Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2005 Teil 2, Wirtschaftliche Anwendungen, Aufgabe A
Baden-Württemberg

In einem Betrieb werden aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 und aus diesem die Endprodukte E_1, E_2 und E_3 gefertigt.
Der Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) wird durch folgende Tabellen beschrieben:

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	20	8	19
R_2	35	14	44
R_3	25	10	25

	E_1	E_2	E_3
Z_1	2	0	1
Z_2	3	1	2
Z_3	1	2	4

Je Mengeneinheit entstehen Rohstoff- bzw. Fertigungskosten in Euro gemäß folgender Tabelle:

R_1	R_2	R_3	Z_1	Z_2	Z_3	E_1	E_2	E_3
5	2	1	80	80	120	180	200	160

a) Ein Kunde erteilt einen Auftrag über 20 ME von E_1, 14 ME von E_2 und 16 ME von E_3. Bei der Erfüllung des Auftrags ist ein Fixkostenanteil von 15940 Euro zu berücksichtigen.
Berechnen Sie die gesamten Herstellungskosten für diesen Auftrag.

Die Verkaufspreise der Endprodukte sollen im Verhältnis 3:2:4 stehen.
Wie hoch müssen die Verkaufspreise mindestens sein, damit bei diesem Auftrag kein Verlust gemacht wird ?

(10 Punkte)

b) Im Rohstofflager befindet sich ein Restposten von 86 ME von R_1 und 172 ME von R_2. Wie viele ME des Rohstoffs R_3 werden zur Produktion von Zwischenprodukten benötigt, damit der Restposten vollständig verarbeitet wird ?

(5 Punkte)

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2005 Teil 2, Wirtschaftliche Anwendungen, Lösungen Aufgabe A
Baden-Württemberg

a) Aus den Angaben in den Tabellen kann man folgende Matrizen entnehmen:

Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix $A = \begin{pmatrix} 20 & 8 & 19 \\ 35 & 14 & 44 \\ 25 & 10 & 25 \end{pmatrix}$

Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Außerdem sind folgende Kostenvektoren gegeben:

$\overrightarrow{k_R}^T = (5 \quad 2 \quad 1)$ und $\overrightarrow{k_Z}^T = (80 \quad 80 \quad 120)$ und $\overrightarrow{k_E}^T = (180 \quad 200 \quad 160)$

Der Auftrag des Kunden entspricht dem Produktionsvektor $\vec{p}^T = (20 \quad 14 \quad 16)$.

Zunächst wird die Rohstoff-Endprodukt-Matrix C benötigt:

$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 83 & 46 & 112 \\ 156 & 102 & 239 \\ 105 & 60 & 145 \end{pmatrix}$ (mithilfe des GTR)

Die variablen Kosten je ME der Endprodukte werden berechnet durch

$$\overrightarrow{k_V}^T = \overrightarrow{k_R}^T \cdot C + \overrightarrow{k_Z}^T \cdot B + \overrightarrow{k_E}^T = (832 \quad 494 \quad 1183) + (520 \quad 320 \quad 720) + (180 \quad 200 \quad 160)$$

$$= (1532 \quad 1014 \quad 2063)$$

Gesamtkosten für den Auftrag: $\overrightarrow{k_V}^T \cdot \vec{p} + 15940 = 77844 + 15940 = 93784$ Euro.

Der Verkaufspreis für das Endprodukt E_1 beträgt $3 \cdot z$, für E_2 $2 \cdot z$ und für E_3 $4 \cdot z$.
Als Erlös ergibt sich damit: $3z \cdot 20 + 2z \cdot 14 + 4z \cdot 16 = 152z = 93784$
Daraus folgt $z = 617$.
Der minimale Verkaufspreis für E_1 beträgt 1851 Euro, für E_2 1234 Euro und für E_3 2468 Euro.

b) Gegeben ist der Rohstoffvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} 86 \\ 172 \\ x \end{pmatrix}$

Mit diesen Rohstoffen sollen Zwischenprodukte hergestellt werden.

Es gilt: $A \cdot \vec{z} = \vec{r} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 8 & 19 & 86 \\ 35 & 14 & 44 & 172 \\ 25 & 10 & 25 & x \end{array}\right)$

Nun muss dieses LGS auf Stufenform gebracht werden:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 8 & 19 & 86 \\ 0 & 0 & -215 & -430 \\ 0 & 0 & -25 & 2150-20x \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 8 & 19 & 86 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 430-4x \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 8 & 19 & 86 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 440-4x \end{array}\right)$$

Aufgrund der Nullzeile in der letzten Zeile der Matrix ist dieses LGS entweder unlösbar oder es besitzt unendlich viele Lösungen.

Unendlich viele Lösungen gibt es, falls 440 – 4x = 0 gilt, also für x = 110.
Das heißt, vom Rohstoff R_3 müssen 110 ME bereitgestellt werden, damit sämtliche Rohstoffe bei der Produktion von Zwischenprodukten aufgebraucht werden.
Aus der 2.Zeile folgt $z_3 = 2$
Dann folgt aus der 1.Zeile: $20z_1 + 8z_2 + 38 = 86 \Rightarrow 20z_1 + 8z_2 = 48$

Wenn man unterstellt, dass nur ganzzahlige Werte für den Zwischenproduktvektor in Frage kommen, gibt es nur folgende Lösungen:
1.Möglichkeit: $z_1 = 0$ und $z_2 = 6$ und $z_3 = 2$
2.Möglichkeit: $z_1 = 2$ und $z_2 = 6$ und $z_3 = 2$