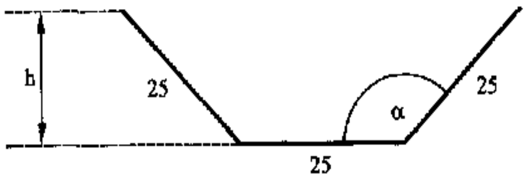
Abiturprüfung Mathematik 2007 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien ohne TG – Anwendungsorientierte Aufgabe
Teil 3, Aufgabe 1

1
Aus drei 25 cm breiten Brettern soll eine oben offene Rinne der Höhe h hergestellt werden, die nach oben breiter wird.
Die folgende Skizze zeigt den Querschnitt der Rinne.



1.1
Weisen Sie nach, dass für den Inhalt der Querschnittsfläche in Abhängigkeit von h gilt:
$A(h) = 25h + h \cdot \sqrt{625 - h^2}$; $0 < h < 25$
Stellen Sie diese Abhängigkeit grafisch dar. (4 Punkte)

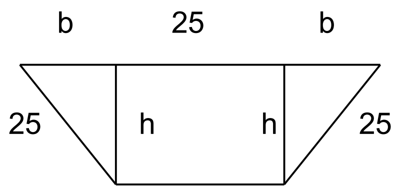
1.2
Zeigen Sie, dass es zwei Möglichkeiten gibt, eine Rinne mit einem Querschnitt von 700 cm² zu bauen.
Bestimmen Sie die zugehörigen Höhen.
Erläutern Sie, für welche Querschnitte es nur eine Möglichkeit gibt.
(4 Punkte)

1.3
Bestimmen Sie den Winkel α, den die Bretter einschließen müssen, wenn der Inhalt der Querschnittsfläche möglichst groß sein soll.
(3 Punkte)

1.4 (4 Punkte)
Prüfen Sie, ob folgende Aussage wahr ist.
Verwendet man nur zwei 25 cm breite Bretter zur Herstellung einer Rinne, so ist der maximale Inhalt der Querschnittsfläche der Rinne nur noch halb so groß wie bei einer Rinne aus drei 25 cm breiten Brettern. (4 Punkte)

Abiturprüfung Mathematik 2007 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien ohne TG – Anwendungsorientierte Aufgabe
Gruppe III, Lösung Aufgabe 1

1.1
Die Querschnittsfläche stellt ein Trapez dar.



Die Trapezfläche lässt sich zerlegen in eine Rechtecksfläche und zwei gleich große Dreiecksflächen.

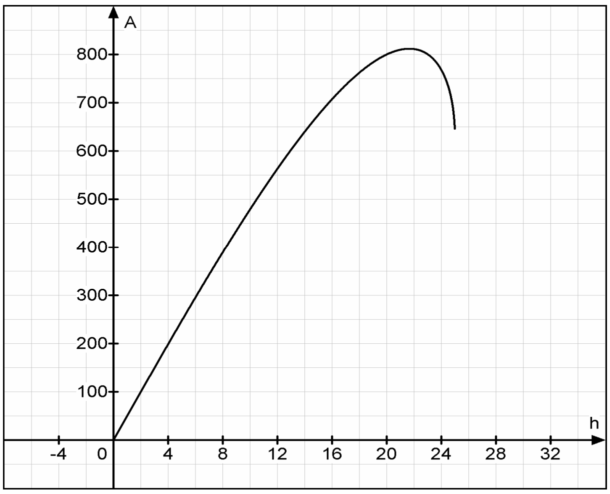
$A_{Rechteck} = 25 \cdot h$

$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$

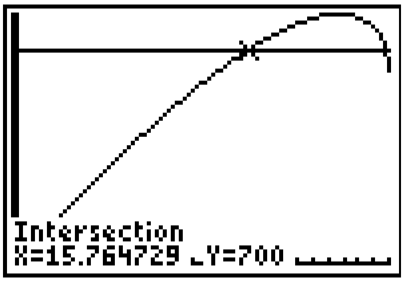
Gemäß des Satzes von Pythagoras gilt: $b = \sqrt{625 - h^2}$

$A_{Trapez} = A(h) = 25h + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{625 - h^2} \cdot h = 25h + h \cdot \sqrt{625 - h^2}$ was zu zeigen war.

Zeichnung:



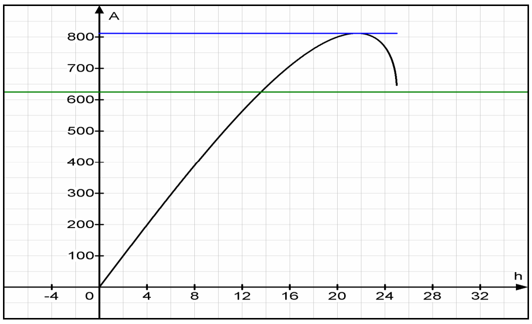
1.2
Es muss gelten: $A(h) = 700$.



Mit dem GTR ergibt sich als Lösung der Gleichung h = 15,76 oder h = 24,79.
Für diese Höhen besitzt die Rinne einen Querschnitt von 700 cm².

Anhand der Zeichnung kann man erkennen, dass es nur eine Lösung gibt, wenn die Querschnittsfläche A maximal wird.
Dies ist für A = 811,9 cm² mit h = 21,65 cm der Fall.

Desweiteren erhält man nur eine Lösung, wenn die Querschnittsfläche $A < 625$ cm² ist.
Dies ist der Fall für h < 13,59 (GTR).
Alle waagrechten Geraden unterhalb der grünen Geraden schneiden das Schaubild von A nur einmal.



Zusammenfassung:
Man erhält eine Rinne für 0<h<13,59 cm und für h = 21,65 cm.

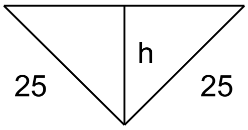
1.3
In Aufgabe 1.2 wurde bereits ermittelt, dass es für h = 21,65 cm eine maximale Fläche von A = 811,9 cm² gibt,

Für den kleinen Winkel β in dem Teildreieck des Trapezes gilt:

$\cos\beta = \frac{h}{25} = \frac{21{,}65}{25} \Rightarrow \beta = 30°$ (GTR auf DEGREE stellen !)

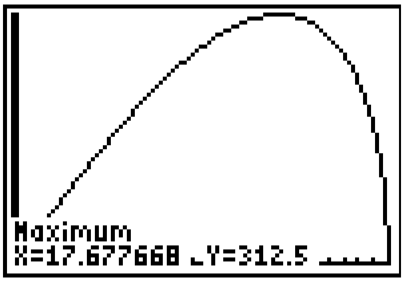
Für den Winkel α folgt dann $\alpha = 90° + \beta = 120°$.

1.4



Bei der Nutzung von zwei Brettern hat die Rinne die obere Gestalt.

Fläche der Rinne: $A(h) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{625 - h^2} \cdot h = h \cdot \sqrt{625 - h^2}$



Die Berechnung mit dem GTR ergibt, dass die Querschnittsfläche für h = 17,7 cm maximal wird mit einer maximalen Fläche von 312,5 cm².
Diese maximale Fläche ist nicht halb so groß wie die maximale Fläche bei der Nutzung von drei Brettern.
Die Aussage ist somit falsch.