Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2010 Teil 4, Lineare Optimierung, Aufgabe 1
Baden-Württemberg

1.1
Das Unternehmen Outchair GmbH stellt zwei Typen Kunststoffstühle S_1 und S_2 für den Außenbereich in zwei Produktionsschritten her. Für die Produktion der beiden Stühle stehen 720 Maschinenstunden, 75 Montagestunden und 1800 Mengeneinheiten (ME) des Werkstoffs Kunststoff zur Verfügung. Die Angaben in der folgenden Tabelle beziehen sich jeweils auf die Produktion eines Stuhls.

	S_1	S_2
Maschinenstunden	1,8	1,2
Kunststoff in ME	3	6
Montagestunden	0	0,3

Für S_1 fallen Stückkosten in Höhe von 15 Geldeinheiten (GE) und für S_2 in Höhe von 24 GE an. Die Outchair GmbH verkauft einen Stuhl S_1 zu einem Preis von 18 GE und einen Stuhl S_2 für 28 GE.

1.1.1
Ermitteln Sie grafisch den maximalen Gewinn. (6 Punkte)

1.1.2
Der Preis von S_2 muss um 0,5 GE gesenkt werden. Untersuchen Sie, inwieweit die Outchair GmbH noch mit demselben maximalen Gewinn rechnen kann. Auf welchen Betrag darf der Preis von S_2 gesenkt werden, damit es sich für das Unternehmen noch lohnt, beide Stühle im Angebot zu behalten ? (5 Punkte)

1.2
Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & & -x_3 & = & a \\ & 2ax_2 & +x_3 & = & a+2 \\ 3x_1 & & +(2a-9)x_3 & = & a^2+2a-6 \end{array}$$

Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ hat dieses lineare Gleichungssystem keine Lösung, genau eine Lösung bzw. unendlich viele Lösungen ? (4 Punkte)

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2010 Teil 4, Lineare Optimierung, Lösung zu Aufgabe 1
Baden-Württemberg

1.1.1

Es sei x die Anzahl der produzierten Stühle S_1 und y die Anzahl der produzierten Stühle S_2.

Zu maximieren ist die Gewinnfunktion $Z = 3x + 4y \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{Z}{4}$

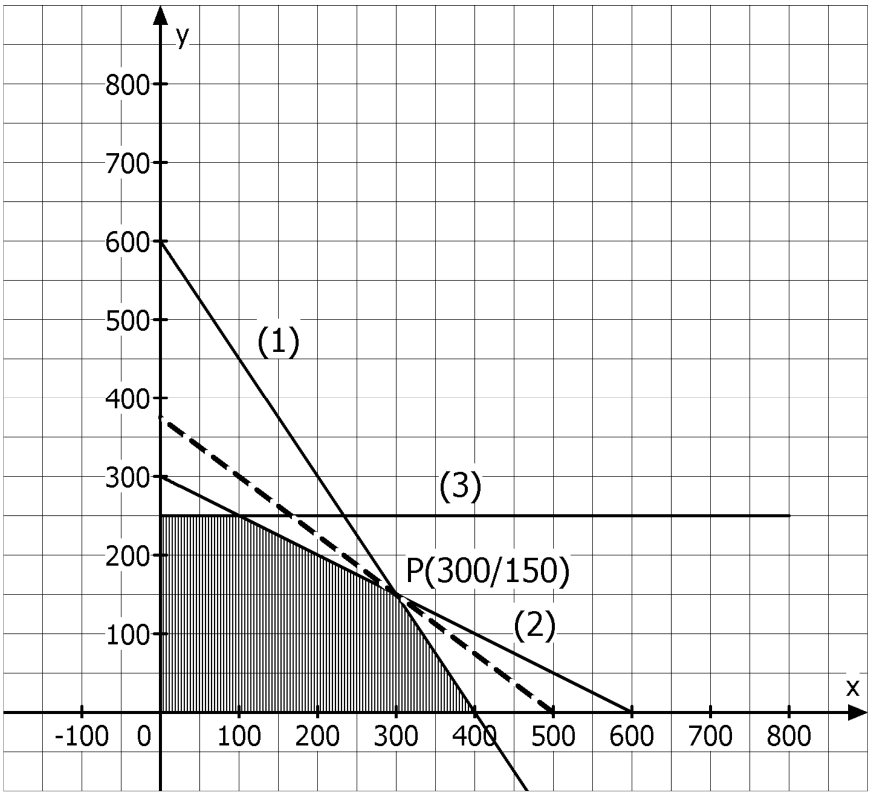
(Pro Stuhl S_1 entsteht ein Gewinn von 18 – 15 = 3 GE, pro Stuhl S_2 ein Gewinn von 28 – 24 = 4 GE)

Die Nebenbedingungen lauten: $x, y \geq 0$

(1) $1{,}8x + 1{,}2y \leq 720 \Rightarrow y \leq -1{,}5x + 600$ (Maschinenstunden)

(2) $3x + 6y \leq 1800 \Rightarrow y \leq -0{,}5x + 300$ (Kunststoff)

(3) $0{,}3y \leq 75 \Rightarrow y \leq 250$ (Montagestunden)



Die schraffierte Fläche ist das Planungsvieleck.
Die gestrichelte Gerade entspricht der Zielfunktion mit möglichst großem y-Achsenabschnitt.
Die Gerade schneidet das Planungsvieleck im Punkt P(300/150).

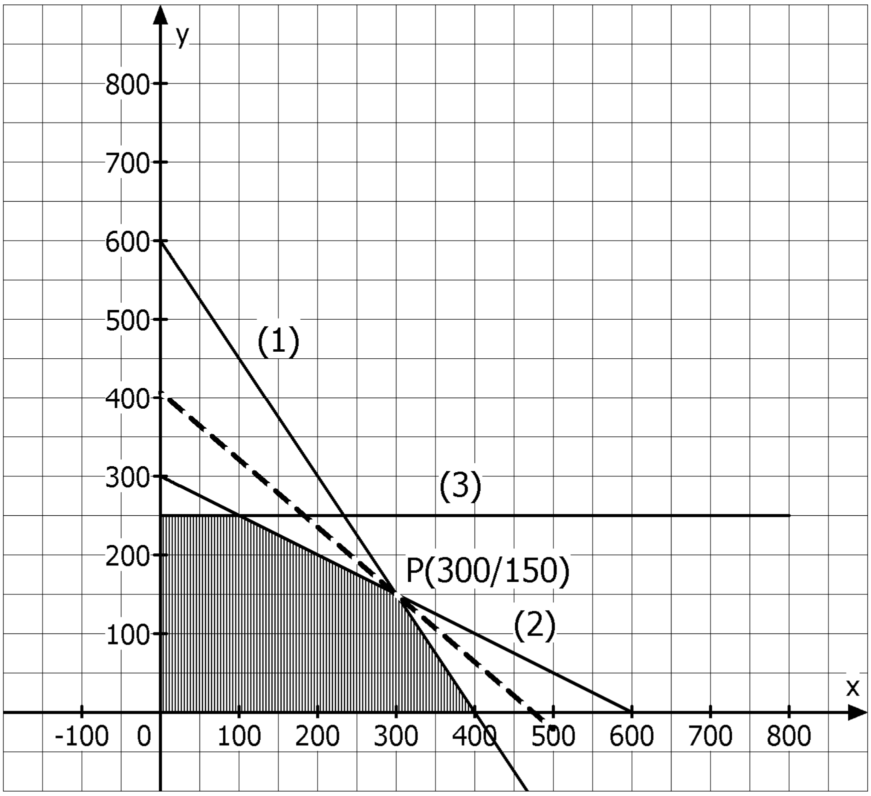
Der Gewinn wird maximal denn 300 Stühle S_1 und 150 Stühle S_2 hergestellt werden.
Der maximale Gewinn beträgt $Z = 3 \cdot 300 + 4 \cdot 150 = 1500$ Geldeinheiten.

1.1.2

Aufgrund der Preisreduzierung von S_2 ändert sich die Gewinnfunktion:

$$Z = 3x + 3{,}5y \Rightarrow y = -\frac{6}{7}x + \frac{Z}{3{,}5}$$

Durch Einzeichnen der neuen gestrichelten Zielfunktionsgerade mit Steigung $m = -\frac{6}{7}$ ergibt sich, dass diese ebenfalls durch P(300/150) verläuft.
Der Gewinn beträgt nun $Z = 3 \cdot 300 + 3{,}5 \cdot 150 = 1425$ Geldeinheiten.
Der Gewinn reduziert sich um 75 Euro.



Solange die gestrichelte Gerade noch flacher verläuft als die Gerade (1) (die die Steigung m = -1,5 besitzt), lohnt es sich, Stühle der Sorte S_2 herzustellen.

Der Preis für S_2 sei p: Dann gilt für die Gewinnfunktion $Z = 3x + p \cdot y \Rightarrow y = -\frac{3}{p}x + \frac{Z}{p}$

Für p = 2 besitzt die gestrichelte Gerade die gleiche Steigung wie die Gerade (1).
In diesem Fall wäre sowohl der Punkt Q(400/0) als auch P(300/150) optimal.

Für p < 2 Geldeinheiten lohnt es sich nicht mehr, Stühle der Sorte S_2 herzustellen.
Somit darf der Preis von S_2 auf 26 GE abgesenkt werden.

1.2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 2a & 1 & a+2 \\ 3 & 0 & 2a-9 & a^2+2a-6 \end{array}\right) \mid \cdot(-3)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 2a & 1 & a+2 \\ 0 & 0 & 2a-6 & a^2-a-6 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem besitzt genau eine Lösung, wenn die Hauptdiagonalelemente der Stufenform alle $\neq 0$ sind.
Es gilt $2a-6=0 \Rightarrow a=3$ bzw. $2a=0 \Rightarrow a=0$.
Das heißt für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$ ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar.

Sonderfall a = 3: Hierfür wird die letzte Zeile der Stufenform komplett zu einer Nullzeile. Das heißt, dass das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen besitzt.

Sonderfall a = 0: Aus der 3.Zeile folgt $-6x_3 = -6 \Rightarrow x_3 = 1$

Aus der 2.Zeile folgt: $x_3 = 2$

Da sich diese Lösungen widersprechen, besitzt das Gleichungssystem für a = 0 keine Lösung.