frac{729}{80}t - 0{,}5 = 0 \Rightarrow t = \frac{40}{729}$

Für t = $\frac{40}{729}$ besitzt das Schaubild bei x = 4,5 einen Wendepunkt mit waagrechter Tangente, also einen Sattelpunkt.