Berufliches Gymnasium (TG ohne CAS)
Hauptprüfung 2006 Teil 2, Vektorgeometrie, Aufgabe 2
Baden-Württemberg

2.1
Zwei Flugzeuge F_1 und F_2 fliegen mit jeweils konstanter Geschwindigkeit auf geradlinigen Flugbahnen. Die Position der Flugzeuge wird bezüglich eines Koordinatensystems mit der Längeneinheit 1 km angegeben. Die x_3-Koordinate gibt die Flughöhe an. Zum Zeitpunkt t = 0 (in Minuten) ist das Flugzeug F_1 im Punkt $P_1(0/0/0)$ und das Flugzeug F_2 im Punkt $P_2(-15/-30/8)$.
Nach 4 Minuten hat F_1 die Position $Q_1(16/16/4)$ erreicht.
F_2 befindet sich nach 5 Minuten an der Position $Q_2(30/30/8)$.

2.1.1
Welches Flugzeug ist schneller ?
Geben Sie für jedes Flugzeug eine Gleichung an, welche die Position in Abhängigkeit von der Zeit in Minuten beschreibt.
Nach welcher Zeit hat F_1 dieselbe Flughöhe wie F_2 erreicht ? (8 Punkte)

2.1.2
Untersuchen Sie, ob sich die Flugbahnen schneiden. (3 Punkte)

2.1.3
Bestimmen Sie den Abstand der beiden Flugzeuge in Abhängigkeit von der Zeit.
Zu welchem Zeitpunkt sind sich die beiden Flugzeuge am nächsten ?
Wie weit sind sie zu diesem Zeitpunkt voneinander entfernt ? (4 Punkte)

Berufliches Gymnasium (TG ohne CAS)
Hauptprüfung 2006 Teil 2, Vektorgeometrie, Lösung zu Aufgabe 2
Baden-Württemberg

2.1.1

Um die Geschwindigkeit beider Flugzeuge zu ermitteln, muss zunächst der Abstand der Anfangs- und Endpunkte der Flugzeuge ermittelt werden:

Flugzeug F_1:
Anfangspunkt $P_1(0/0/0)$ und Endpunkt $Q_1(16/16/4)$.

Es gilt $\overrightarrow{P_1Q_1} = \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $\left|\overrightarrow{P_1Q_1}\right| = \sqrt{16^2 + 16^2 + 4^2} = \sqrt{528} \approx 22{,}98$ km

Die Geschwindigkeit beträgt $v_1 = \frac{22{,}98\text{km}}{4\text{min}} = 5{,}74\frac{\text{km}}{\text{min}}$.

Flugzeug F_2:
Anfangspunkt $P_2(-15/-30/8)$ und Endpunkt $Q_2(30/30/8)$.

Es gilt $\overrightarrow{P_2Q_2} = \begin{pmatrix} 45 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\left|\overrightarrow{P_2Q_2}\right| = \sqrt{45^2 + 60^2 + 0^2} = \sqrt{5625} = 75$ km

Die Geschwindigkeit beträgt $v_2 = \frac{75\text{km}}{5\text{min}} = 15\frac{\text{km}}{\text{min}}$.

Somit ist das Flugzeug 2 schneller als das Flugzeug 1.

Geradengleichung der Flugbahnen der Flugzeuge:
Der Startpunkt des Flugzeugs entspricht dem Ortsvektor. Damit der Parameter t der Geradengleichung die Bedeutung der Zeit in Minuten bekommt, muss der Richtungsvektor so normiert werden, dass dieser die Richtungsänderung des Flugzeugs pro Minute beschreibt.

Für den Richtungsvektor von Flugzeug F_1 gilt daher $\frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{P_1Q_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Flugbahn von Flugzeug 1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, t in Minuten

Für den Richtungsvektor von Flugzeug F_2 gilt $\frac{1}{5} \cdot \overrightarrow{P_2Q_2} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Flugbahn von Flugzeug 2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -15 \\ -30 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$, t in Minuten

Die Flughöhe der Flugzeuge wird durch die x_3-Koordinate der Geradengleichungen beschrieben.
Das Flugzeug 2 hat als konstante Koordinate $x_3 = 8$ km, das heißt, dass dieses Flugzeug seine Flughöhe nicht ändert.
Für Flugzeug 1 gilt $x_3 = 0 + t$, das heißt, dass es pro Minute um 1 km steigt.
Für t = 8 (das heißt nach 8 Minuten) haben beide Flugzeuge die gleiche Flughöhe erreicht.

2.1.2
Die Geradengleichungen der beiden Flugbahnen haben keine vielfachen Richtungsvektoren. Das heißt, dass die Geraden entweder windschief sind oder sich schneiden. Dies wird durch Gleichsetzen der Geradengleichungen geprüft:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ -30 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$ (die Parameter müssen unterschiedlich sein !)

Aus der 3.Zeile folgt: t = 8.
Aus der 2.Zeile folgt dann: $32 = -30 + 12s \Rightarrow s = \frac{31}{6}$
Aus der 1.Zeile folgt dann: $32 = -15 + 9 \cdot \frac{31}{6}$ ist eine falsche Aussage.
Damit schneiden sich die Flugbahnen nicht, sie sind windschief.

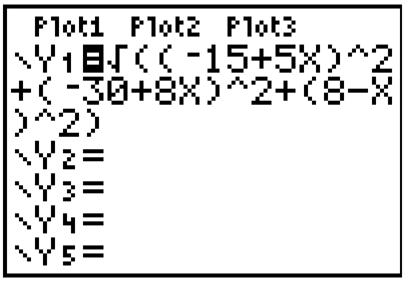
2.1.3
Nach t Minuten befindet sich das Flugzeug 1 im Punkt $P(4t / 4t / t)$
Nach t Minuten befindet sich das Flugzeug 2 im Punkt $Q(-15 + 9t / -30 + 12t / 8)$

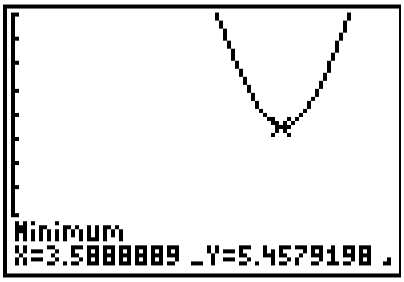
Die Punktkoordinaten ergeben sich durch die Übernahme der Zeilen der Geradengleichungen.

Zum Zeitpunkt t beträgt der Abstand der Flugzeuge

$$d(t) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\begin{pmatrix} -15 + 5t \\ -30 + 8t \\ 8 - t \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-15 + 5t)^2 + (-30 + 8t)^2 + (8 - t)^2}$$

Mit dem GTR muss nun das Minimum der Funktion d(t) bestimmt werden:





Für t = 3,59 (also nach 3 Minuten und 35,4 Sekunden) haben die Flugzeuge einen minimalen Abstand von 5,46 km voneinander.