Berufliches Gymnasium (TG)
Hauptprüfung 2011 Teil 4, Vektorgeometrie, Aufgabe 2
Baden-Württemberg

2
Im Anschauuungsraum sind die Punkte A(0/0/-1), $B(3\sqrt{3}\,/\,3\,/\,-1)$, C(0/6/-1) und $D(\sqrt{3}\,/\,3\,/\,5)$ gegeben.
Die Punkte A, B, C und D sind die Eckpunkte einer Pyramide mit dem gleichseitigen Dreieck ABC als Grundfläche.

2.1
Zeichnen Sie die Pyramide in ein räumliches Koordinatensystem (3 Punkte)

2.2
Zeigen Sie, dass die Pyramide gleichschenklige Dreiecke als Seitenflächen hat.
(3 Punkte)

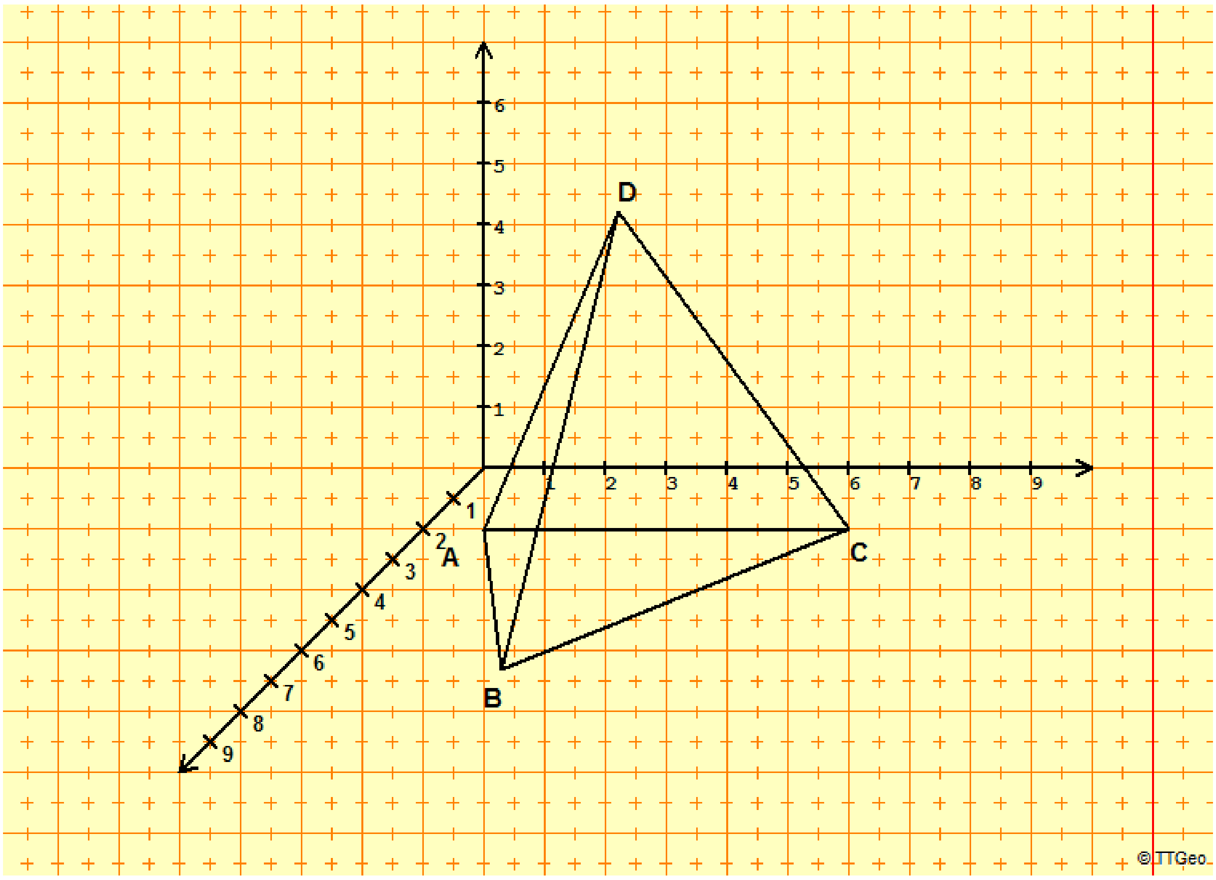
2.3
Berechnen Sie das Volumen der Pyramide. (4 Punkte)

2.4
Bestimmen Sie den Punkt, der von allen vier Ecken der Pyramide gleich weit entfernt ist. (5 Punkte)

----
15 Punkte

Berufliches Gymnasium (TG)
Hauptprüfung 2011 Teil 4, Vektorgeometrie, Lösung zu Aufgabe 2
Baden-Württemberg

2.1



2.2
Ein Dreieck ist gleichschenklig, wenn zwei der drei Dreiecksseiten die gleiche Länge besitzen.

Es gilt $\overline{AC} = 6$.
Da das Dreieck ABC gemäß der Aufgabenstellung gleichseitig ist, gilt $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} = 6$.

Für die Länge der Seitenkanten gilt:

$$\overline{AD} = \left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3+9+36} = \sqrt{48}$$

$$\overline{BD} = \left|\overrightarrow{BD}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{12+0+36} = \sqrt{48}$$

$$\overline{CD} = \left|\overrightarrow{CD}\right| = \left|\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3+9+36} = \sqrt{48}$$

Damit sind alle drei Seitenkanten der Pyramide gleich lang und die Seitendreiecks sind alle gleichschenklig.

2.3

Für das Volumen einer Pyramide gilt: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

Die Grundfläche ist das gleichseitige Dreieck ABC mit der Kantenlänge 6.

Für die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks gilt: $A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, also $G = A = \frac{36}{4}\sqrt{3} = 9 \cdot \sqrt{3}$

Die Höhe der Pyramide beträgt h = 6.
(Begründung: Die Grundfläche ABC liegt auf der Höhe $x_3 = -1$ (da alle Punkte ABC diese x_3-Koordinate besitzen).
Der Punkt D besitzt die x_3-Koordinate 5, somit ist der senkrechte Abstand von der Grundfläche bis zur Spitze D gleich 6.

$$V = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot \sqrt{3} \cdot 6 = 18 \cdot \sqrt{3}$$

2.4

Der Punkt D hat von allen Punkten A, B und C den gleichen Abstand , wie in Teilaufgabe 2.2 bereits gezeigt wurde.

Die Menge aller Punkte, die von A, B und C gleich weit entfernt liegt, liegen auf einer Gerade, die den Punkt D enthält und orthogonal auf der Grundfläche ABC steht.

Die Gleichung dieser Gerade lautet: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ein allgemeiner Punkt auf g lautet $P(\sqrt{3} / 3 / 5 + r)$.

Damit der Punkt P von A, B, C und D die gleiche Entfernung hat, muss folgende Bedingung erfüllt sein:

$$\overline{PA} = \overline{PD}$$

Es gilt $\overline{PA} = \left|\overrightarrow{PA}\right| = \left|\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -3 \\ -6-r \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3+9+(-6-r)^2} = \sqrt{12+36+12r+r^2} = \sqrt{r^2+12r+48}$

und $\overline{PD} = \left|\overrightarrow{PD}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix}\right| = \sqrt{r^2}$

Es muss also gelten: $\sqrt{r^2+12r+48} = \sqrt{r^2}$

$\Rightarrow r^2+12r+48 = r^2 \Rightarrow 12r = -48 \Rightarrow r = -4$

Somit lautet der gesuchte Punkt $P(\sqrt{3}\,/\,3\,/\,1)$.