

Hauptprüfung Abiturprüfung 2016 (ohne CAS)

Baden-Württemberg

Anwendungsorientierte Aufgabe 1

Hilfsmittel: GTR, Formelsammlung

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Mai 2016

1

Im Jahr 1986 gab es in Tschernobyl ein Reaktorunglück, bei dem die radioaktiven Isotope Cäsium- 137 und Plutonium- 241 freigesetzt wurden. Deren Radioaktivität ist noch immer messbar.

Im Folgenden entspricht der Zeitpunkt $t=0$ dem Jahr 1986, wobei t in den Jahren gemessen wird.

1.1

Die folgende Tabelle zeigt die geschätzten Werte für die nicht zerfallene Menge von Cäsium- 137 (in Gramm), welche auf der Fläche Deutschlands insgesamt zu den angegebenen Zeitpunkten vorhanden war.

Jahr	1986	1991	1996	2006
Cäsium- 137	230,00	204,91	182,55	144,89

Der Zerfall des vorhandenen Cäsium -137 soll durch eine Funktion m mit $m(t) = a \cdot b^t$; $t \geq 0$ beschrieben werden. Bestimmen Sie passende Werte für a und b .

(2 Punkte)

1.2

Die zum Zeitpunkt t vorhandene Menge Cäsium -137 in Gramm wird nun durch das Modell m_C mit $m_C(t) = 230 \cdot e^{-0,023t}$; $t \geq 0$ beschrieben.

Wie viel Prozent des ursprünglich vorhandenen Cäsium- 137 sind im Jahr 2016 noch vorhanden?

In welchem Jahr wird nur noch 1% der ursprünglichen Menge an Cäsium- 137 vorhanden sein ?

(3 Punkte)

1.3

Plutonium- 241 zerfällt zu Americium- 241, welches selbst auch radioaktiv ist und daher weiter zerfällt.

Die zum Zeitpunkt vorhandene Menge Americium- 241 in Milligramm wird durch das Modell m_A mit $m_A(t) = 200 \cdot (1 - e^{-0,048t}) \cdot e^{-0,0016t}$; $t \geq 0$ angenähert.

1.3.1

Zeichnen Sie das Schaubild der Funktion m_A für $0 \leq t \leq 200$.

Begründen Sie mit Hilfe des Schaubildes von m_A , dass Plutonium- 241 schneller zerfällt als Americium- 241.

(4 Punkte)

1.3.2

In welchem Jahr ist die Menge des vorhandenen Americium- 241 am größten?

Wie groß ist die maximale Menge ?

(2 Punkte)

1.3.3

Bestimmen Sie, wie viele Jahre nach dem Reaktorunglück die Menge des Americiums- 241 am stärksten abnimmt.

Jemand behauptet, dass ab diesem Zeitpunkt des Americium-241 weiter mit der maximalen Zerfallsgeschwindigkeit linear abnimmt.

In welchem Jahr wäre dann kein Americium-241 mehr vorhanden ?

(4 Punkte)

Lösungen

1.1

Ansatz: $m(t) = a \cdot b^t$

Die Berechnung der Parameter a und b erfolgt mit Hilfe der Regression:

L1	L2	L3	1
0	230	-----	
5	204.91		
10	182.55		
20	144.89		
-----	-----		
L1(t)=0			

ExpReg

$y = a \cdot b^x$
 $a = 230.0014094$
 $b = .9771593873$

Es ist $a = 230$ und $b = 0,9772$.

1.2

$$m_c(t) = 230 \cdot e^{-0,023t}$$

Menge von Cäsium-137 im Jahr 2016: $m_c(30) = 230 \cdot e^{-0,023 \cdot 30} = 115,36$ Gramm.

Es sind im Jahr 2016 noch $\frac{115,36}{230} \approx 0,502 = 50,2\%$ des ursprünglichen Cäsiums vorhanden.

1% der ursprünglichen Menge sind $0,01 \cdot 230 = 2,3$ Gramm.

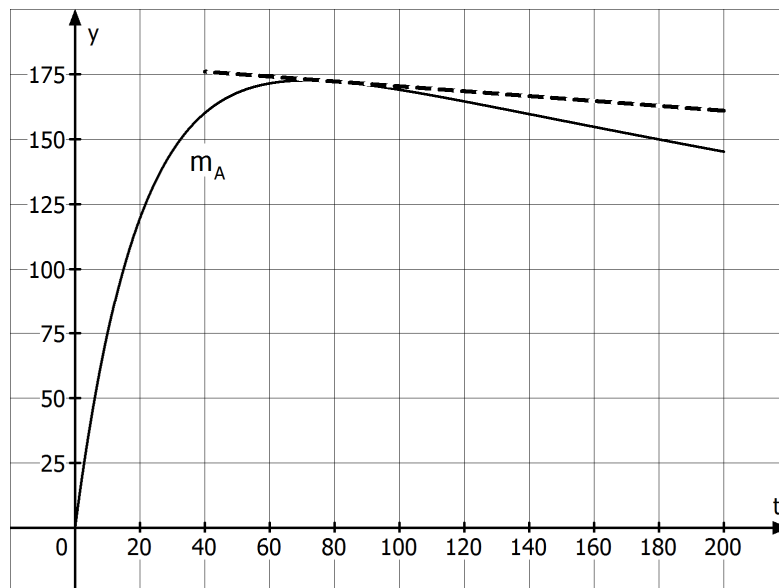
Ansatz: $m_c(t) = 2,3 \Rightarrow 2,3 = 230 \cdot e^{-0,023 \cdot t}$

$$\Rightarrow 0,01 = e^{-0,023t} \Rightarrow \ln(0,01) = -0,023t \Rightarrow t = \frac{\ln(0,01)}{-0,023} \approx 200$$

Nach 200 Jahren, also um Jahr 2186, wird nur noch 1% der ursprünglichen Cäsium-Menge vorhanden sein.

1.3.1

Zeichnung:



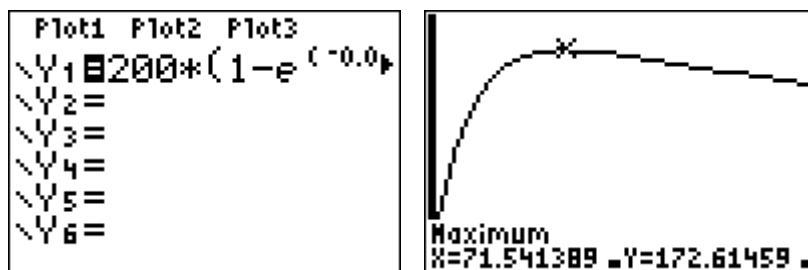
Begründung:

Da das Americium das Zerfallsprodukt von Plutonium ist, kann der Zerfall

1.3.2

Gesucht ist der Hochpunkt des Schaubildes von m_A .

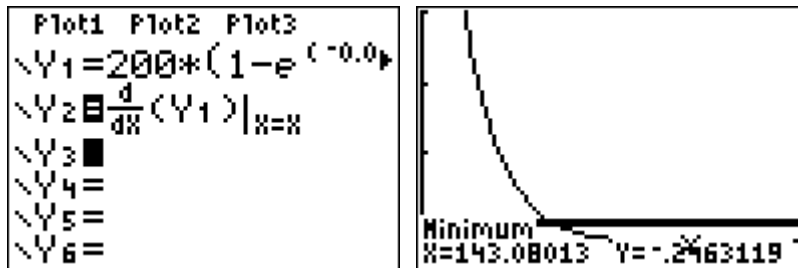
Hinreichende Bedingung: $m'_A(t) = 0$ und $m''_A(t) < 0$



Die größte Menge von Americium gibt es nach $t = 72$ Jahren, also im Jahr 2058.
Die maximale Menge beträgt 172,6 Gramm.

1.3.3

Die Menge des Americiums nimmt am stärksten ab, wenn die Ableitungsfunktion minimal wird.



Nach $t = 143$ Jahren nimmt die Menge des Americiums am stärksten ab mit einer Zerfallsgeschwindigkeit von 0,246 Gramm pro Jahr.

Nach $t = 143$ Jahren sind noch $m_A(143) = 158,9$ Gramm Americium vorhanden.

Wenn das Americium pro Jahr mit der maximalen Zerfallsgeschwindigkeit von 0,246 Gramm pro Jahr linear zerfällt, dauert es $\frac{158,9}{0,246} = 646$ Jahre, bis kein Americium mehr vorhanden ist.