Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2009 Teil 4, Vektorgeometrie, Aufgabe 2
Baden-Württemberg

2.1

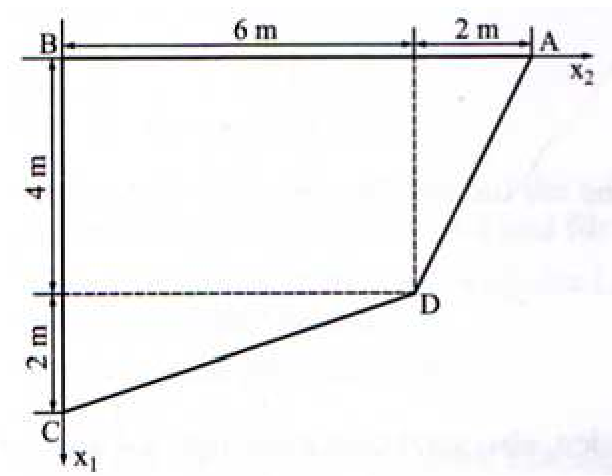
Für $t \in \mathbb{R}$ ist das folgende lineare Gleichungssystem gegeben:

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & +4x_2 & +tx_3 & = & 2 \\ & tx_2 & +2x_3 & = & 3t \\ tx_1 & +4tx_2 & +4tx_3 & = & 3t-4 \end{array}$$

2.1.1
Bestimmen Sie für t = 4 die Lösungsmenge des Gleichungssystems. (3 Punkte)

2.1.2
Für welche Werte von t hat das lineare Gleichungssystem
- keine Lösung
- unendlich viele Lösungen
- genau eine Lösung ? (4 Punkte)

2.2
Das Viereck ABCD ist der Grundriss einer Freilichtbühne (siehe Abb.).
Das Viereck ABCD liegt in der x_1x_2-Ebene.



Die Bühne soll ein schräg stehendes, ebenes Dach erhalten, dessen Ecken sich senkrecht über den Punkten A, B, C und D befinden.
Dazu werden an den Punkten A, B und C senkrechte Masten aufgestellt.
Die Masthöhen betragen 4m bei A, 2m bei B und 3m bei C.

2.2.1
Geben Sie eine Gleichung der Ebene an, in der das Dach liegt.
In welcher Höhe befindet sich die Ecke des Daches, die senkrecht über D liegt ?
(6 Punkte)

2.2.2
Das Dach wird durch einen Balken getragen, der die oberen Enden der bei A und C aufgestellten Masten verbindet.
Berechnen Sie die Länge des Balkens. (2 Punkte)

----

15 Punkte

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2009 Teil 4, Vektorgeometrie, Lösung zu Aufgabe 2
Baden-Württemberg

2.1

Für t = 4 ergibt sich folgendes LGS:

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +4x_2 & +4x_3 & = & 2 \\ & 4x_2 & +2x_3 & = & 12 \\ 4x_1 & +16x_2 & +16x_3 & = & 8 \end{array}$$

Mit Hilfe des GTR ergibt sich folgende Stufenform:

```
rref([A])
  [[1 0 2   -10]
   [0 1 .5 3   ]
   [0 0 0  0   ]]
```

Da die letzte Zeile eine Nullzeile ist (0 = 0), besitzt das Gleichungssystem mehr Variablen als Gleichungen.
Daher besitzt das LGS unendlich viele Lösungen.

Es sei $x_3 = u$ mit $u \in \mathbb{R}$
Aus der 2.Zeile folgt $x_2 = 3 - 0{,}5u$
Aus der 1.Zeile folgt $x_1 = -10 - 2u$

Die Lösungsmenge lautet $\mathbb{L}$ = { (-10-2u ; 3-0,5u ; u) mit $u \in \mathbb{R}$}

2.1.2

Zunächst wird das Gleichungssystem auf Stufenform gebracht:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & t & 2 \\ 0 & t & 2 & 3t \\ t & 4t & 4t & 3t-4 \end{array}\right) \quad | \cdot(-t)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & t & 2 \\ 0 & t & 2 & 3t \\ 0 & 0 & -t^2+4t & t-4 \end{array}\right)$$

Die Hauptdiagonalelemente lauten 1, t und $-t^2 + 4t$

Eines der Hauptdiagonalelemente wird 0 für t = 0 bzw für $-t^2+4t=0$ wobei die letzte Gleichung die Lösung t = 0 und t = 4 besitzt.

Somit gibt es für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\,;\,4\}$ eine eindeutige Lösung des LGS.

Für t = 4 lautet die dritte Zeile des LGS: 0 0 0 | 0

Diese Nullzeile bedeutet 0 = 0 und führt dazu, dass diese Zeile aus dem Gleichungssystem gestrichen werden kann.
Da danach nur noch 2 Gleichungen mit 3 Variablen übrig bleiben, besitzt das LGS für t = 4 unendlich viele Lösungen (wie bereits in 2.1 schon ermittelt).

Für t = 0 lautet die dritte Zeile des LGS: 0 0 0 | -4
Diese Zeile bedeutet 0 = -4 und ist somit ein Widerspruch. Das LGS ist nicht lösbar.

2.2.1

Zunächst werden die Koordinaten der Eckpunkte ABCD des Vierecks ermittelt.
B sei der Ursprung des Koordinatensystems, also B(0/0/0).
Anhand der angegebenen Maße ergibt sich:
A(0/8/0), C(6/0/0) und D(4/6/0)

Der Punkt E über A lautet E(0/8/4).
Der Punkt F über B lautet F(0/0/2).
Der Punkt G über C lautet G(6/0/3).
Der Punkt H über D lautet H(4/6/z).

Die Dachebene enthält die Punkte E, F und G.

Die Gleichung der Ebene, die die Punkte E,F,G beinhaltet, lautet

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Der Punkt H liegt ebenfalls auf der Dachebene E. Mit Hilfe einer Punktprobe kann die unbekannte Koordinate z berechnet werden:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aus der 1.Zeile folgt $4 = 6s \Rightarrow s = \frac{2}{3}$

Aus der 2.Zeile folgt $6 = 8 - 8r - 8 \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow r = -\frac{5}{12}$

Aus der 3.Zeile folgt: $z = 4 - 2 \cdot (-\frac{5}{12}) - \frac{2}{3} = \frac{25}{6}$

Die Ecke H des Daches über D liegt $\frac{25}{6}$m über D.

2.2.2

Gesucht ist der Abstand der Punkte E(0/8/4) und G(6/0/3).

Es gilt $\overrightarrow{EG} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}$ und die Länge des Vektors beträgt $\left|\overrightarrow{EG}\right| = \sqrt{6^2 + (-8)^2 + (-1)^2} = \sqrt{101}\,m$

Die Länge des Balkens ist ungefähr 10,05 m.