Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2007 Teil 2, Vektorgeometrie, Aufgabe 2
Baden-Württemberg

2.1
Die Punkte A(-3/1/-3), B(-1/-2/1) und $C_k(-4-k/-3+2k/-3)$ mit $k \in \mathbb{R}$ sind die Eckpunkte des Dreiecks ABC_k.

2.1.1
Zeigen Sie: Die Punkte A, B und C_k bilden für jedes k ein Dreieck. (4 Punkte)

2.1.2
Es gibt genau eine Ebene E, in der die Punkte A und C_k liegen.
Geben Sie eine Gleichung von E in Parameterform an.
Welche besondere Lage hat diese Ebene im Koordinatensystem ? (4 Punkte)

2.1.3
Bestimmen Sie k so, dass das Dreieck ABC_k in A einen rechten Winkel hat.
Wie lang ist dann die Hypotenuse ? (6 Punkte)

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2007 Teil 2, Vektorgeometrie, Lösung zu Aufgabe 2
Baden-Württemberg

2.1.1

Die Punkte A, B und C_k bilden genau dann ein Dreieck, wenn sie nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen.
Dies wäre der Fall, wenn die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC_k}$ Vielfache zueinander sind.

Es gilt: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC_k} = \begin{pmatrix} -3-k \\ -1+2k \\ -4 \end{pmatrix}$

Nun müsste gelten: $r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-k \\ -1+2k \\ -4 \end{pmatrix}$ für einen Wert für r bzw. k.
Aus der 3.Zeile folgt r = -1. Aus der 2.Zeile würde dann folgen k = 2.
Aus der 1.Zeile ergibt sich mit diesen Werten jedoch ein Widerspruch.
Damit sind die Vektoren nie Vielfache und die Punkte können nie auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

2.1.2
Wähle zwei spezielle Punkte C_k, z.B. $C_1(-5/-1/-3)$ und $C_0(-4/-3/-3)$.

Parameterform der Ebene durch A, C_0 und C_1:

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Mit Hilfe einer Punktprobe könnte nun geprüft werden, ob wirklich jeder Punkt C_k auf E liegt. Dies wird gemäß der Aufgabenstellung allerdings nicht verlangt, sondern ist als gegebene Voraussetzung bzw. als Feststellung in der Aufgabe formuliert.

Da die x_3-Koordinate der Richtungsvektoren jeweils 0 ist, ist die Ebene parallel zur x_1-x_2-Ebene. Da der Ortsvektor die x_3-Koordinate -3 besitzt, hat die Ebene E einen Abstand von 3 von der x_1-x_2-Ebene.

2.1.3
Das Dreieck ABC_k besitzt bei A einen rechten Winkel, wenn der Satz des Pythagoras erfüllt ist:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AC_k}\right|^2 = \left|\overrightarrow{BC_k}\right|^2$$

$$\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}\right|^2 + \left|\begin{pmatrix} -1-k \\ -4+2k \\ 0 \end{pmatrix}\right|^2 = \left|\begin{pmatrix} -3-k \\ -1+2k \\ -4 \end{pmatrix}\right|^2$$

$$\Rightarrow 4+9+16+(-1-k)^2+(-4+2k)^2+0^2 = (-3-k)^2+(-1+2k)^2+16$$
$$\Rightarrow 29+1+2k+k^2+16-16k+4k^2 = 9+6k+k^2+1-4k+4k^2+16$$
$$\Rightarrow 5k^2-14k+46 = 5k^2+2k+26 \Rightarrow k = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

Die Länge der Hypotenuse beträgt $\left|\overrightarrow{BC_{1,25}}\right| = \left|\begin{pmatrix} -4{,}25 \\ 1{,}5 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{36{,}3125} \approx 6{,}03$ LE.