Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG, BTG)
Hauptprüfung 2009 Teil 2, Stochastik, Aufgabe 1
Baden-Württemberg

1
Ein Stapel von 9 Spielkarten enthält 2 Asse, die restlichen Karten sind Buben.

1.1
Es werden nacheinander zufällig drei Karten aus dem Stapel gezogen und nicht zurückgelegt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die zweite gezogene Karte ein Bube ist.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die dritte gezogene Spielkarte ein Ass ist, wenn man weiß, dass die zweite gezogene Karte ein Bube war ?

(5 Punkte)

1.2
Ihnen wird folgendes Glücksspiel angeboten:
Es werden drei Karten nacheinander gezogen. Nach jedem Zug wird die gezogene Karte wieder in den Stapel gelegt und der Stapel wird neu gemischt. Für drei gezogene Asse erhalten Sie den zehnfachen Einsatz ausbezahlt, für genau zwei gezogene Asse den doppelten Einsatz und für genau ein gezogenes Ass den 1,5-fachen Einsatz.
Ist das Spiel bei einem Einsatz von 20 Cent fair ?

(6 Punkte)

1.3
Wie oft muss man aus dem Stapel eine Karte ziehen, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% mindestens ein Ass erhält, wenn jede gezogene Karte vor dem nächsten Zug wieder in den Stapel gelegt und der Stapel neu gemischt wird ?

(4 Punkte)

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG, BTG)
Hauptprüfung 2009 Teil 2, Stochastik, Lösung Aufgabe 1
Baden-Württemberg

1.1

Der Stapel besteht aus 2 Assen (=A) und 7 Buben (=B).

P(zweite gezogene Karte ist ein Bube) = P(BB) + P(AB) = $\frac{7}{9}\cdot\frac{6}{8}+\frac{2}{9}\cdot\frac{7}{8}=\frac{7}{9}$

Bei der zweiten Wahrscheinlichkeit, die zu berechnen ist, handelt es sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit.
Gegebene Bedingung: zweite gezogene Karte ist ein Bube

Ereignis A: Die dritte gezogene Karte ist ein Ass
Ereignis B: Die zweite gezogene Karte ist ein Bube

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(ABA,BBA)}{\frac{7}{9}}=\frac{\frac{2}{9}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{7}+\frac{7}{9}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{2}{7}}{\frac{7}{9}}=\frac{\frac{7}{36}}{\frac{7}{9}}=\frac{1}{4}$$

1.2
Um die Fairness des Spiels zu bewerten, muss der Erwartungswert des Auszahlungsbetrags ermittelt werden.

Das Ziehen der Karten erfolgt im Gegensatz zu 1.1 mit Zurücklegen !
Folgende Gewinnmöglichkeiten gibt es:

Ziehen von 3 Assen: Auszahlung 2 Euro mit Wahrscheinlichkeit $P(AAA)=\left(\frac{2}{9}\right)^3$

Ziehen von 2 Assen: Auszahlung 0,40 Euro mit Wahrsch. $P(AAB,ABA,BAA)=\left(\frac{2}{9}\right)^2\cdot\frac{7}{9}\cdot 3$

Ziehen von 1 As: Auszahlung 0,30 Euro mit Wahrscheinl. $P(ABB,BBA,BAB)=\left(\frac{7}{9}\right)^2\cdot\frac{2}{9}\cdot 3$

Ziehen von keinem As: Auszahlung 0 Euro mit Wahrscheinlichkeit $P(BBB)=\left(\frac{7}{9}\right)^3$

Erwartete Auszahlung = $\left(\frac{2}{9}\right)^3\cdot 2+\left(\frac{2}{9}\right)^2\cdot\frac{7}{9}\cdot 3\cdot 0{,}4+\left(\frac{7}{9}\right)^2\cdot\frac{2}{9}\cdot 3\cdot 0{,}30+\left(\frac{7}{9}\right)^3\cdot 0=0{,}189$ Euro

Da im Mittel nur 18,90 Cent ausbezahlt werden und der Einsatz 20 Cent beträgt, ist das Spiel nicht fair.

1.3

Es soll gelten: P(Ziehung von mindestens einem Ass bei n Ziehungen) > 0,99

$\Rightarrow 1 - P(\text{Ziehen keines Asses bei n Ziehungen}) > 0{,}99$

$\Rightarrow 1 - \left(\frac{7}{9}\right)^n > 0{,}99$

$\Rightarrow \left(\frac{7}{9}\right)^n < 0{,}01$

$\Rightarrow n \cdot \ln\frac{7}{9} < \ln 0{,}01 \Rightarrow n > \frac{\ln 0{,}01}{\ln\frac{7}{9}} = 18{,}3$

Man muss 19 mal ziehen, damit die Wahrscheinlichkeit für mindestens 1 Ass mehr als 99% beträgt.