Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG, BTG)
Hauptprüfung 2012 Teil 4, Vektorgeometrie, Aufgabe 1
Baden-Württemberg

1

Gegeben sind die Punkte A(-5/2/1), B(-2/3/-1), C(-1/3/-2) und die Gerade

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$$

Die Punkte A, B und C legen die Ebene E fest.

1.1 (4 Punkte)
Berechnen Sie den Schnittpunkt von E und g.

1.2 (6 Punkte)
Die Schnittpunkte S_1 und S_2 der Ebene E mit der x_1- und der x_2-Achse, der Ursprung sowie ein Punkt S auf der x_3-Achse sind die Eckpunkte einer Pyramide.
Berechnen Sie einen Punkt S so, dass die Pyramide das Volumen 30 hat.

1.3 (5 Punkte)
Für alle $a,b \in \mathbb{R}$ ist die Gerade h gegeben durch

$$h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} b \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2-4a \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$$

Für welche Werte von a und b sind die Geraden g und h parallel und verschieden ?

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG, BTG)
Hauptprüfung 2012 Teil 4, Vektorgeometrie, Lösung zu Aufgabe 1
Baden-Württemberg

1.1

Aufstellen der Ebenengleichung durch A, B und C:

$$E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt von E und g:

$$\text{Gleichsetzen: } \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{cccccc} 3r & +4s & -2t & = & 14 \\ r & +s & -t & = & 5 \\ -2r & -3s & -3t & = & 7 \end{array}$$

Mit dem GTR ergibt sich: r = -2 ; s = 3 ; t = -4

$$\text{Einsetzen von } t = -4 \text{ in die Gerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt hat die Koordinaten R(1/3/-4).

1.2

Berechnung des Schnittpunktes von E mit der x_1 – Achse: $S_1(x_1 / 0 / 0)$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Dies führt auf die Lösung von folgendem Gleichungssystem:

$$\begin{array}{cccc} r & +s & = & -2 \\ -2r & -3s & = & -1 \end{array}$$

Lösung mit GTR: r = -7 ; s = 5

Daraus folgt: $x_1 = -5 - 21 + 20 = -6$ und damit $S_1(-6/0/0)$

Berechnung des Schnittpunktes von E mit der x_2 – Achse: $S_2(0/x_2/0)$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Dies führt auf die Lösung von folgendem Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrcr} 3r & +4s & = & 5 \\ -2r & -3s & = & -1 \end{array}$$

Lösung mit GTR: r = 11 ; s = -7

Daraus folgt: $x_2 = 2 + 11 - 7 = 6$ und damit $S_2(0/6/0)$

Für das Pyramidenvolumen gilt: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

Die Grundfläche G entspricht dem Dreieck in der $x_1 - x_2$-Ebene mit den Eckpunkten S_1, S_2, O

Die Fläche des (in O rechtwinkligen) Dreiecks beträgt $G = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18$ FE.

Der Punkt $S(0/0/x_3)$ liegt auf der x_3-Achse.
Die Höhe der Pyramide entspricht dem $x_3 - \text{Wert}$ von S.

Einsetzen der bekannten Werte in die Volumenformel: $30 = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot h \Rightarrow h = 5$ LE

Damit lautet S(0/0/5). Es wäre auch S(0/0/-5) möglich.

1.3

Zwei Geraden sind genau dann parallel, wenn die Richtungsvektoren Vielfache zueinander sind.

Die Bedingung lautet: $k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 - 4a \end{pmatrix}$

Aus der 1.Zeile und 2.Zeile : k = -2
Aus der 3.Zeile folgt: $-2 \cdot 3 = 2 - 4a \Rightarrow a = 2$

Damit die Geraden verschieden sind, darf der Punkt D(b/4/-1), der auf der Geraden h liegt, nicht auf g liegen.

Punktprobe von D mit g: $\begin{pmatrix} b \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Aus der 2. Zeile und 3.Zeile folgt t = -3.
Damit D auf g liegt, müsste gelten: $b = 9 - 3 \cdot 2 = 3$.

Da die Geraden jedoch verschieden sein sollen, muss $b \neq 3$ sein.

Ergebnis: Für a = 2 und $b \neq 3$ sind die Geraden parallel, aber verschieden.