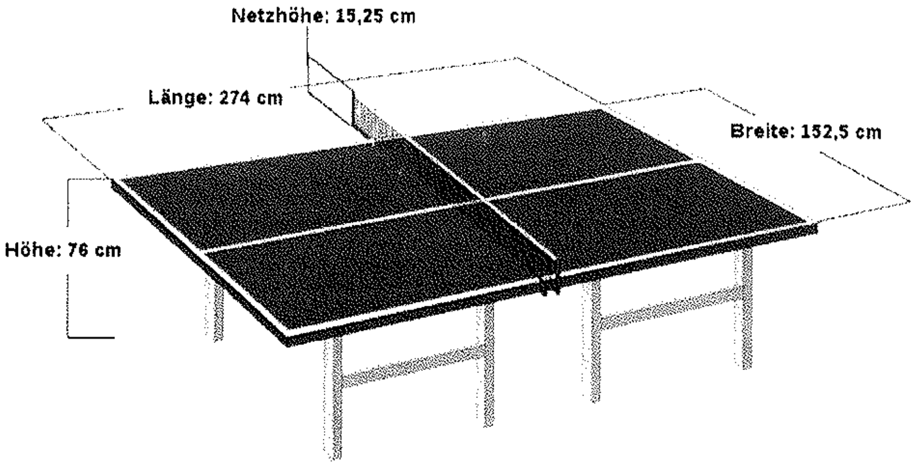
Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG, BTG)
Hauptprüfung 2012 Teil 4, Vektorgeometrie, Aufgabe 2
Baden-Württemberg

2



nach http://de.wikipedia.org/wiki/Tischtennis

Die Punkte A(0/91,5/76), B(122/0/76), C und D(164,4/310,7/76) sind die Eckpunkte einer Tischtennisplatte mit der Breite AB und der Länge AD.
Die Koordinaten sind in cm angegeben.

2.1 (3 Punkte)
Begründen Sie, dass die Platte parallel zur x_1x_2-Ebene liegt.
Berechnen Sie die Koordinaten von C.

2.2 (4 Punkte)
Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene, in der das Netz verläuft.

2.3 (4 Punkte)
Zeigen Sie: Die obere Netzkante liegt auf der Geraden g mit

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 143,2 \\ 155,35 \\ 91,25 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 24.4 \\ -18,3 \\ 0 \end{pmatrix} \ ;\ r \in \mathbb{R}$$

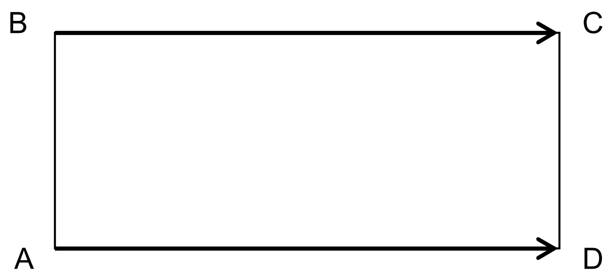
2.4 (4 Punkte)
Die Flugbahn eines Tischtennisballes lässt sich durch die Gerade h mit

$$h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 220 \\ 310 \\ 150 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix};\ \ s \in \mathbb{R} \ \text{ beschreiben.}$$

Prüfen Sie, ob der Ball ins Netz geht.

**Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG, BTG)
Hauptprüfung 2012 Teil 4, Vektorgeometrie, Lösung zu Aufgabe 2
Baden-Württemberg**

2.1



Aufgrund der Angabe, das AB die Breite und AD die Länge der Tischtennisplatte darstellt,wird das Rechteck so beschriftet.

Die Platte ist parallel zur x_1x_2-Ebene, weil alle drei gegebenen Punkte A, B und C den x_3-Wert 76 haben und daher alle Punkte auf gleicher Höhe liegen.

Berechnung der Koordinaten von C:

Wenn ABCD ein Rechteck ergibt, muss gelten: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 164{,}4-0 \\ 310{,}7-91{,}5 \\ 76-76 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 164{,}4 \\ 219{,}2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} c_1-122 \\ c_2-0 \\ c_3-76 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 164{,}4 \\ 219{,}2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt $c_1 = 286{,}4$ und $c_2 = 219{,}2$ und $c_3 = 76$; also C(286,4/219,2/76)

2.2

Die Ebene, in der das Netz verläuft enthält folgende Punkte:

Mittelpunkt M von AD: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 91{,}5 \\ 76 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 164{,}4 \\ 310{,}7 \\ 76 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 82{,}2 \\ 201{,}1 \\ 76 \end{pmatrix}$

also M(82,2/201,1/76)

Mittelpunkt N von BC: $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\begin{pmatrix} 122 \\ 0 \\ 76 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 286{,}4 \\ 219{,}2 \\ 76 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 204{,}2 \\ 109{,}6 \\ 76 \end{pmatrix}$

also N(204,2/109,6/76)

Da die Netzhöhe 15,25 cm beträgt, ist ein weiterer Punkt der Netzebene P(82,2/201,1/91,25).
Der Punkt P hat die gleichen $x_1 - / x_2 -$ Koordinaten wie M, er hat nur einen x_3-Wert, der um 15,25 cm höher ist.

Gleichung der Netzebene:

$$H: \vec{x} = \overrightarrow{OM} + r \cdot \overrightarrow{MN} + s \cdot \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 82,2 \\ 201,1 \\ 76 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 122 \\ -91,5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15,25 \end{pmatrix}$$

2.3

Die obere Netzkante enthält den Punkt P(82,2/201,1/91,25). aus Teilaufgabe 2.2
Außerdem enthält sie den Punkt R(204,2/109,6/91,25).
Der Punkt R hat die gleichen $x_1 - / x_2 -$ Koordinaten wie N, er hat nur einen x_3-Wert, der um 15,25 cm höher ist.

Gerade durch P und R: $k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 82,2 \\ 201,1 \\ 91,25 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 122 \\ -91,5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Nun muss nachgewiesen werden, dass die in der Aufgabe angegebene Geradengleichung gdieselbe Gerade darstellt wie die Gerade k.

Vergleich der Richtungsvektoren: $5 \cdot \begin{pmatrix} 24,4 \\ -18,3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 122 \\ -91,5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Da die Richtungsvektoren Vielfache sind, sind die beiden Geraden parallel.

Punktprobe: Liegt der Punkt S(143,2/155,35/91,25) (der auf g liegt) auf der Gerade k ?

$k: \begin{pmatrix} 143,2 \\ 155,35 \\ 91,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82,2 \\ 201,1 \\ 91,25 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 122 \\ -91,5 \\ 0 \end{pmatrix}$ Für r = 0,5 sind alle 3 Zeilen erfüllt.

Damit liegt der Punkt S auf k. Die beiden Geraden g und k sind identisch.
Damit ist gezeigt, dass die Gerade g die obere Netzkante beschreibt.

2.4

Die Flugbahn des Balles wird geschnitten mit der Netzebene aus Teilaufgabe 2.2.
Dies erfolgt rechnerisch durch das Gleichsetzen der beiden Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} 220 \\ 310 \\ 150 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82{,}2 \\ 201{,}1 \\ 76 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 122 \\ -91{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15{,}25 \end{pmatrix}$$

Als Lösung mit dem GTR folgt (gerundet) r = 0,497 und t = 2,322 und s = -38,6.

Einsetzen von s = -38,6 ergibt als Schnittpunkt Z(142,8/155,6/111,4)

Die Punkte der oberen Netzkante haben enien x_3 -Wert von 91,25.
Da der x_3 -Wert des Schnittpunktes Z größer als 91,25 ist, fliegt der Ball über das Netz.

Er landet also nicht im Netz.