Berufliches Gymnasium (TG)
Hauptprüfung 2010 Teil 4, Vektorgeometrie, Aufgabe 1
Baden-Württemberg

1
Im Anschauungsraum sind die Punkte A(6/4/0), B(1/4/0), C(1/0/3), D(6/0/3) und S(3,5/5/5,5) gegeben.

1.1
Zeigen Sie, dass die Punkte A, B, C, D und S eine Pyramide mit der quadratischen Grundfläche ABCD bilden. (7 Punkte)

1.2
M ist der Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks ABCD.
Weisen Sie nach, dass die Gerade (MS) orthogonal zur Ebene ist, in der dieses Viereck liegt.
Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide ABCDS.
(4 Punkte)

1.3
Bestimmen Sie einen Punkt S* als Spitze der Pyramide ABCDS* so, dass ihre Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind.

(4 Punkte)

Berufliches Gymnasium (TG)
Hauptprüfung 2010 Teil 4, Vektorgeometrie, Lösung zu Aufgabe 1
Baden-Württemberg

1.1

Es gilt $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Da die gegenüberliegenden Vektoren gleich sind, bildet das Viereck ABCD ein Parallelogramm.

Es gilt $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$, das heißt im Eckpunkt A ist ein rechter Winkel.

Außerdem gilt $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{25+0+0} = 5$ und $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{0+16+9} = 5$, das heißt alle vier Seiten des Vierecks sind gleich lang.
Damit ist das Viereck ABCD ein Quadrat.

Damit die Punkte A, B, C, D und S eine Pyramide bilden, darf der Punkt S nicht in der Grundflächenebene enthalten sein.

Um dies zu prüfen, wird zunächst die Gleichung der Ebene E durch die Punkte A, B und D aufgestellt:

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Prüfung, ob der Punkt S auf E liegt: $\begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 5 \\ 5{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Aus der 3.Zeile folgt: $5{,}5 = 3s \Rightarrow s = \frac{11}{6}$

Aus der 2.Zeile folgt: $5 = 4 - 4s \Rightarrow s = -\frac{1}{4}$

Da dies ein Widerspruch ist, liegt S nicht auf E.
Damit bilden die Punkte A, B, C, D und S eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche.

1.2
Der Mittelpunkt M entspricht dem Mittelpunkt der Diagonalen $\overline{AC}$.

Es gilt $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\begin{pmatrix}6\\4\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3,5\\2\\1,5\end{pmatrix}$ also M(3,5/2/1,5)

Damit die Gerade durch M und S senkrecht auf der Ebene E steht, muss der Vektor
$\overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}$ senkrecht auf den Richtungsvektoren der Ebene E stehen.

Kontrolle: $\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5\\0\\0\end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-4\\3\end{pmatrix} = 0$

Somit steht die Gerade (MS) senkrecht auf der Grundfläche der Pyramide.

Das Pyramidenvolumen beträgt $V = \frac{1}{3}\cdot G\cdot h$

Es gilt $G = A_{Quadrat} = 5\cdot 5 = 25$ und $h = \overline{MS} = \sqrt{0^2+3^2+4^2} = 5$.

Daraus folgt $V = \frac{1}{3}\cdot 5^3 = \frac{125}{3}$ VE.

1.3
Damit die Mantelfläche aus 4 gleichseitigen Dreiecken bestehen kann, muss die Spitze S auf der Geraden g durch M und S liegen.

Gleichung von g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3,5\\2\\1,5\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}$.

Der Punkt S* auf der Gerade g besitzt die allgemeinen Koordinaten S*(3,5/2+3r/1,5+4r)

Eine Seitenkante der Pyramide muss nun die Seitenlänge 5 besitzen:

$$\left|\overrightarrow{CS^*}\right| = \left|\begin{pmatrix}2,5\\2+3r\\-1,5+4r\end{pmatrix}\right| = \sqrt{2,5^2+(2+3r)^2+(-1,5+4r)^2} = 5$$

$$\Rightarrow 6,25+4+12r+9r^2+2,25-12r+16r^2 = 25$$

$$\Rightarrow 12,5+25r^2 = 25 \Rightarrow r^2 = 0,5 \Rightarrow r = \pm\sqrt{0,5} \approx \pm 0,707$$

Es gibt somit zwei verschiedene Möglichkeiten für S*.
S*(3,5/4,121/4,328) oder S*(3,5/-0,121/-1,328)