Hauptprüfung Abiturprüfung 2014 (ohne CAS)

Baden-Württemberg

Stochastik Aufgabe 1

Hilfsmittel: GTR, Formelsammlung

berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

August 2014

1

Auf einem Glücksrad sind 40 gleich große Sektoren vorhanden. Jeder Sektor ist mit einer der Zahlen 0, 1, 2, 3 beschriftet. Die Zahlen sind mit folgenden absoluten Häufigkeiten vertreten:

Zahl	0	1	2	3
Absolute Häufigkeit	20	10	6	4

Das Glücksrad wird gedreht und zufällig gestoppt. Ein fest stehender Pfeil zeigt dann auf einen der Sektoren. Die Zahl im Sektor wird abgelesen und notiert.

1.1
Dieser Vorgang wird genau viermal durchgeführt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: Die Zahlen 0,1,2,3 werden in dieser Reihenfolge abgelesen.
B: Alle vier Zahlen treten je einmal auf.
C: Die 3 tritt mindestens zweimal auf.
D: Die Summe der vier Zahlen ist größer als 10.

(8 Punkte)

1.2
Ein Veranstalter bietet folgendes Spiel an: Ein Spieler darf das Glücksrad bis zu viermal drehen. Ziel ist es, eine möglichst hohe Zahl zu erreichen. Sobald der Spieler mit der Zahl zufrieden ist, kann er aufhören. Wenn er aber noch einmal dreht, wird die zuvor erreichte Zahl verworfen.

Der Veranstalter beobachtet, dass viele Spieler folgende Strategie anwenden:
"Spiele nur so lange, bis mindestens der Zahlenwert 2 auftritt und beende dann sofort das Spiel!"

1.2.1
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler mit dieser Strategie seine vier Versuche ausschöpft und nicht vorher aufhört ?

(2 Punkte)

1.2.2
Welchen Zahlenwert erreicht ein Spieler mit dieser Strategie im Durchschnitt?

(5 Punkte)

Lösungen

1.1

Anhand der absoluten Häufigkeiten können die relativen Häufigkeiten für die einzelnen Zahlen berechnet werden.
Diese relativen Häufigkeiten werden als Wahrscheinlichkeit interpretiert:

$P("0") = \frac{20}{40} = 0,5 \qquad P("1") = \frac{10}{40} = 0,25 \qquad P("2") = \frac{6}{40} = 0,15 \qquad P("3") = \frac{4}{40} = 0,1$

$P(A) = 0,5 \cdot 0,25 \cdot 0,15 \cdot 0,1 = \frac{3}{1600}$

$P(B) = P(A) \cdot 4! = \frac{9}{200}$ (beim Ereignis B spielt die Reihenfolge keine Rolle; es gibt $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ Möglichkeiten, diese 4 Ziffern zu vertauschen)

Beim Ereignis C ist es einfacher, die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses $\overline{C}$ zu berechnen.

$\overline{C}$: Die 3 tritt höchstens einmal auf.
P(3 tritt nie auf) = $0,9^4 = 0,6561$
P(3 tritt genau einmal auf) = $0,9^3 \cdot 0,1 \cdot 4 = 0,2916$
(der Faktor ist erforderlich, da die 3 an allen vier Stellen auftreten kann)

$P(\overline{C}) = 0,6561 + 0,2916 = 0,9477$
$P(C) = 1 - 0,9477 = 0,0523$

Das Ereignis D tritt ein, wenn viermal die "3" gedreht wird oder dreimal die "3" und einmal die "2".

$P(D) = 0,1^4 + 0,1^3 \cdot 0,15 \cdot 4 = 0,0007$

1.2.1

Der Spieler schöpft seine vier Versuche aus, wenn er bei den ersten drei Drehungen nur "0" oder "1" dreht.

P(nur "0" und "1" in den ersten drei Drehungen) = $0,75^3 = \frac{27}{64}$
Hinweis: Das Ergebnis der vierten Drehung spielt keine Rolle mehr.

1.2.2

Um den erwarteten Durchschnitt des Zahlenwertes zu ermitteln, benötigt man die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die jeweiligen Zahlenwerte erreicht werden können.

Ergebnis der Drehungen ist der Zahlenwert 0:

Das Ergebnis "0" wird notiert, wenn in den ersten drei Drehungen 0 oder 1 gedreht wird und die letzte Drehung "0" ist.

P(Ergebnis ist "0") = $0{,}75^3 \cdot 0{,}5 = \frac{27}{128}$

Ergebnis der Drehungen ist der Zahlenwert 1:

Das Ergebnis "1" wird notiert, wenn in den ersten drei Drehungen 0 oder 1 gedreht wird und die letzte Drehung "1" ist.

P(Ergebnis ist "1") = $0{,}75^3 \cdot 0{,}25 = \frac{27}{256}$

Ergebnis der Drehungen ist der Zahlenwert 2:

Mögliche Fälle:

beim ersten Mal wird "2" gedreht: $\frac{6}{40}$

zunächst "0 oder 1" und dann "2": $0{,}75 \cdot \frac{6}{40}$

zweimal "0 oder 1" und dann "2": $0{,}75^2 \cdot \frac{6}{40}$

dreimal "0 oder 1" und dann "2": $0{,}75^3 \cdot \frac{6}{40}$

P(Ergebnis ist "2") = $\frac{6}{40} + 0{,}75 \cdot \frac{6}{40} + 0{,}75^2 \cdot \frac{6}{40} + 0{,}75^3 \cdot \frac{6}{40} = \frac{105}{256}$

Ergebnis der Drehungen ist der Zahlenwert 3:

Mögliche Fälle:

beim ersten Mal wird "3" gedreht: $\frac{4}{40}$

zunächst "0 oder 1" und dann "3": $0{,}75 \cdot \frac{4}{40}$

zweimal "0 oder 1" und dann "3": $0{,}75^2 \cdot \frac{4}{40}$

dreimal "0 oder 1" und dann "3": $0{,}75^3 \cdot \frac{4}{40}$

P(Ergebnis ist "3") = $\frac{4}{40} + 0{,}75 \cdot \frac{4}{40} + 0{,}75^2 \cdot \frac{4}{40} + 0{,}75^3 \cdot \frac{4}{40} = \frac{35}{128}$

Erwarteter Zahlenwert = $3 \cdot \frac{35}{128} + 2 \cdot \frac{105}{256} + 1 \cdot \frac{27}{256} + 0 \cdot \frac{27}{128} \approx 1{,}746$

Der Spieler erreicht im Durchschnitt mit dieser Strategie einen Zahlenwert von 1,746.