Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2010 Teil 4, Vektorgeometrie, Aufgabe 1
Baden-Württemberg

1
Im Anschauungsraum sind die Punkte A(6/4/0), B(1/4/0), C(1/0/3), D(6/0/3) und S(3,5/5/5,5) gegeben.
Für jedes $t \in \mathbb{R}$ hat die Ebene F_t die Gleichung $3x_2 + 4x_3 - t = 0$

1.1
Zeigen Sie, dass die Punkte A, B, C, D und S eine Pyramide mit der quadratischen Grundfläche ABCD bilden. (7 Punkte)

1.2
E ist die Ebene, die das Viereck ABCD enthält.
Weisen Sie nach, dass die Ebenen F_t und E für alle $t \in \mathbb{R}$ parallel sind.
(4 Punkte)

1.3
Für welche Werte von t hat F_t mit der Pyramide ABCDS gemeinsame Punkte ?
(4 Punkte)

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2009 Teil 4, Vektorgeometrie, Lösung zu Aufgabe 1
Baden-Württemberg

1.1

Es gilt $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Da die gegenüberliegenden Vektoren gleich sind, bildet das Viereck ABCD ein Parallelogramm.

Es gilt $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$, das heißt im Eckpunkt A ist ein rechter Winkel.

Außerdem gilt $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{25+0+0} = 5$ und $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{0+16+9} = 5$, das heißt alle vier Seiten des Vierecks sind gleich lang.
Damit ist das Viereck ABCD ein Quadrat.

Damit die Punkte A, B, C, D und S eine Pyramide bilden, darf der Punkt S nicht in der Grundflächenebene enthalten sein.

Um dies zu prüfen, wird zunächst die Gleichung der Ebene E durch die Punkte A, B und D aufgestellt:

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Prüfung, ob der Punkt S auf E liegt: $\begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 5 \\ 5{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Aus der 3.Zeile folgt: $5{,}5 = 3s \Rightarrow s = \frac{11}{6}$

Aus der 2.Zeile folgt: $5 = 4 - 4s \Rightarrow s = -\frac{1}{4}$

Da dies ein Widerspruch ist, liegt S nicht auf E.
Damit bilden die Punkte A, B, C, D und S eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche.

1.2
Die Ebene F_t ist als Koordinatengleichung dargestellt.

Der Normalenvektor der Ebene lautet $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Die Ebene E und F_t sind genau dann zueinander parallel, wenn der Normalenvektor orthogonal auf den beiden Richtungsvektoren von E steht.

Es gilt: $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$.
Damit ist die Parallelität gezeigt.

(Hinweis: Für t = 12 sind die Ebenen E und F_{12} sogar identisch:
Einsetzen eines Punktes von E (z.B. A(6/4/0) in F_t liefert $3 \cdot 4 + 4 \cdot 0 - t = 0 \Rightarrow t = 12$)

1.3
Die Ebenenschar F_t besteht aus lauter Ebenen, die parallel zueinander sind.
Dies erkennt man daran, dass der Normalenvektor der Schar unabhängig vom Parameter t ist.
Für t = 12 entspricht die Ebene der Grundfläche ABCD der Pyramide.

Nun wird geprüft, für welchen Wert von t die Spitze der Pyramide auf F_t liegt:
Einsetzen von S liefert: $3 \cdot 5 + 4 \cdot 5{,}5 - t = 0 \Rightarrow t = 37$.

Für $12 \le t \le 37$ hat F_t mit der Pyramide ABCDS gemeinsame Punkte.