Berufliches Gymnasium (TG ohne CAS)
Hauptprüfung 2007 Teil 2, Vektorgeometrie, Aufgabe 2
Baden-Württemberg

2.1
An einem Haus ist ein dreieckiges Sonnensegel befestigt (siehe Arbeitsblatt auf der nächsten Seite).
Die Ecken des Sonnensegels sind die Punkte A(2/7/8), B(1/2/9) und C(9/1/6) bezüglich eines Koordinatensystems mit der Längeneinheit 1 m.
Die Hausfront sowie die Punkte A und B liegen in der Ebene

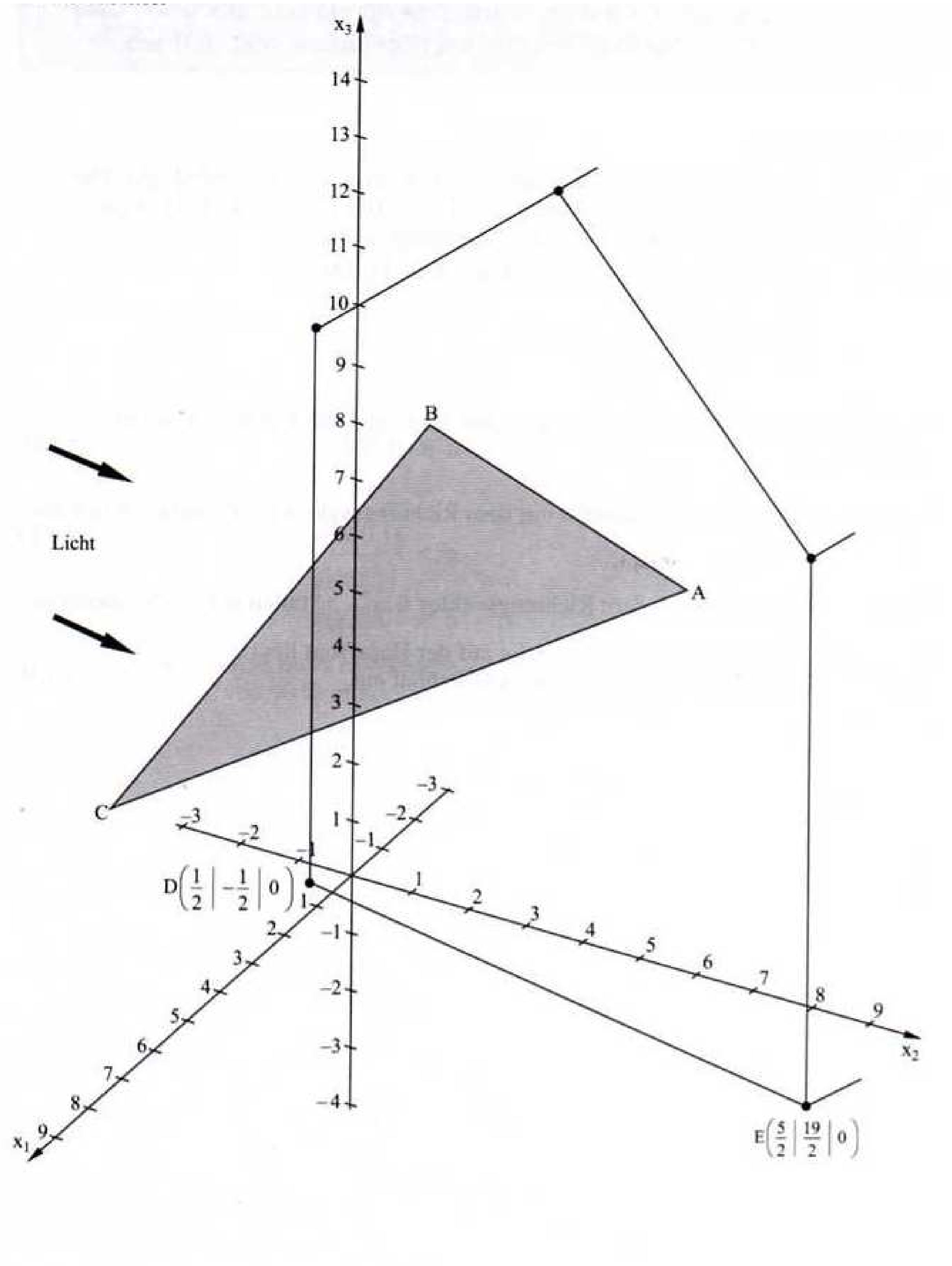
H: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s,t \in \mathbb{R}$

2.1.1
Berechnen Sie den Winkel des Sonnensegels bei C und den Flächeninhalt des Sonnensegels. (5 Punkte)

2.1.2
Untersuchen Sie, ob ein Lichtstrahl mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -16 \\ -5 \\ -41 \end{pmatrix}$ senkrecht auf das Sonnensegel trifft. (2 Punkte)

2.1.3
Parallele Lichtstrahlen mit dem Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} -15 \\ 7 \\ -12 \end{pmatrix}$ fallen auf das Sonnensegel. Zeigen Sie, dass der Schatten vollständig auf der Hausfront liegt.
Zeichnen Sie die Schattenfläche in das Arbeitsblatt ein. (7 Punkte)

Arbeitsblatt:



Berufliches Gymnasium (TG ohne CAS)
Hauptprüfung 2007 Teil 2, Vektorgeometrie, Lösung zu Aufgabe 2
Baden-Württemberg

2.1.1

Winkel des Sonnensegels bei C:

Es gilt $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Für den gesuchten Winkel gilt:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB}\right|} = \frac{\begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{49+36+4} \cdot \sqrt{64+1+9}} = \frac{68}{\sqrt{89} \cdot \sqrt{74}}$$

Daraus folgt $\alpha = 33{,}1°$

Fläche des Sonnensegels:

Die Fläche des Dreiecks ABC wird berechnet mit der Formel $A = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} \cdot \sin\alpha$

Daraus folgt $A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{89} \cdot \sqrt{74} \cdot \sin 33{,}1° = 22{,}2\ \text{m}^2$

2.1.2
Der Lichtstrahl trifft senkrecht auf das Sonnensegel, wenn der Richtungsvektor des Lichtstrahls orthogonal (=senkrecht) auf den Richtungsvektoren der Ebene, die das Sonnensegel aufspannen, steht.

Die Richtungsvektoren, die das Sonnensegel aufspannen, sind zum Beispiel

$\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Es gilt $\begin{pmatrix} -16 \\ -5 \\ -41 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 112 - 30 - 82 = 0$ und $\begin{pmatrix} -16 \\ -5 \\ -41 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 128 - 5 - 123 = 0$.

Da das Skalarprodukt jeweils 0 ergibt, stehen die Vektoren orthogonal zueinander.
Folglich trifft der Lichtstrahl das Sonnensegel senkrecht.

2.1.3
Die Punkte A und B liegen bereits auf der Hausfront. Es ist somit nur noch der Schattenpunkt C* vom Punkt C zu bestimmen.

Der Schattenpunkt C* liegt auf der Gerade g durch C mit dem Richtungsvektor
$\vec{u} = \begin{pmatrix} -15 \\ 7 \\ -12 \end{pmatrix}$.

Gleichung von g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ 7 \\ -12 \end{pmatrix}$

Der Schattenpunkt C* entspricht dem Schnittpunkt von g mit der Hauswandebene H.

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ 7 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

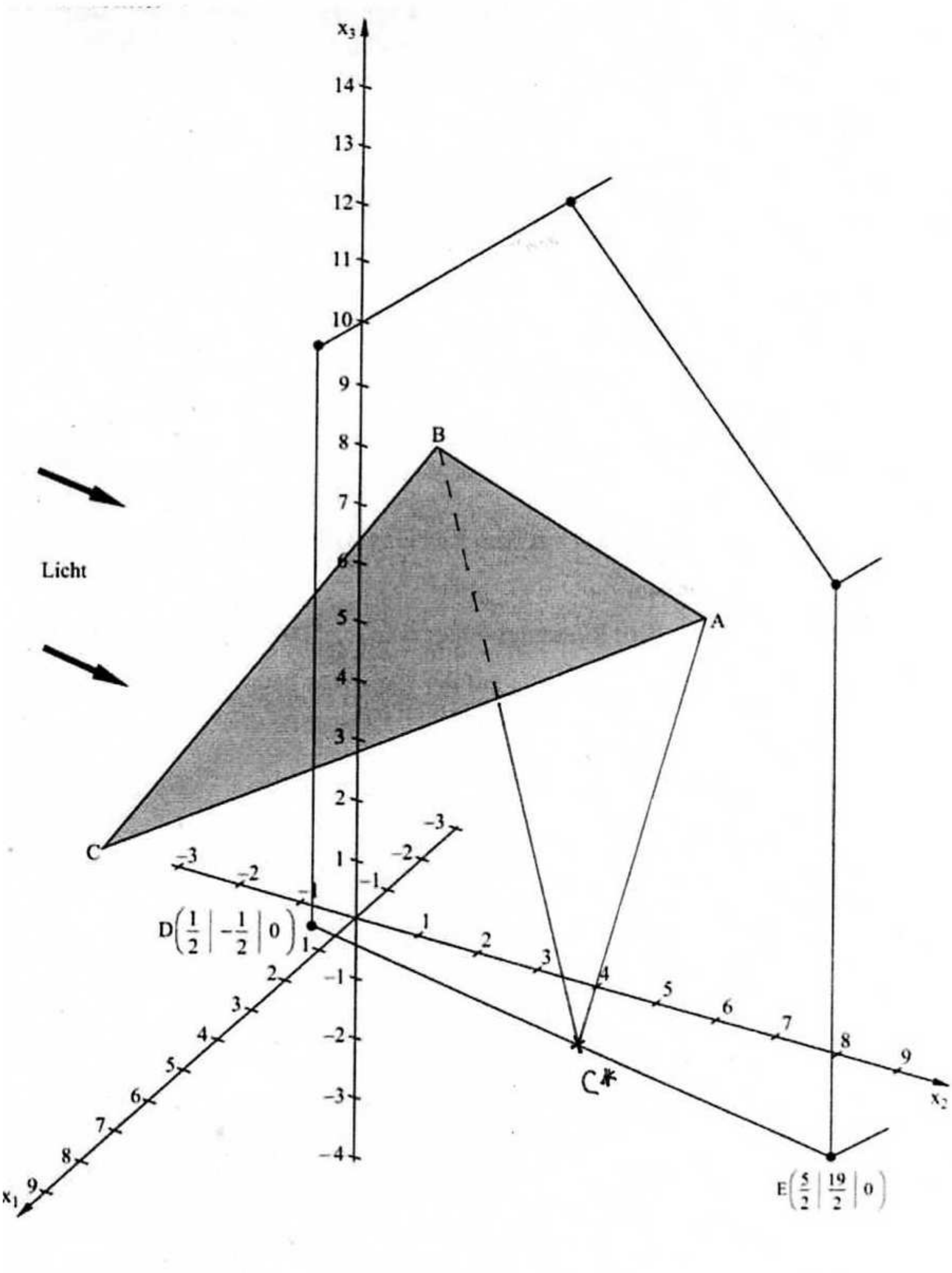
Dies ergibt folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrcr} -15r & -2s & & = & -8,5 \\ 7r & -10s & & = & -1,5 \\ -12r & & -t & = & -6 \end{array}$$

Mit dem GTR ergibt sich r = s = 0,5 uns t = 0.

Einsetzen von r = 0 in die Geradengleichung ergibt C*(1,5/4,5/0).

Zeichnet man die Koordinaten des Schattenpunktes C* in das Koordinatensystem ein und verbindet diesen mit den Punkten A und B ergibt sich die Schattenfläche ABC*.


x3
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
B
A
C
Licht
D(1/2 | -1/2 | 0)
E(5/2 | 19/2 | 0)
C*
x1
x2