Abiturprüfung Mathematik 2006 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien ohne TG – Anwendungsorientierte Aufgabe
Gruppe III, Aufgabe 3

3.1
Eine Flüssigkeit wird auf 90°C erhitzt. Dann lässt man sie bei einer Umgebungstemperatur von 20°C abkühlen. Bei diesem Experiment erhält man folgende Messreihe:

Zeit t in Minuten	0	1	2	3	4	5	6	7
Temperatur in °C	90	58	40	31	26	22	22	21

3.1.1
Stelle die Messdaten in einem Koordinatensytem dar.
Bestimme eine Gleichung einer quadratischen Regressionskurve und zeichne die Kurve in das Koordinatensystem ein. (5 Punkte)

3.1.2
Berechne die Gleichung einer exponentiellen Regressionskurve so, dass die Umgebungstemperatur nicht unterschritten wird.
Zeichne die Regressionskurve ebenfalls in das Koordinatensystem ein.
Vergleiche die beiden Regressionen (6 Punkte)

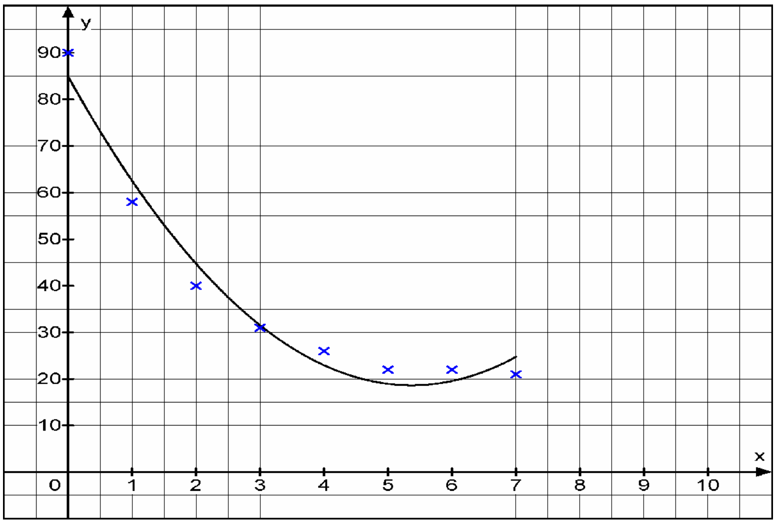
3.2
In eine Tasse wird 90°C heißer Tee eingeschenkt. Der Tee kühlt auf die Zimmertemperatur von 20°C ab.
Die Funktion h mit $h(t) = 20 + 70 \cdot e^{-0,2t}$ beschreibt diesen Abkühlungsvorgang.
Dabei ist t die Zeit in Minuten und h(t) die Temperatur in °C.

3.2.1
Berechne die Zeit, die vergeht, bis der Tee auf Trinktemperatur (50°C) abgekühlt ist. (2 Punkte)

3.2.2
Berechne die momentane Abkühlungsgeschwindigkeit nach 1 Minute und nach 10 Minuten. Interpretiere deine Ergebnisse. (2 Punkte)

Lösung Aufgabe 3:

3.1.1

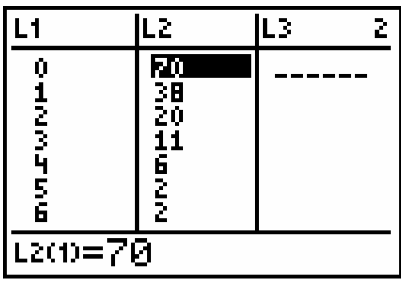


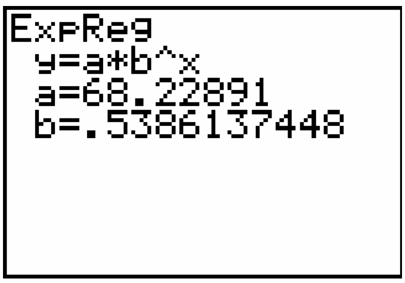
Aus der quadratischen Regression ergibt sich als Funktion:
$f(t) = 2{,}298 \cdot x^2 - 24{,}68x + 84{,}92$

3.1.2
Die exponentielle Regressionskurve soll 20°C nicht unterschreiten.
Das heißt, dass die waagrechte Asymptote der Exponentialfunktion y = 20 sein soll.

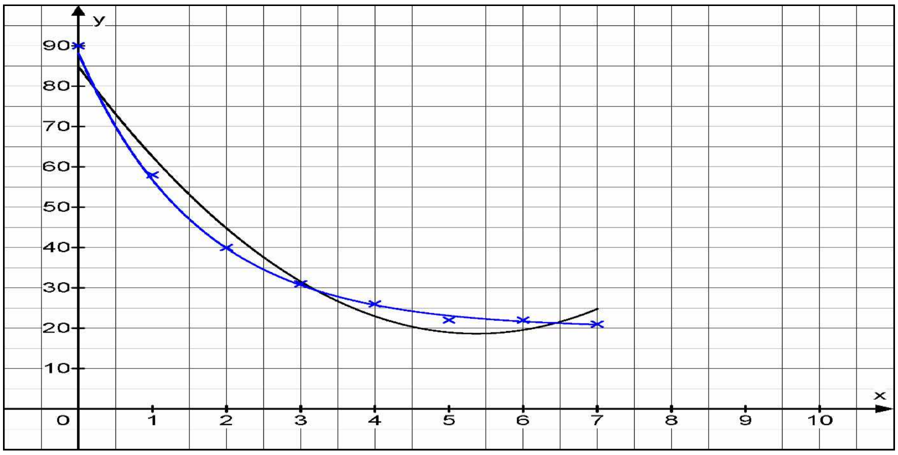
Der Ansatz im GTR $y = a \cdot e^{kx}$ bzw. $y = a \cdot b^x$ liefert jedoch als Asymptote y = 0, so dass dieser Ansatz direkt so nicht benutzt werden kann.

Abhilfe: Alle Werte in der Wertetabelle werden um 20 Einheiten nach unten verschoben. Mit diesen neuen Werten wird eine exponentielle Regression durchgeführt und anschließend die Exponentialfunktion wieder um 20 Einheiten nach oben gesetzt.





Als verschobene Exponentialfunktion erhält man damit: $y = 68{,}22 \cdot 0{,}539^x + 20$



Die exponentielle Regression stellt die bessere Näherungskurve dar.
Die Parabel steigt im Intervall wieder an, was einer (nicht sinnvollen) Wiedererwärmung entsprechen würde.

3.2.1

$50 = 20 + 70 \cdot e^{-0,2t} \Rightarrow e^{-0,2t} = \frac{3}{7} \Rightarrow t = 4,24$ Minuten

3.2.2

$h'(t) = -14 \cdot e^{-0,2t}$

Es gilt $h'(1) = -11,46$ und $h'(10) = -1,895$

Nach 1 Minute beträgt die Abkühlungsgeschwindigkeit 11,46 °C und ist damit wesentlich schneller als nach 10 Minuten, wenn nur noch 1,89°C pro Minute abkühlen.