Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2007 Teil 2, Lineare Optimierung, Aufgabe 2
Baden-Württemberg

2.1
Ein Unternehmer befüllt und verkauft Druckerpatronen. Seine Befüllmaschine kann drei Sorten von Patronen befüllen.
Die nachfolgende Tabelle enthält für jede Sorte die Dauer für die Befüllung und den Verkaufspreis. Aus Kapazitätsgründen kann die Maschine am Tag maximal 8 Stunden Patronen füllen. Es werden höchstens 150 Patronen täglich verkauft.

	Sorte A	Sorte B	Sorte C
Befüllzeit in Minuten	2	3	4
Verkaufspreis in €	10	12	15

2.1.1
Von der Sorte C werden pro Tag 60 Patronen verkauft und von der Sorte A pro Tag mindestens 15 Patronen.
Bestimmen Sie grafisch, bei welchen Verkaufszahlen der Tagesumsatz am höchsten ist. Geben Sie den maximalen Tagesumsatz an.
Wie muss der Verkaufspreis von Sorte A geändert werden, damit der Tagesumsatz beim Verkauf von 65 Patronen der Sorte A, 25 Patronen der Sorte B sowie 60 Patronen der Sorte C maximal ist ? (8 Punkte)

2.1.2
Die Verkaufspreis betragen weiterhin 10 € für Sorte A, 12 € für Sorte B und 15 € für Sorte C.
Für Sorte A gibt es keine Mindestverkaufszahlen mehr. Von Sorte C werden höchstens 50 Patronen verkauft. Ermitteln Sie mithilfe des Simplex-Verfahrens, bei welchen Verkaufszahlen der tägliche Umsatz maximal ist. Geben Sie den maximalen Umsatz an. (6 Punkte)

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2007 Teil 2, Lineare Optimierung, Lösung zu Aufgabe 2
Baden-Württemberg

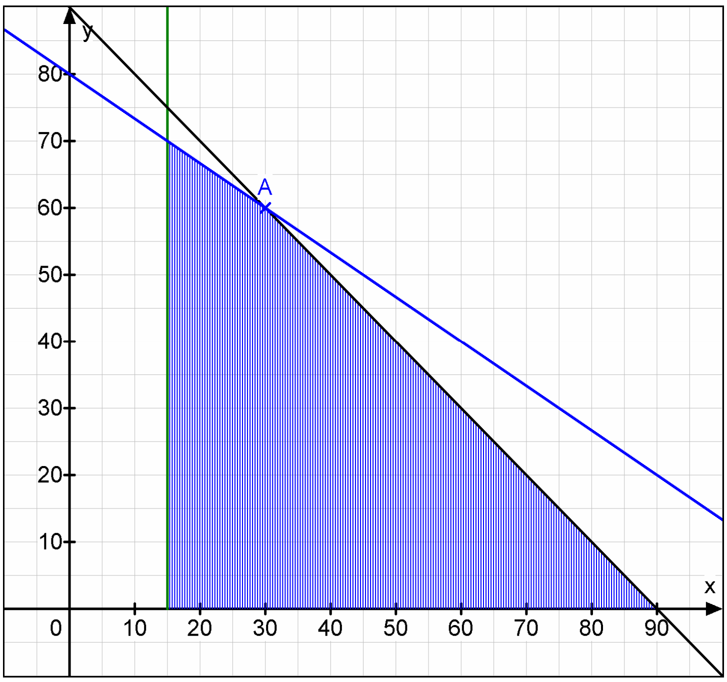
2.1.1
Pro Tag werden x Stück der Sorte A, y Stück der Sorte B und z Stück der Sorte C verkauft.
Es gelten folgende Bedingungen:

(1) $x + y + z \leq 150$
(2) $z = 60$
(3) $2x + 3y + 4z \leq 480$
(4) $x \geq 15\,,\ y \geq 0$

Die Zielfunktion stellt den zu maximierenden Umsatz dar:
(5) $U = 10x + 12y + 15z$

Aus (1) und (3) ergibt sich mit z = 60:
(1) $y \leq 90 - x$
(3) $y \leq 80 - \frac{2}{3}x$
(4) $x \geq 15\,,\ y \geq 0$

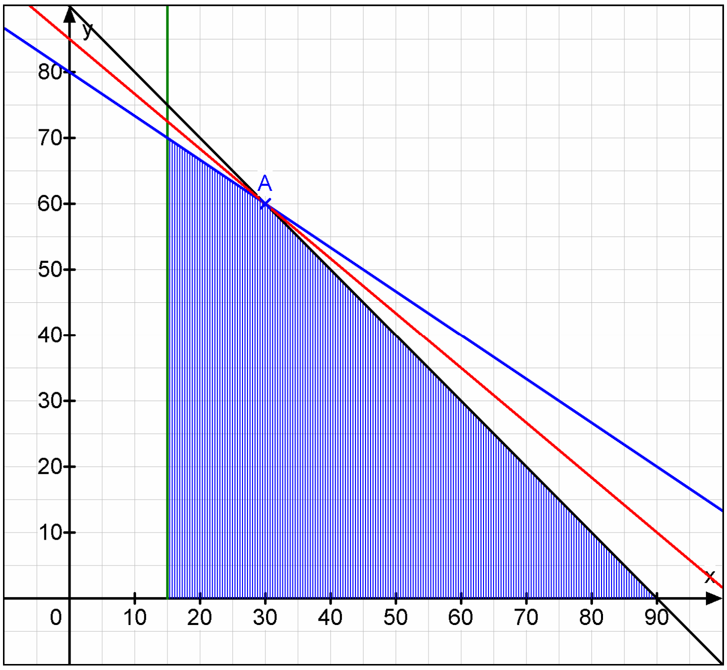
Daraus ergibt sich grafisch folgende Fläche:



Der Schnittpunkt A besitzt die Koordinaten A(30/60).
Die Umsatzfunktion lautet $U = 10x + 12y + 900 \Rightarrow y = -\frac{5}{6}x + \frac{U - 900}{12}$.

Aufgrund des zu maximierenden Umsatzes U ist die Gerade mit dem maximalen y-Achsenabschnitt gesucht, die einen gemeinsamen Punkt mit der Fläche besitzt.

Diese Gerade verläuft durch A(30/60).



Der maximale Umsatz wird erzielt für x = 30 (30 Stück von Sorte A) und y = 60 (60 Stück von Sorte B) und gemäß Vorgabe 60 Stück von Sorte C.

Der maximale Umsatz beträgt $U = 10 \cdot 30 + 12 \cdot 60 + 15 \cdot 60 = 1920$ Euro

Nun ist der neue Verkaufspreis von Sorte A gesucht, so dass die (rote) Umsatzgerade durch den Punkt (65/25) verläuft.

Dieser Punkt liegt auf der schwarzen Gerade (1) y = 90 – x und gehört zu der markierten Fläche. Damit an diesem Punkt ein maximaler Umsatz vorliegt, muss die Steigung der Umsatzgerade genauso groß sein wie die Gerade (1), also m = -1.
Der Verkaufspreis von Sorte A sei p Euro.

Dann gilt: $U = px + 12y + 15z \Rightarrow y = -\frac{p}{12}x + ...$

Damit die Steigung m = -1 beträgt, muss p = 12 gelten.
Der Preis für Sorte A muss somit 12 € betragen.

2.1.2

Pro Tag werden x Stück der Sorte A, y Stück der Sorte B und z Stück der Sorte C verkauft.
Zusätzlich werden die Schlupfvariablen u, v und w eingeführt.

Es ergeben sich folgenden Gleichungen:
(1) $x + y + z + u = 150$
(2) $2x + 3y + 4z + v = 480$
(3) $z + w = 50$

Die Zielfunktion lautet $U = 10x + 12y + 15z$.

Daraus ergibt sich folgendes Simplextableau:

x	y	z	u	v	w		Einschränkung
1	1	1	1	0	0	150	150
2	3	4	0	1	0	480	120
0	0	1	0	0	1	50	50
10	12	15	0	0	0	U	

Die Spalte mit der größten Zahl bei der Zielfunktionszeile ist die Pivotspalte (hier die 3.Spalte z).
Die Werte der Spalte „Einschränkung" ergeben sich aus der Division der Spalte 6 durch die Elemente der Pivotspalte (150:1 ; 480 : 4 ; 50 : 1).

Die Zeile, in der die kleinste Zahl bei „Einschränkung" steht, ist die Pivotzeile.
Dies ist in diesem Fall mit 50 die 3.Zeile.

Das Element, das sowohl in der Pivotspalte als auch in der Pivotzeile steht, ist das so genannte Pivotelement – hier 1.

Nun werden alle Elemente der Pivotspalte durch übliche Zeilenumformungen zu Null gemacht, außer das Pivotelement selbst.

Damit ergibt sich:

x	y	z	u	v	w		Einschränkung
1	1	0	1	0	-1	100	100
2	3	0	0	1	-4	280	93,33
0	0	1	0	0	1	50	-
10	12	0	0	0	-15	U-750	

Nun ist die 2.Spalte (y) die Pivotspalte und die 2.Zeile die Pivotzeile.
Das Pivotelement lautet 3.

x	y	z	u	v	w		Einschränkung
1	0	0	3	-1	1	20	20
2	3	0	0	1	-4	280	140
0	0	1	0	0	1	50	-
2	0	0	0	-4	1	U-1870	

Nun ist die 1.Spalte (x) die Pivotspalte und die 1.Zeile die Pivotzeile.
Das Pivotelement lautet 1.

x	y	z	u	v	w	
1 0 0	0 3 0	0 0 1	3 -6 0	-1 3 0	1 -6 1	20 240 50
0	0	0	-6	-2	-1	U-1910

Division der 2.Zeile durch 3 ergibt:

x	y	z				
1 0 0	0 1 0	0 0 1				20 80 50
0	0	0				U-1910

Der tägliche Umsatz wird maximal für x = 20 (Sorte A), y = 80 (Sorte B) und z = 50 (Sorte C).

Der maximale Umsatz beträgt $U = 10 \cdot 20 + 12 \cdot 80 + 15 \cdot 50 = 1910$ Euro.