Abiturprüfung Mathematik 2007 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien ohne TG – Anwendungsorientierte Aufgabe
Teil 3, Aufgabe 3

3
Man schenkt so viel Bier in einen Messzylinder, bis der Bierschaum den oberen Rand erreicht. Anschließend wird die Höhe des Bierschaums in Abhängigkeit von der Zeit t gemessen. Es wird angenommen, dass der Bierschaum exponentiell gemäß der Funktion f mit

$$f(t) = c \cdot e^{kt} \;;\; t \in \mathbb{R}^+ \;;\; c > 0 \;;\; k < 0$$

zerfällt.
t gibt die Zeit in Sekunden, f(t) die Schaumhöhe in cm an.
Die Halbwertszeit ist die Zeit, die verstreicht, bis sich die Schaumhöhe auf die Hälfte reduziert hat.

3.1
Zeigen Sie, dass die Halbwertszeit unabhängig von der Anfangsschaumhöhe ist.
(3 Punkte)

3.2
Ein Experiment ergibt für verschiedene Biersorten folgende Ergebnisse:

Biersorte	Zerfallsgesetz	Halbwertszeit in Sek.	Zeit in Sek. Bis zur Schaumhöhe 2 cm
A	$10 \cdot e^{-0{,}008t}$	87	201
B	$15 \cdot e^{-0{,}010t}$	69	201
C	$10 \cdot e^{-0{,}010t}$	69	161
D	$18 \cdot e^{-0{,}020t}$		110
E	$10 \cdot e^{-0{,}020t}$	35	101
F		58	156

3.2.1
Bestimmen Sie die Halbwertszeit für die Biersorte D sowie das Zerfallsgesetz für die Biersorte F. (4 Punkte)

3.2.2
Die Schaumhöhe von 2cm soll möglichst schnell erreicht werden. Erläutern Sie an Hand von Beispielen aus der Tabelle den Einfluss der Konstanten c und k auf diese Zielvorgabe. (4 Punkte)

3.2.3
Ab welchem Zeitpunkt nimmt die Schaumhöhe der Sorte C schneller ab als die Schaumhöhe der Sorte D ? (4 Punkte)

Abiturprüfung Mathematik 2007 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien ohne TG – Anwendungsorientierte Aufgabe
Teil 3, Lösung Aufgabe 3

3.1

Der Anfangsbestand beträgt $f(0) = c \cdot e^0 = c$.

Nun wird die Zeit ermittelt, bis der Bestand nur noch den Wert $\frac{1}{2}c$ besitzt:

$\frac{1}{2}c = c \cdot e^{kt} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{kt}$ (der Parameter c kann herausdividiert werden)

$\Rightarrow k \cdot t = \ln\frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\ln 0{,}5}{k}$ Die ist die Halbwertszeit und unabhängig vom Anfangsbestand c.

3.2.1

Halbwertszeit von Sorte D: Mit Hilfe der Formel aus 3.1 gilt für die Halbwertszeit
$t = \frac{\ln 0{,}5}{k} = \frac{\ln 0{,}5}{-0{,}020} = 35$ (Sekunden)

(Da die Sorte E denselben k-Wert hat, muss das Ergebnis der Sorte D genauso groß sein wie bei E).

Zerfallsgesetz von F:
Aufgrund der bekannten Halbwertszeit kann der Parameter k berechnet werden:
$t = \frac{\ln 0{,}5}{k} \Rightarrow k = \frac{\ln 0{,}5}{58} = -0{,}0120$
Desweiteren gilt $f(156) = 2 \Rightarrow c \cdot e^{-0{,}0120 \cdot 156} = 2 \Rightarrow c = 13$

Somit gilt für die Sorte F: $f(t) = 13 \cdot e^{-0{,}0120 \cdot t}$

3.2.2
Der Parameter c gibt die Schaumhöhe in cm zu Beginn der Beobachtung an.
Bei gleichem Parameter k wird die Schaumhöhe von 2 cm umso schneller erreicht, je geringer der Parameter c ist.
Sorte B und C haben jeweils k = -0,01. Da die Anfangsschaumhöhe bei Sorte C kleiner ist als bei Sorte B erreicht Sorte C die Schaumhöhe von 2 cm schneller.
Sorte D und E haben jeweils k = -0,02. Da die Anfangsschaumhöhe bei Sorte E kleiner ist als bei Sorte D, erreicht Sorte E die Schaumhöhe von 2 cm schneller.

Der Parameter k gibt an, wie schnell die Schaumhöhe zerfällt.
Bei gleichem Parameter c wird die Schaumhöhe von 2 cm umso schneller erreicht, je höher der Betrag von k ist.
Die Sorten A, C und E haben jeweils die gleiche Anfangsschaumhöhe.

Aufgrund der Werte von k hat Sorte E die Schaumhöhe von 2 cm am schnellsten erreicht. Am zweitschnellsten ist C und am langsamsten ist A.

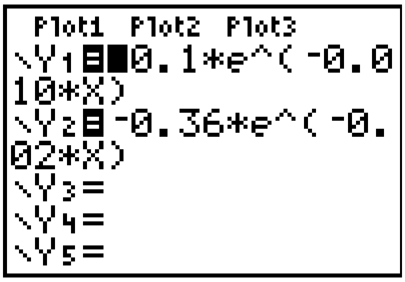
3.2.3

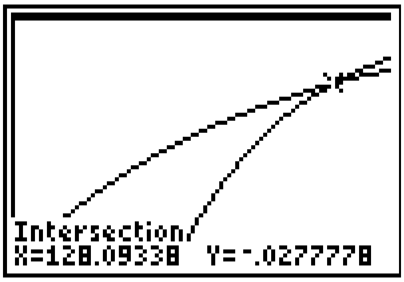
Die Abnahme der Funktion (d.h. deren Abnahmegeschwindigkeit) wird durch ihre Ableitungsfunktion beschrieben.

Es gilt $f_C'(t) = 10 \cdot e^{-0{,}010t} \cdot (-0{,}01) = -0{,}1 \cdot e^{-0{,}010t}$

$f_D'(t) = 18 \cdot e^{-0{,}020t} \cdot (-0{,}02) = -0{,}36 \cdot e^{-0{,}020t}$

Gesucht ist der Zeitpunkt, für den gilt: $f_C'(t) < f_D'(t)$





Diese Ungleichung kann entweder direkt oder mit Hilfe des GTR gelöst werden.

Aus dem GTR-Schaubild ergibt sich als Lösung t > 128,09.

Nach 128 Sekunden nimmt die Schaumhöhe von C schneller ab als die von D.