Hauptprüfung Abiturprüfung 2016 (ohne CAS)

Baden-Württemberg

Analysis

Hilfsmittel: GTR, Formelsammlung

berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Mai 2016

1.1

Die Funktion g hat die Gleichung $g(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{4}$ mit $x\in\mathbb{R}$.
Das Schaubild von g ist K.

1.1.1

Untersuchen Sie K auf Symmetrie.
Berechnen Sie die exakten Koordinaten der Extrempunkte von K.
Zeichnen Sie K. (8 Punkte)

1.1.2

Die beiden Wendetangenten begrenzen mit K eine Fläche.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche mit einer Stammfunktion. (7 Punkte)

1.1.3

Die Punkte A(-u/0), B(u/0), $C(u\,/\,g(u))$ und D(-u/g(-u)) sind für jeden Wert von u mit $0{,}1\le u\le 0{,}9$ die Eckpunkte eines Rechtecks R.
Bestimmen Sie den Wert von u, sodass der Flächeninhalt von R maximal wird.
(6 Punkte)

1.1.4

Betrachten Sie nun die Funktion w mit $w(x)=-4x^2+4$ für $x\in\mathbb{R}$.
Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte der Schaubilder von g und w.

Das Flächenstück, das von den beiden Saubildern eingeschlossen wird, rotiert um die x-Achse. Bestimmen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.
(6 Punkte)

1.2

Für jedes $t>0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x)=\sin\left(\frac{\pi}{t}x\right)+t$; $x\in\mathbb{R}$.
Das Schaubild von f_t ist C_t.

1.2.1

Bestimmen Sie die Periode vom f_2.
Zeichnen Sie C_2 für $-2\le x\le 6$. (5 Punkte)

1.2.2

Im Kurvenpunkt $W(t\,|\,t)$ wird die Tangente an C_t angelegt.
Bestimmen Sie t, sodass diese Tangente parallel zur Geraden mit der Gleichung $y = -x$ ist.
(4 Punkte)

1.2.3

Für welche Werte von t besitzen die Schaubilder der Stammfunktion von f_t Extrempunkte?
Begründen Sie Ihre Entscheidung. (3 Punkte)

1.3

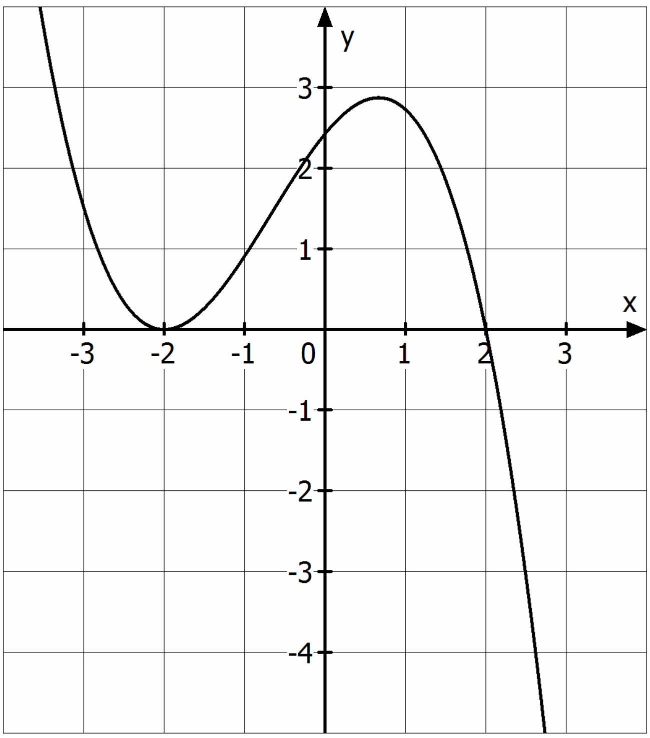
Die folgende Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion h.
Überprüfen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.
Begründen Sie.

(1) Die erste Ableitung von h nimmt für $0 < x < 2$ nur positive Werte an.

(2) $3 < \int_0^2 h(x)\,dx < 6$

(3) Die zweite Ableitung von h wechselt im Bereich $-2 < x < 1$ das Vorzeichen von plus nach minus.

(6 Punkte)



Lösungen

1.1.1

Untersuchung auf Symmetrie:
Die Funktionsgleichung besitzt nur gerade Hochzahlen, somit ist das Schaubild K symmetrisch zur y-Achse

Eine andere Begründung der Symmetrie wäre der Nachweis der Formel $g(-x) = g(x)$.

Extrempunkte von K:

$$g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{4}$$
$$g'(x) = x^3 - 3x$$
$$g''(x) = 3x^2 - 3$$

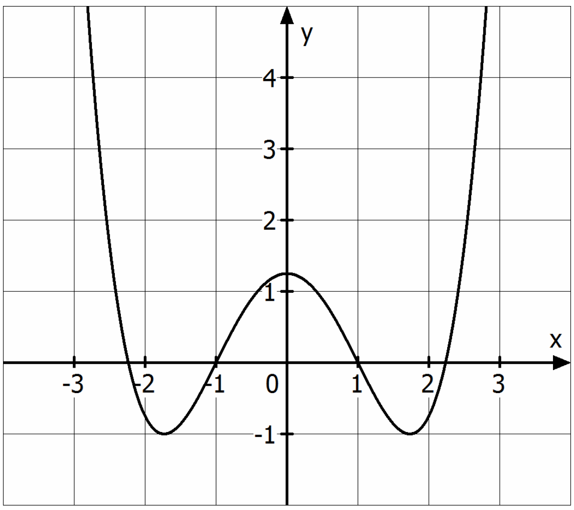
Hinreichende Bedingung: $g'(x) = 0$ und $g''(x) \neq 0$

$x^3 - 3x = 0 \Rightarrow x \cdot (x^2 - 3) = 0$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt
Gleichung I): x = 0
Gleichung II): $x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

$$g''(0) = -3 < 0 \Rightarrow H(0 / g(0)) \Rightarrow H(0 / \frac{5}{4})$$
$$g''(\sqrt{3}) = 6 > 0 \Rightarrow T(\sqrt{3} / g(\sqrt{3})) \Rightarrow T(\sqrt{3} / -1)$$

Wegen der Symmetrie zur y-Achse existiert ein weiterer Tiefpunkt $T^*(-\sqrt{3} / -1)$

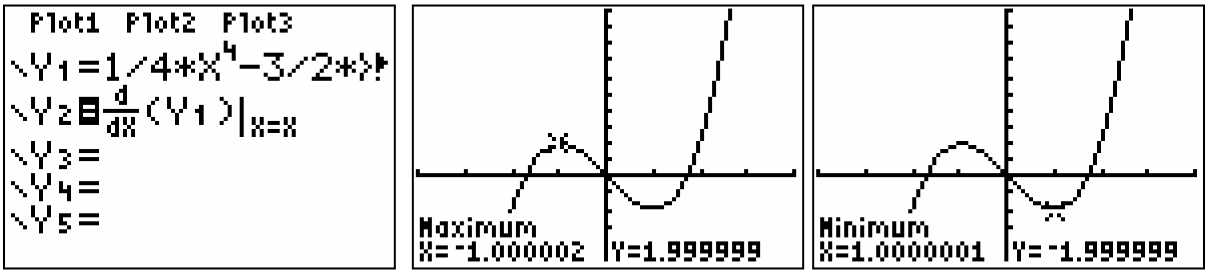
Zeichnung:



1.1.2

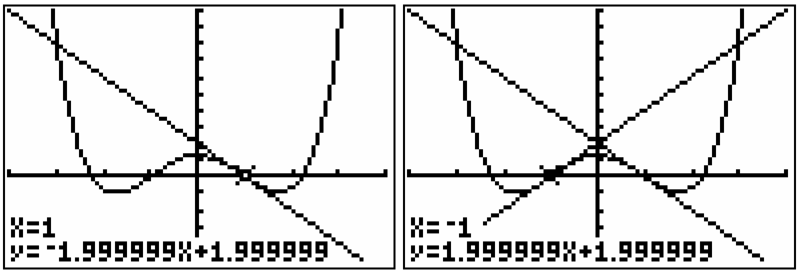
Hinreichende Bedingung für die Wendepunkte: $g''(x)=0$ und $g'''(x)\neq 0$

Berechnung der Wendepunkte mit dem GTR:



GTR: Das Schaubild K besitzt bei x = -1 und x = 1 Wendestellen.

Tangentengleichungen bei x = -1 und x = 1:



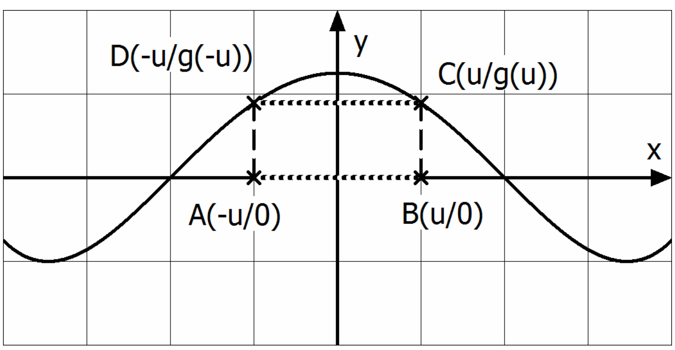
GTR:
Gleichung der Wendetangente bei x = -1: y = 2x + 2
Gleichung der Wendetangente bei x = 1: y = -2x + 2

Berechnung der Fläche zwischen K und den Wendetangenten:

$$A=2\cdot\int_0^1(-2x+2-(\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{4}))dx=2\cdot\int_0^1(-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{3}{4})dx$$

$$=2\cdot\left[-\frac{1}{20}x^5+\frac{1}{2}x^3-x^2+\frac{3}{4}x\right]_0^1=2\cdot(-\frac{1}{20}+\frac{1}{2}-1+\frac{3}{4}-0)=0{,}4$$

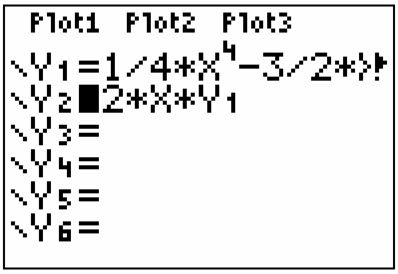
1.1.3

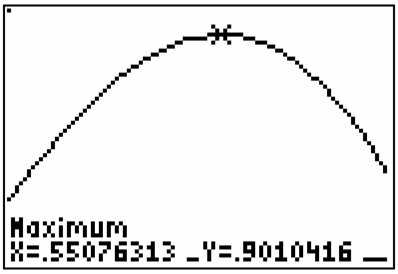


Fläche des Rechtecks: $A = \overline{AB} \cdot \overline{BC}$
Es gilt $\overline{AB} = u - (-u) = 2u$ und $\overline{BC} = g(u) - 0 = g(u)$

Die Zielfunktion lautet $A(u) = 2u \cdot g(u)$ mit $0{,}1 \le u \le 0{,}9$

Bestimmung des lokalen Maximums von A(u) mit dem GTR:





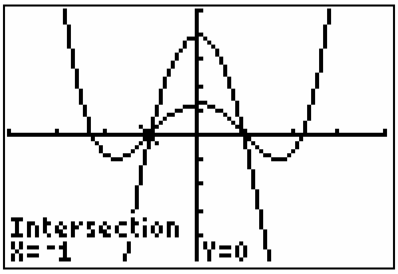
Das lokale Maximum wird erreicht für u = 0,55 mit A(0,55) = 0,901 FE.

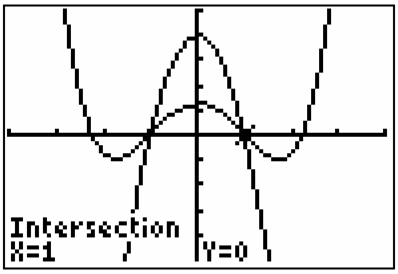
Untersuchung der Randwerte:
A(0,1) = 0,247 < 0,901
A(0,9) = 0,358 < 0,901.

Somit existiert bei u = 0,55 ein globales Maximum mit A(0,55) = 0,901 FE.

1.1.4

Schnittpunkte der beiden Schaubilder: $g(x) = w(x)$





GTR: Die Schaubilder schneiden sich in den Punkten P(-1/0) und Q(1/0).

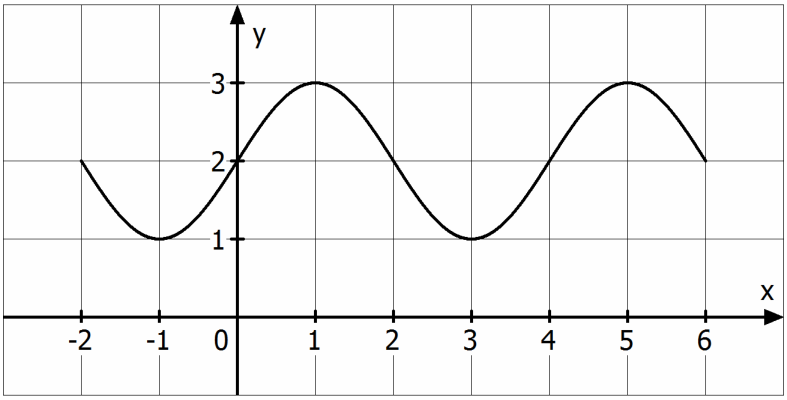
Rotationsvolumen: $V = \pi \cdot \int_{-1}^{1} (w(x)^2 - g(x)^2)dx \approx 48{,}7$ VE (GTR)

1.2.1

$f_2(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 2$

Periode: $p = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4$

Zeichnung:



1.2.2

Es gilt $f_t'(x) = \cos\left(\frac{\pi}{t}x\right) \cdot \frac{\pi}{t}$

Steigung der Tangente in W: $f_t'(t) = \cos\left(\frac{\pi}{t} \cdot t\right) \cdot \frac{\pi}{t} = -\frac{\pi}{t}$

Die Steigung der Geraden y = -x ist m = -1.

Nun soll gelten: $-\frac{\pi}{t} = -1 \Rightarrow t = \pi$

1.2.3

Eine Stammfunktion F_t von f_t besitzt Extrempunkte, wenn das Schaubild der Ableitungsfunktion f_t Nullstellen mit Vorzeichenwechsel besitzt.

Das Schaubild von f_t nimmt y-Werte im Intervall $[-1+t\,;1+t]$ an.
Damit das Schaubild von f_t Nullstellen mit Vorzeichenwechsel besitzt, muss gelten:
$-1+t<0$ (*) und $1+t>0$ (**)

Aus (*) folgt $t<1$
Aus (**) folgt $t>-1$

Fazit: Für $-1<t<1$ besitzen die Schaubilder der Stammfunktionen Extrempunkte.

1.3

(1) Die Aussage ist falsch.
Die erste Ableitung von hist beispielsweise an der Stelle x = 1 negativ, da die Steigung der Tangente an das Schaubild von h an der Stelle x = 1 negativ ist.

(2) Die Aussage ist richtig.
Der Wert des Integrals stellt den Inhalt der Fläche zwischen dem Schaubild von h und der x-Achse im Intervall [0 ; 2] dar.

Anhand der Zeichnung erkennt man, dass der Inhalt der Fläche größer als 3 Kästchen aber kleiner als 6 Kästchen ist.

(3) Die Aussage ist richtig.
Die zweite Ableitung von h ist im Intervall -2 < x < 1 zunächst positiv, da das Schaubild von h linksgekrümmt ist.
Ungefähr bei x = -1 befindet sich die Wendestelle von h, bei der das Schaubild von einer Links- in eine Rechtskurve läuft.
Ab der Wendestelle ist die zweite Ableitung von h negativ.