Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2011 Teil 4, Lineare Optimierung, Aufgabe 1
Baden-Württemberg

1
Ein Unternehmen produziert die zwei Nuss-Frucht-Mischungen „nussig“ und „fruchtig“. Zum 50-jährigen Firmenjubiläum wird zusätzlich die Nuss-Frucht-Mischung „50spezial“ hergestellt.

1.1
Die folgende Tabelle gibt für eine Packung der jeweiligen Nuss-Frucht-Mischung die Zutaten in Mengeneinheiten (ME) und den Gewinn in Geldeinheiten an.

	Paranüsse	Walnüsse	Mango	Rosinen	Gewinn
„nussig“	3	1	2	0	4
„fruchtig“	2	0	3	3	5
„50spezial“	5	2	5	2	5

Für die Produktion der Nuss-Frucht-Mischungen stehen 2500 ME Paranüsse, 750 ME Walnüsse, 3000 ME Mango und 2700 ME Rosinen zur Verfügung.
Für die Jubiläumsaktion werden 150 Packungen der Nuss-Frucht-Mischung „50spezial“ hergestellt.
Bestimmen Sie, wie viele Packungen der beiden anderen Nuss-Frucht-Mischungen das Unternehmen herstellen und verkaufen soll, um den Gewinn zu maximieren. Wie hoch ist der maximale Gewinn ?
Von dem Vorrat an Rosinen sind 380 ME verdorben. Untersuchen Sie, ob dies die Produktionsmengen beeinflusst, die zum maximalen Gewinn führen. (8 Punkte)

1.2
Das Unternehmen erwägt, die Nuss-Frucht-Mischung „50spezial“ in seine reguläre Produktpalette aufzunehmen. Mithilfe des Simplexverfahrens soll geklärt werden, welche Mengen der drei Nuss-Frucht-Mischungen produziert und verkauft werden müssen, um den maximalen Gewinn zu erzielen.
Dieses Maximierungsproblem führt auf folgendes Tableau:

Nussig	Fruchtig	50spezial	Paranüsse	Walnüsse	Magno	Rosinen	Vorrat
x	y	z	u_1	u_2	u_3	u_4	
0	0	$-\frac{5}{6}$	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{6}$	250
0	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	600
1	0	$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	150
0	1	$\frac{2}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	900
0	0	$-\frac{13}{3}$	0	0	-2	$\frac{1}{3}$	G-5100

Interpretieren Sie die Zielfunktionszeile.
Berechnen Sie, wie viele Packungen jeder Nuss-Frucht-Mischung das Unternehmen herstellen und verkaufen muss, um den Gewinn zu maximieren. (7 Punkte)

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2011 Teil 4, Lineare Optimierung, Lösung zu Aufgabe 1
Baden-Württemberg

1.1
Die Berechnung des maximalen Gewinns erfolgt mit Hilfe des Simplex-Algorithmus:

x = Anzahl der Packungen „nussig“
y = Anzahl der Packungen „fruchtig“

Da 150 Packungen von „50spezial“ hergestellt werden, reduzieren sich die zur Verfügung stehenden Mengeneinheiten der einzelnen Nüsse/Früchte auf folgende Größen:

Paranüsse: $2500 - 150 \cdot 5 = 1750$ ME
Walnüsse: $750 - 2 \cdot 150 = 450$ ME
Mango: $3000 - 5 \cdot 150 = 2250$ ME
Rosinen: $2700 - 2 \cdot 150 = 2400$ ME

Folgende einschränkenden Bedingungsungleichungen sind nun zu erfüllen:

$$\begin{array}{rrcrl} 3x & +2y & \leq & 1750 & (1) \\ x & & \leq & 450 & (2) \\ 2x & +3y & \leq & 2250 & (3) \\ & 3y & \leq & 2400 & (4) \end{array}$$

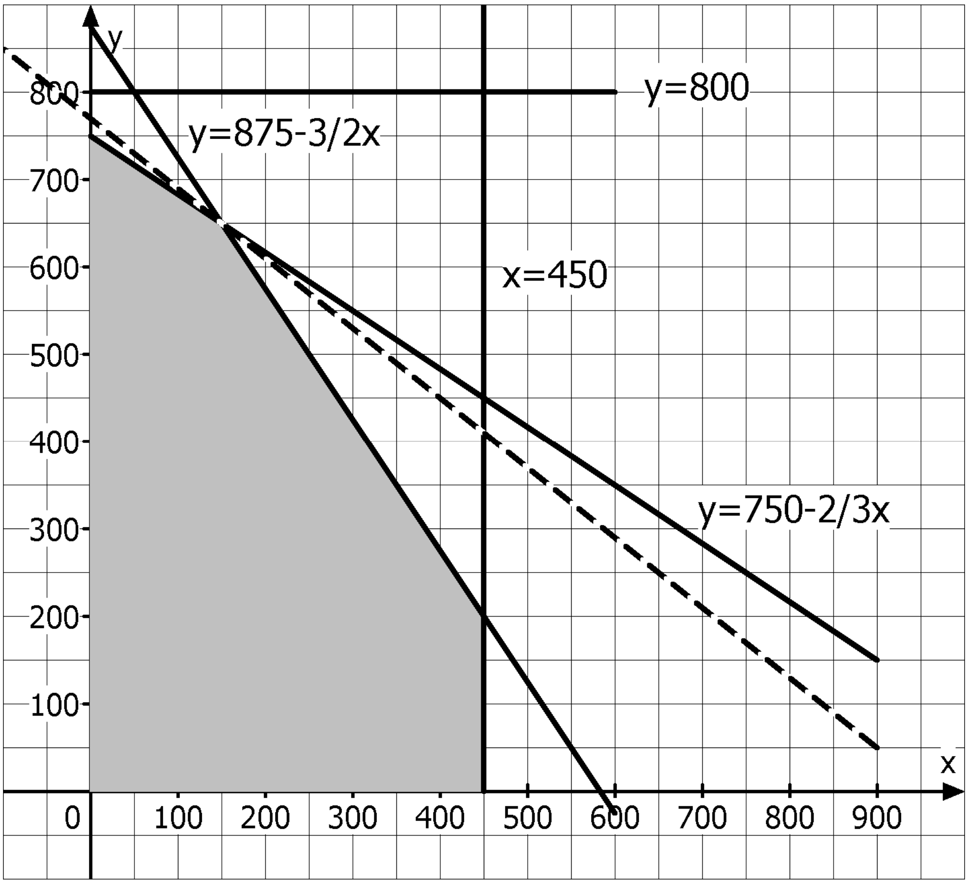
Zu maximieren ist der Gewinn: $4x + 5y = G$

Für die zeichnerische Lösung muss das Ungleichungssystem (1) bis (4) folgendermaßen umgeformt werden:

$$\begin{array}{rcrr} y & \leq & -1{,}5x & +875 \\ x & \leq & & 450 \\ y & \leq & -\frac{2}{3}x & +750 \\ y & \leq & & 800 \end{array}$$

Die Maximierungsgleichung wird umgeformt zu $y = -\frac{4}{5}x + \frac{G}{5}$

Nun werden die einzelnen Geraden in ein Koordinatensystem eingezeichnet und die beschriebene Fläche schraffiert. Die Gerade der Maximierungsgleichung ist gestrichelt eingezeichnet.



Aus dem Schaubild ergibt sich, dass der Eckpunkt der Fläche, in dem sich die Geraden $y = -\frac{2}{3}x + 750$ und $y = -1{,}5x + 875$ schneiden, die optimale Mengenkombination darstellt.
Die beiden Geraden schneiden sich bei x = 150.
Daraus folgt $y = -1{,}5 \cdot 150 + 875 = 650$.

Der Gewinn wird maximal, wenn das Unternehmen 150 Packungen „nussig“ und 650 Packungen „fruchtig“ verkauft.
Der Gewinn der Packungen „fruchtig“ und „nussig“ beträgt $G = 4 \cdot 150 + 5 \cdot 650 = 3850$
Der Gewinn der Packungen „50spezial“ beträgt $G = 5 \cdot 150 = 750$

Der Gesamtgewinn beträgt $G = 3850 + 150 \cdot 5 = 4600$ GE.

Wenn von den 2700 ME Rosinen 380 ME verdorben sind, führt das zu keiner Änderung des Gesamtgewinns.
Begründung: Es werden nur $3 \cdot 650 = 1950$ ME Rosinen für „fruchtig“ benötigt, für „nussig“ werden gar keine Rosinen benötigt und für „50spezial“ werden $2 \cdot 150 = 300$ ME benötigt, insgesamt also 1950 + 300 = 2250 ME. Somit sind ohnehin 2700 – 2250 = 450 ME Rosinen übrig.

1.2

Interpretation Zielfunktionszeile des vorliegenden Tableaus:

- Der Gewinn der Produktion beträgt 5100 GE.
- Wird zusätzlich eine Packung „50spezial" produziert (z = 1) ohne weitere Änderungen, verringert sich der Gewinn um ca. 4,33 GE.
- Wird eine Mengeneinheit der Mangos weniger verarbeitet ($u_3 = 1$) ohne weitere Änderungen, dann sinkt der Gewinn um 2 GE.
- Wird eine Mengeneinheit der Rosinen weniger verarbeitet ($u_4 = 1$) ohne weitere Änderungen, erhöht sich der Gewinn um ca. 0,33 GE.

Da in der letzten Zeile (Zielfunktionszeile) noch eine positive Zahl $\frac{1}{3}$ existiert, kann der bisher errechnete Gewinn von 5100 GE noch weiter vergrößert werden, d.h. der maximale Gewinn ist noch nicht erreicht.

x	y	z	u_1	u_2	u_3	u_4	Erg.	Quotient
0	0	$-\frac{5}{6}$	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{6}$	250	300
0	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	600	1200
1	0	$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	150	--
0	1	$\frac{2}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	900	2700
0	0	$-\frac{13}{3}$	0	0	-2	$\frac{1}{3}$	G-5100	

Die größte positive Zahl in der letzten Zeile steht in der 7.Spalte.
Der kleinste Quotient steht in der 1.Zeile.
Somit ist $\frac{5}{6}$ das Pivotelement.

Division der 1.Zeile durch $\frac{5}{6}$:

Nr.	x	y	z	u_1	u_2	u_3	u_4	Erg.	Umformung
(1)	0	0	-1	1,2	0	-1,8	1	300	
(2)	0	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	600	$2\cdot(2)-(1)$
(3)	1	0	$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	150	$2\cdot(3)+(1)$
(4)	0	1	$\frac{2}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	900	$3\cdot(4)-(1)$
(5)	0	0	$-\frac{13}{3}$	0	0	-2	$\frac{1}{3}$	G-5100	$3\cdot(5)-(1)$

Nr.	x	y	z	u_1	u_2	u_3	u_4	Erg.
(1)	0	0	-1	1,2	0	-1,8	1	300
(2)	0	0	2	-1,2	2	0,8	0	900
(3)	2	0	2	1,2	0	-0,8	0	600
(4)	0	3	3	-1,2	0	1,8	0	2400
(5)	0	0	-12	-1,2	0	-4,2	0	3G-15600

Da nun keine Zahl in der Zielfunktionszeile mehr positiv ist, kann der Gewinn nicht weiter optimiert werden.

Es gilt: $2x = 600 \Rightarrow x = 300$
$3y = 2400 \Rightarrow y = 800$
$z = 0$
$u_1 = u_3 = 0$
$2u_2 = 900 \Rightarrow u_2 = 450$
$u_4 = 300$

Der maximale Gewinn beträgt $G = 15600 : 3 = 5200$ GE.

Hierfür müssen 300 ME „nussig“, 800 ME „fruchtig“ und 0 ME „50spezial“ hergestellt werden. Übrig bleiben 450 ME Walnüsse und 300 ME Rosinen.

Da z = 0 ist, ist es also für die Firma nicht sinnvoll, die neue Mischung „50spezial“ in die reguläre Produktpalette mit aufzunehmen.