Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG, BTG)
Hauptprüfung 2012 Teil 4, Lineare Optimierung, Aufgabe 2
Baden-Württemberg

2.
Die Geschäfte einer Einkaufsstraße in einer Kleinstadt beschließen ein Straßenfest zu veranstalten und planen dafür verschiedene Aktivitäten.

2.1 (8 Punkte)
Das Kaffeehaus „arabica“ möchte Packungen mit einer eigenen Hochlandmischung verschenken. Es steht Kaffee aus Peru und aus Ecuador zur Verfügung.
Je höher der Anteil des Kaffees aus Peru, umso höher ist die Qualität der Mischung. Jede Packung soll mindestens 20g Kaffee enthalten. Der Anteil des peruanischen Kaffees an der Mischung soll mindestens 25% betragen. Im Einkauf kosten 100g des peruanischen Kaffees 1,20 € und der Kaffee aus Ecuador kostet 0,60 € pro 100 g. Das Kaffeehaus möchte pro Packung nicht mehr als 0,30 € ausgeben.

Der Kaffeehausbesitzer möchte wissen, welche Möglichkeiten es für die Zusammensetzung der Hochlandmischung gibt.
Zeichnen Sie das zugehörige Planungsvieleck und geben Sie die Koordinaten aller Eckpunkte des Planungsvielecks an, die eine Mischung beschreiben, die aus beiden Kaffeesorten besteht.
Vergleichen Sie diese Mischungen hinsichtlich Gewicht, Kosten und Qualität.
Geben Sie eine mögliche Mischung aus beiden Kaffeesorten an, die eine höhere Qualität hat.

2.2 (7 Punkte)
In der Straße befindet sich auch ein Kiosk, der bei diesem Straßenfest die beiden frisch gepressten Obstsäfte „Orango“ und „Marange“ anbieten will.
Beide Getränke werden aus Orangen und Mangos hergestellt. Das Verhältnis Orange zu Mango beträgt beim Getränk „Orango“ drei zu eins und beim Getränk „Marange“ zwei zu eins. Für die Herstellung der beiden Säfte kauft der Kioskbetreiber Orangen, aus denen maximal 60 Liter Saft gepresst werden können, und Mangos, aus denen maximal 25 Liter Saft gepresst werden können.
Die Säfte werden in 0,25 Liter-Bechern angeboten. Aufgrund der Erfahrungen früherer Jahre sollen vom Getränk „Orango“ nicht mehr als 300 Becher hergestellt werden. Der Gewinn je Becher beträgt beim Getränk „Orango“ 0,90 € und beim Getränk „Marange“ 1,00 €.
Ermitteln Sie mit Hilfe des Simplex-Verfahrens, wie viel Liter von jedem Getränk hergestellt und verkauft werden müssen, damit der Gesamtgewinn möglichst groß ist.
Geben Sie den maximalen Gesamtgewinn an.
Untersuchen Sie, inwieweit das eingekaufte Obst verbraucht wird.

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG, BTG)
Hauptprüfung 2012 Teil 4, Lineare Optimierung, Lösung zu Aufgabe 2
Baden-Württemberg

2.1

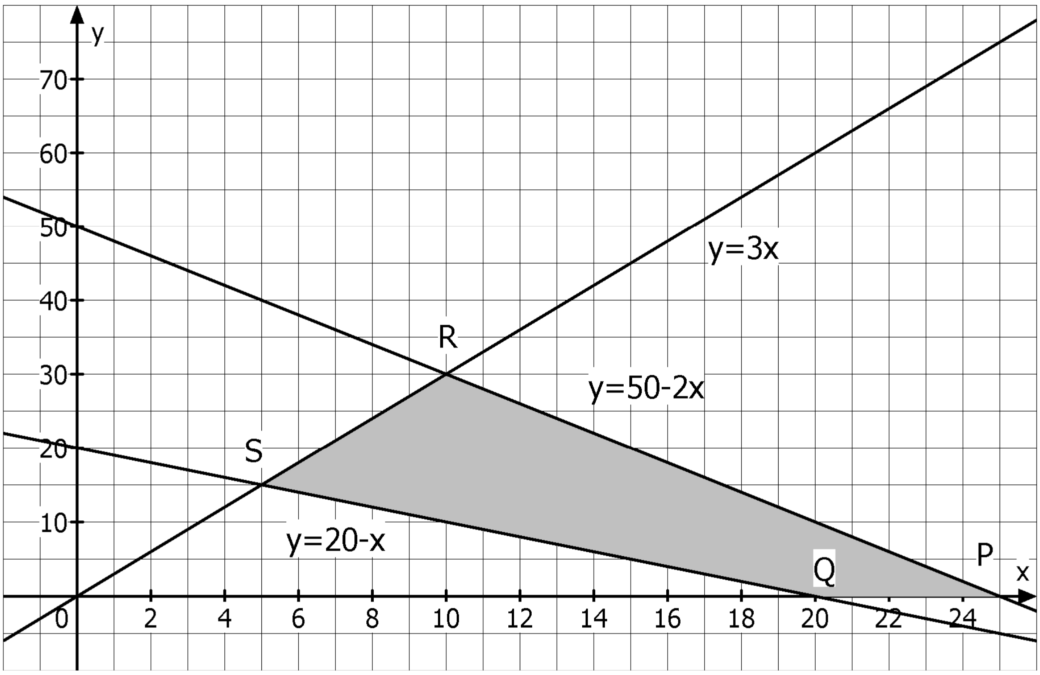
Folgende Variablen werden definiert:

x = Menge des peruianischen Kaffees in Gramm
y = Menge des ecuadorianischen Kaffees in Gramm

Folgende Bedingungen ergeben sich aus der Aufgabe:

1.) Jede Packung enthält mindestens 20 g: $x + y \geq 20 \Rightarrow y \geq 20 - x$ (1)
2.) Anteil des peruanischen Kaffees mindestens 25%: $x \geq 0{,}25(x + y) \Rightarrow y \leq 3x$ (2)
3.) Pro Packung nicht mehr als 0,30 €: $0{,}012x + 0{,}006y \leq 0{,}30 \Rightarrow y \leq 50 - 2x$ (3)

Einzeichnen der drei Geraden in ein Koordinatensystem ergibt folgendes schraffiertes Planungsvieleck:



Die Eckpunkte des Vielecks lauten wie folgt:
S(5/15) (Schnitt der Geraden (1) und (2))
R(10/30) (Schnitt der Geraden (2) und (3))
P(25/0) (Schnitt der Geraden (3) mit der x-Achse)
Q(20/0) (Schnitt der Geraden (1) mit der x-Achse)

Nur die Punkte R und S stellen eine Mishung dar, die aus beiden Sorten besteht.

Eckpunkt R mit $x = 10g$ peruanischen Kaffees und $y = 30g$ ecuadorianischen Kaffees:
Gesamtgewicht: $10 + 30 = 40$ Gramm je Packung
Kosten: $0{,}012 \cdot 10 + 0{,}006 \cdot 30 = 0{,}30$ Euro je Packung

Qualität: Da der Anteil des peruanischen Kaffees 25% beträgt (10 Gramm von 40 Gramm), ist die Mindestqualität erreicht.

Eckpunkt S mit x = 5g peruanischen Kaffees und y = 15 g ecuadorianischen Kaffees:

Gesamtgewicht: 5 + 15 = 20 Gramm je Packung (Mindestgewicht)
Kosten: $0{,}012 \cdot 5 + 0{,}006 \cdot 15 = 0{,}15$ Euro je Packung (deutlich unter dem Höchstpreis)
Qualität: Da der Anteil des peruanischen Kaffees 25% beträgt (5 Gramm von 20 Gramm), ist die Mindestqualität erreicht.

Die Punkte R und S liegen beide auf der Gerade y = 3x, die die Restriktion hinsichtlich des Anteils in Höhe von 25% beschreibt.

Wählt man einen Punkt des Planungsvielecks, der nicht auf dieser Gerade liegt, ergibt sich eine Mischung mit höherer Qualität.

Beispiel: x = 10g peruanischer Kaffee und y = 20g ecuadorianischer Kaffee:
Gesamtgewicht: $10 + 20 = 30$ Gramm je Packung
Kosten: $0{,}012 \cdot 10 + 0{,}006 \cdot 20 = 0{,}24$ Euro je Packung
Qualität: Da der Anteil des peruanischen Kaffees 33,3% beträgt (10 Gramm von 30 Gramm), ist die Mindestqualität überschritten.

2.2

Es werden folgende Variablen definiert:

x = Menge der Becher vom Getränk „Orango“
y = Menge der Becher vom Getränk „Marange“

Beim Getränk „Orango“ ist das Verhältnis Orange zu Mango 3 : 1
Das heißt 1 Becher (0,25 Liter) „Orango“ enthält $\frac{1}{16}$ Liter Mangosaft und $\frac{3}{16}$ Liter Orangensaft.

Beim Getränk „Marange“ ist das Verhältnis Orange zu Mango 2 : 1
Das heißt 1 Becher (0,25 Liter) „Marange“ enthält $\frac{1}{12}$ Liter Mangosaft und $\frac{1}{6}$ Liter Orangensaft.

Folgende Ungleichungen ergeben sich:
1.) Maximal 300 Becher „Orango“: $x \le 300$
2.) Maximal 60 Liter Orangensaft: $\frac{3}{16}x + \frac{1}{6}y \le 60$
3.) Maximal 25 Liter Mangosaft: $\frac{1}{16}x + \frac{1}{12}y \le 25$
Zu maximieren ist der Gewinn: $0{,}9x + y = G$

Um den Simplex-Algorithmus anzuwenden, müssen Schliufvariablen eingeführt werden:

$$
\begin{array}{lllll}
x & & +u & & = 300 \\
\frac{3}{16}x & +\frac{1}{6}y & & +v & = 60 \\
\frac{1}{16}x & +\frac{1}{12}y & & +w & = 25
\end{array}
$$

Damit ergibt sich nun folgendes Simplex-Tableau:

x	y	u	v	w	Erg.	Quotient
1	0	1	0	0	300	
$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{6}$	0	1	0	60	$60:\frac{1}{6}=360$
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{12}$	0	0	1	25	$25:\frac{1}{12}=300$
0,9	1	0	0	0	G	

Die Pivotspalte ist die Spalte mit der größten positiven Zahlen in der letzten Zeile (oben markiert)
Der kleinste positive Wert der Spalte „Quotient“ legt die Pivotzeile fest.

Das Simplextableau wird nun so umgeformt, dass das Pivotelement den Wert 1 annimmt (das heißt die komplette 3. Zeile wird mit 12 multipliziert)

Nummer	x	y	u	v	w	Erg.	Umformung
(1)	1	0	1	0	0	300	keine
(2)	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{6}$	0	1	0	60	$(2)-\frac{1}{6}\cdot(3)$
(3)	0,75	**1**	0	0	12	300	keine
(4)	0,9	1	0	0	0	G	(4) – (3)

Nach der Umformung erhält man folgendes Tableau:

x	y	u	v	w	Erg.	Quotient
1	0	1	0	0	300	300:1 = 300
$\frac{1}{16}$	0	0	1	-2	10	$10:\frac{1}{16}=160$
0,75	1	0	0	12	300	300:075=400
0,15	0	0	0	-12	G-300	

Die Pivotspalte ist die Spalte mit der größten positiven Zahlen in der letzten Zeile (oben markiert)
Der kleinste positive Wert der Spalte „Quotient“ legt die Pivotzeile fest.

Das Simplextableau wird nun so umgeformt, dass das Pivotelement den Wert 1 annimmt
(das heißt die komplette 2. Zeile wird mit 16 multipliziert)

Nummer	x	y	u	v	w	Erg.	Umformung
(1)	1	0	1	0	0	300	(1) – (2)
(2)	**1**	0	0	16	-32	160	
(3)	0,75	1	0	0	12	300	$(3)-0{,}75\cdot(2)$
(4)	0,15	0	0	0	-12	G-300	$(4)-0{,}15\cdot(2)$

Nach der Umformung erhält man folgendes Tableau:

x	y	u	v	w	Erg.
0	0	1	-16	32	140
1	0	0	16	-32	160
0	1	0	-12	36	180
0	0	0	-2,4	-7,2	G-324

Da die letzte Zeile keine positiven Elemente mehr besitzt, ist das Optimum erreicht.

Als Lösung folgt: x = 160 und y = 180 und u = 140.
Die Nichtbasisvariablen ergeben v = 0 und w = 0.

Es müssen 160 Becher „Orango“ (also 40 Liter) und 180 Becher „Marange“ (also 45 Liter) hergestellt und verkauft werden.
Der maximale Gesamtgewinn beträgt 324 Euro.

Da v = w = 0 ist, wird das eingekaufte Obst komplett verbraucht.
Die Variable u = 140 bedeutet, dass von den maximal möglichen 300 Bechern „Orango“ 140 davon nicht verkauft werden, sondern nur 160.