Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2010 Teil 4, Wirtschaftliche Anwendungen, Aufgabe 2
Baden-Württemberg

2
Eine Volkswirtschaft ist in drei Sektoren A, B und C unterteilt, die nach dem Leontief-Modell miteinander verflochten sind. Gegeben ist die Input-Matrix A_t durch

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}01 & 0{,}02 \\ 0{,}02 & 0{,}05 & 0{,}09 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}01 \cdot t \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in [0;100]$$

Die Lieferungen untereinander, der Konsum sowie die Produktion werden in Geldeinheiten (GE) angegeben.

2.1
Für das erste Quartal des Jahres liegt folgende unvollständige Verflechtungstabelle vor:

	Sektor A	Sektor B	Sektor C	Markt	Produktion
Sektor A	0	55	260	a	5000
Sektor B	100	275	1170	3955	b
Sektor C	c	d	780	9020	13000

Bestimmen Sie a, b, c und d sowie den Wert des Parameters t für diese Situation.
(3 Punkte)

2.2
Für das zweite Quartal gilt t = 5. Der Wert der Konsumabgabe beträgt für Sektor A 1777 GE, für Sektor B 1245 GE und für Sektor C 8180 GE.
Wie hoch muss der Wert der Produktion jedes Sektors sein, um diese Nachfrage gerecht zu werden ?
Wie hoch ist dabei der Wert des Eigenverbrauchs von Sektor C ? (3 Punkte)

2.3
Im dritten Quartal gilt wiederum t = 5. Die Sektoren A und B produzieren Waren im gleichen Wert. Sektor C produziert Waren im fünffachen Wert der von Sektor A produzierten Waren. Insgesamt gehen aus den drei Sektoren Waren im Wert von 11040 GE an den Konsum.
Berechnen Sie die Werte von Produktion und Konsumabgabe jedes Sektors.
(5 Punkte)

2.4
Untersuchen Sie, für welchen Wert von t keine Leontief-Inverse existiert. (4 Punkte)

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2010 Teil 4, Wirtschaftliche Anwendungen, Lösungen Aufgabe 2
Baden-Württemberg

2.1

a = 5000 – 55 – 260 = 4685

b = 3955 + 1170 + 275 + 100 = 5500

Es gilt $0{,}2 \cdot 5000 = c = 1000$
Es gilt $0{,}4 \cdot b = d \Rightarrow 0{,}4 \cdot 5500 = 2200 \Rightarrow d = 2200$

Es gilt $0{,}01 \cdot t \cdot 13000 = 780 \Rightarrow t = 6$

2.2

Es gilt für die Inputmatrix $A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}01 & 0{,}02 \\ 0{,}02 & 0{,}05 & 0{,}09 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}05 \end{pmatrix}$ sowie für den

Konsumvektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1777 \\ 1245 \\ 8180 \end{pmatrix}$.

Die Leontief-Gleichung lautet $\vec{x} = (E - A_5)^{-1} \cdot \vec{y}$.

Es gilt $E - A_5 = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}01 & -0{,}02 \\ -0{,}02 & 0{,}95 & -0{,}09 \\ -0{,}2 & -0{,}4 & 0{,}95 \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = (E - A_5)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1777 \\ 1245 \\ 8180 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 2300 \\ 10000 \end{pmatrix}$ (GTR)

Sektor A muss für 2000 GE, Sektor B für 2300 GE und Sektor C für 10000 GE produzieren.
Der Eigenverbrauch von C beträgt $10000 \cdot 0{,}05 = 500$ GE.

2.3

Für den Konsumvektor gilt $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 11040 - y_1 - y_2 \end{pmatrix}$.

Für den Produktionsvektor gilt $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 5x \end{pmatrix}$.

Nun gilt $\vec{y} = (E - A_5) \cdot \vec{x} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 11040 - y_1 - y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}01 & -0{,}02 \\ -0{,}02 & 0{,}95 & -0{,}09 \\ -0{,}2 & -0{,}4 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ x \\ 5x \end{pmatrix}$

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llll} 0{,}89x & -y_1 & & = 0 \\ 0{,}48x & & -y_2 & = 0 \\ 4{,}15x & +y_1 & +y_2 & = 11040 \end{array}$$

Mit dem GTR ergibt sich als Lösung x = 2000, $y_1 = 1780$, $y_2 = 960$.

Damit gilt: Produktionsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 2000 \\ 10000 \end{pmatrix}$ und Konsumvektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1780 \\ 960 \\ 8300 \end{pmatrix}$

2.4

Untersuchung, für welche Werte von t keine Leontief-Inverse $(E - A_t)^{-1}$ existiert:

Hierzu wird die Matrix $E - A_t$ auf eine Stufenform gebracht.

$$E - A_t = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}01 & -0{,}02 \\ -0{,}02 & 0{,}95 & -0{,}09 \\ -0{,}2 & -0{,}4 & 1 - 0{,}01t \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot 0{,}02 \quad \mid \cdot 0{,}2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -0{,}01 & -0{,}02 \\ 0 & 0{,}9498 & -0{,}0904 \\ 0 & -0{,}402 & 0{,}996 - 0{,}01t \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid \cdot 0{,}402 \\ \mid \cdot 0{,}9498 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -0{,}01 & -0{,}02 \\ 0 & 0{,}9498 & -0{,}0904 \\ 0 & 0 & 0{,}90966 - 0{,}009498t \end{pmatrix}$$

Es existiert keine Leontief-Inverse, wenn eine der Hauptdiagonalelemente in der Stufenform den Wert 0 annimmt.

Es gilt $0{,}90966 - 0{,}009498t = 0 \Rightarrow t = \frac{151610}{1583} \approx 95{,}77$

Für diesen Wert von t existiert keine Leontief-Inverse.