

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2008 Teil 2, Lineare Optimierung, Aufgabe 2
Baden-Württemberg

2.1.1

Ein Fertigungsbetrieb für Frottierartikel stellt unter anderem Handtücher und Badetücher her. Diese werden auf drei Maschinen hergestellt. Aus der Beschränkung der Maschinenlaufzeiten ergeben sich folgende Ungleichungen:

$$2x + 2y \leq 1400$$

$$6x + 8y \leq 4400$$

$$x + 2y \leq 1000$$

Dabei ist x die Anzahl der Handtücher und y die Anzahl der Badetücher.
 Ein Handtuch wird für 12 €, ein Badetuch für 15 € verkauft.

2.1.1.1

Bestimmen Sie grafisch, bei wie vielen Handtüchern und bei wie vielen Badetüchern der Umsatz maximal wird. Wie groß ist der maximale Umsatz ? (5 Punkte)

2.1.1.2

Die Planungsabteilung kalkuliert, dass ein Badetuch das 2,5-fache eines Handtuches kosten sollte. Für welche Produktionszahlen ist nun der Umsatz maximal ? (2 Punkte)

2.1.2

Ein anderes Maximierungsproblem in diesem Fertigungsbetrieb führt auf folgendes Tableau:

BV	x	y	z	u	v	w	b_i
u	2	2	1	1	0	0	1400
v	6	8	2	0	1	0	4400
w	1	2	1	0	0	1	1000
U_1	12	15	5	0	0	0	U

Entnehmen Sie dem Tableau die zugrunde liegenden Restriktionen und geben Sie eine Gleichung der Zielfunktion an.

Beschreiben Sie ein zugehöriges Optimierungsproblem in Worten.

Berechnen Sie die optimale Lösung mithilfe des Simplex-Algorithmus. (8 Punkte)

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2008 Teil 2, Lineare Optimierung, Lösung zu Aufgabe 2
Baden-Württemberg

2.1.1.1

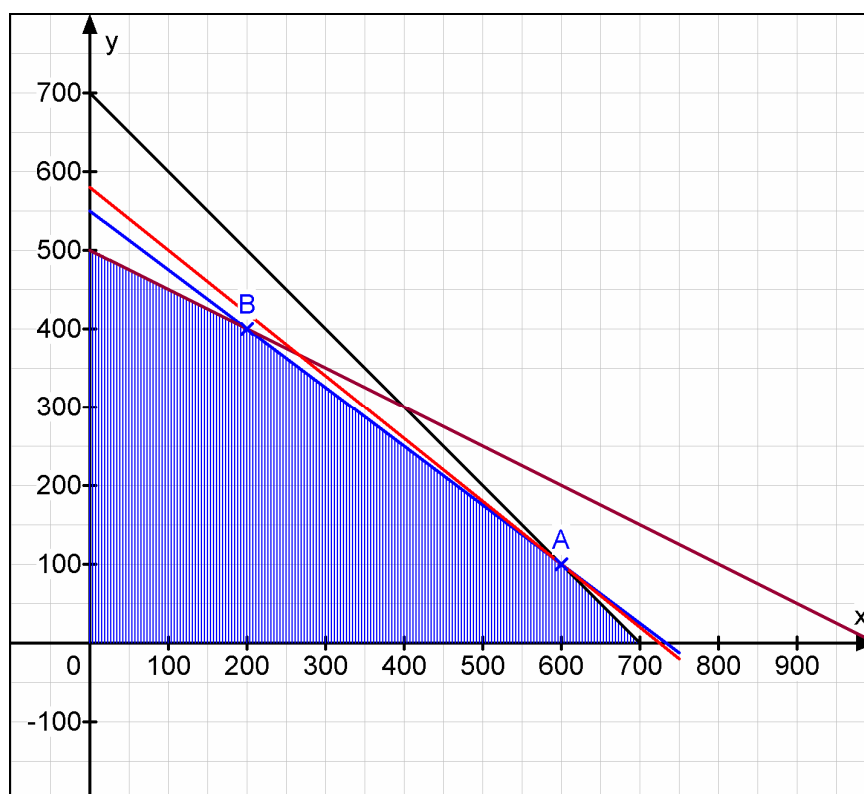
Auflösen der Ungleichungen nach y ergibt:

$$y \leq -x + 700$$

$$y \leq -\frac{3}{4}x + 550$$

$$y \leq -0,5x + 500$$

Die Zielfunktion lautet $U = 12x + 15y \Rightarrow y = -\frac{4}{5}x + \frac{U}{15}$



Die rote Gerade stellt die Zielfunktion dar. Sie wird so eingezeichnet, dass sie einen möglichst großen y-Achsenabschnitt besitzt und außerdem noch einen gemeinsamen Punkt mit der schraffierten Fläche besitzt. Sie enthält den Punkt A(600/100). Damit wird der Umsatz maximal für $x = 600$ (Handtücher) und $y = 100$ (Badetücher).

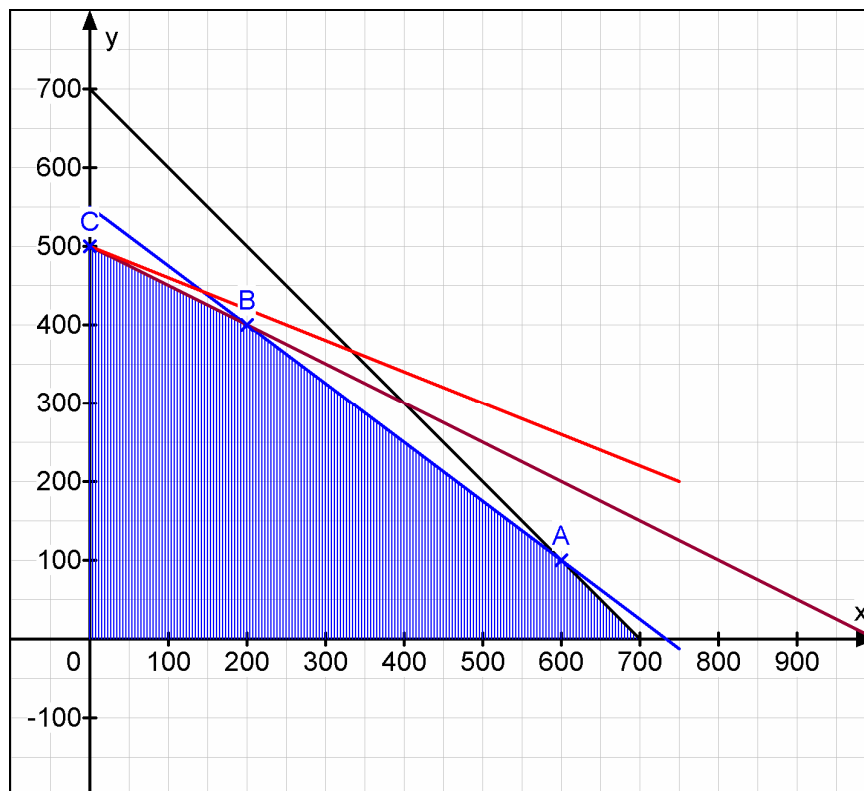
Der maximale Umsatz beträgt $U = 12 \cdot 600 + 15 \cdot 100 = 8700$ Euro.

2.1.2

Der Preis für das Handtuch sei a , dann ist der Preis des Badetuches $2,5a$.

Der Umsatz lautet $U = a \cdot x + 2,5a \cdot y \Rightarrow y = -\frac{2}{5}x + \frac{U}{2,5a}$.

Die einzuzeichnende rote Gerade besitzt nun die Steigung $m = -0,4$ und verläuft nun durch $C(0/500)$.



Der Umsatz wird hier maximal für $x = 0$ (keine Handtücher) und $y = 500$ (Badetücher).

2.1.2

Aus dem Simplextableau ergeben sich folgende Ungleichungen:

$$2x + 2y + z \leq 1400$$

$$6x + 8y + 2z \leq 4400$$

$$x + 2y + z \leq 1000$$

Zielfunktion: $U = 12x + 15y + 5z$

Ein Optimierungsproblem könnte folgendermaßen lauten:

Der Betrieb stellt Handtücher, Badetücher und Duschhandtücher her.

Diese werden auf 3 Maschinen hergestellt.

Die Bearbeitungszeit für ein Handtuch beträgt 2 Minuten auf Maschine A, 6 Minuten auf Maschine B und 1 Minute auf Maschine C.

Die Bearbeitungszeit für ein Badetuch beträgt 2 Minuten auf Maschine A, 8 Minuten auf Maschine B und 2 Minuten auf Maschine C.

Die Bearbeitungszeit eines Duschhandtuches beträgt 1 Minute auf Maschine A, 2 Minuten auf Maschine B und 1 Minute auf Maschine C.

Pro Woche kann Maschine A maximal 1400 Minuten betrieben werden, Maschine B 4400 Minuten und Maschine C 1000 Minuten.

Ein Handtuch wird für 12 Euro, ein Badetuch für 15 Euro und ein Duschhandtuch für 5 Euro verkauft.

Wie viele Hand-/Bade-/Duschhandtücher müssen produziert werden, damit der Umsatz maximal wird ?

Lösung des Optimierungsproblems mit dem Simplexalgorithmus:

x	y	z	u	v	w		Einschränkung
2	2	1	1	0	0	1400	700
6	8	2	0	1	0	4400	550
1	2	1	0	0	1	1000	500
12	15	5	0	0	0	U	

Die Spalte mit der größten Zahl bei der Zielfunktionszeile ist die Pivotspalte (hier die 2. Spalte y).

Die Werte der Spalte „Einschränkung“ ergeben sich aus der Division der Spalte 6 durch die Elemente der Pivotspalte ($1400:2$; $4400 : 8$; $1000 : 2$).

Die Zeile, in der die kleinste Zahl bei „Einschränkung“ steht, ist die Pivotzeile. Dies ist in diesem Fall mit 500 die 3. Zeile.

Das Element, das sowohl in der Pivotspalte als auch in der Pivotzeile steht, ist das so genannte Pivotelement – hier 2.

Nun werden alle Elemente der Pivotspalte durch übliche Zeilenumformungen zu Null gemacht, außer das Pivotelement selbst.

Damit ergibt sich:

x	y	z	u	v	w		Einschränkung
1	0	0	1	0	-1	400	400
2	0	-2	0	1	-4	400	200
1	2	1	0	0	1	1000	1000
9	0	-5	0	0	-15	2U- 15000	

Die Spalte Nr.1 (x) ist die Pivotspalte, die 2. Zeile ist die Pivotzeile. Das Pivotelement ist 2.

x	y	z	u	v	w		Einschränkung
0	0	2	2	-1	2	400	200
2	0	-2	0	1	-4	400	-
0	4	4	0	-1	6	1600	400
0	0	8	0	-9	6	4U- 33600	

Die Spalte Nr. 3 (z) ist die Pivotspalte, die 1. Zeile ist die Pivotzeile.
Das Pivotelement ist 2.

x	y	z	u	v	w	
0	0	2	2	-1	2	400
2	0	0	2	0	-2	800
0	4	0	-4	1	2	800
0	0	0	-8	-5	-2	4U- 35200

Nun ergibt sich aus der 1. Zeile: $2z = 400$ und damit $z = 200$ (Duschhandtücher)
 Aus der 2. Zeile: $2x = 800$ und damit $x = 400$ (Handtücher)
 Aus der 3. Zeile: $4y = 800$ und damit $y = 200$ (Badetücher)

Der maximale Umsatz beträgt $U = 12 \cdot 400 + 15 \cdot 200 + 5 \cdot 200 = 8800$ Euro.