Abiturprüfung Mathematik 2011 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien – Anwendungsorientierte Aufgabe
Teil 3, Aufgabe 2

2
Die Firma Fischer stellt speziell für die NASA entwickelte weltraumtaugliche Kugelschreiber her.
Die Produktionsgrenze der Firma liegt bei 90.000 Kugelschreibern. Es wird davon ausgegangen, dass alle produzierten Kugelschreiber auch verkauft werden.

2.1
Bei der Produktion entstehen Kosten laut folgender Tabelle:

Menge in 1000 Stück	0	20	30	60
Kosten in 1000 US-Dollar	100	140	145	170

Bestimmen Sie einen Funktionsterm, der die Kosten in Abhängigkeit von der Menge beschreibt.
(2 Punkte)

2.2
Die Firma Fischer ist der alleinige Anbieter von weltraumtauglichen Kugelschreibern.
Für den Erlös E(x) und die Gesamtkosten K(x) in US-Dollar gilt:

$E(x) = -100x^2 + 10000x$ und
$K(x) = x^3 - 100x^2 + 3600x + 100000$.

Dabei ist x die Menge der Kugelschreiber in 1000 Stück.

2.2.1
Stellen Sie den Erlös und die Gesamtkosten in Abhängigkeit von der Mange in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar.
(4 Punkte)

2.2.2
Bestimmen Sie die Stückzahl, bei welcher der Gewinn maximal ist.
Geben Sie den maximalen Gewinn in US-Dollar an. (3 Punkte)

2.2.3
Berechnen Sie den Preis, den die Firma Fischer bei einem Absatz von 4000 Stück für einen Kugelschreiber verlangen müsste, um keinen Verlust zu machen. (2 Punkte)

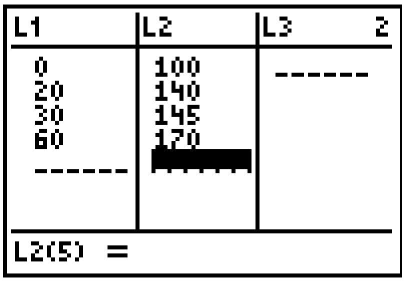
2.2.4
Mit dem Wegfall der Patentrechte werden die weltraumtauglichen Kugelschreiber auch von weiteren Unternehmen angeboten. Um konkurrenzfähig zu bleiben, verkauft die Firma Fischer die Kugelschreiber zu einem Stückpreis von 2,95 US-Dollar. Die Firma kann ihre Fixkosten auf 80000 US-Dollar senken.
Untersuchen Sie die Auswirkungen auf den maximalen Gewinn der Firma Fischer.
(4 Punkte)
----
15 Punkte

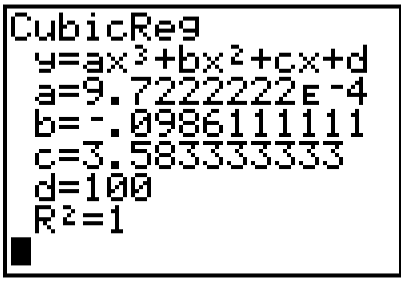
Abiturprüfung Mathematik 2011 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien – Anwendungsorientierte Aufgabe
Teil 3, Lösung Aufgabe 2

2.1

Da von der Kostenfunktion 4 Punkte bekannt sind, kann als Ansatz eine Funktion 3.Grades genutzt werden:
$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Die Funktion wird mit dem GTR mittels einer kubischen Regression ermittelt:



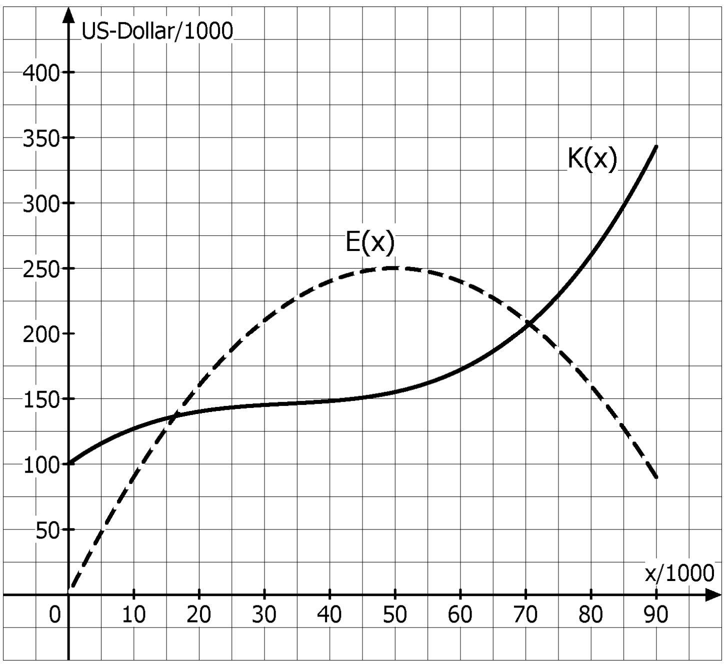


Die Kostenfunktion lautet $K(x) = 0,000972x^3 - 0,0986x^2 + 3,58x + 100$.

2.2.1

Damit die y-Werte der Erlös- und Kostenfunktion nicht zu groß werden, wird die Einheit der beiden Funktionen in 1000 US-Dollar umgerechnet.

$\frac{K(x)}{1000} = 0,001x^3 - 100x^2 + 3,6x + 100$ und $G*(x) = E*(x) - K*(x)$

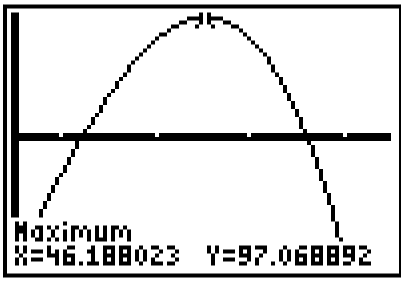


2.2.2

Die Gewinnfunktion lautet $G(x) = \frac{E(x)}{1000} - \frac{K(x)}{1000}$ wobei G(x) den Gewinn in 1000 US-Dollar ergibt.

$$G(x) = -0{,}1x^2 + 10x - \left(0{,}001x^3 - 0{,}1x^2 + 3{,}6x + 100\right)$$
$$\Rightarrow G(x) = -0{,}001x^3 + 6{,}4x - 100$$

Von dieser Gewinnfunktion wird das Maximum mit dem GTR bestimmt:



Der maximale Gewinn wird erreicht für x = 46.188 Stück mit einem Gewinn von
G = 97069 US-Dollar.

2.2.3

Die Kosten für 4000 Kugelschreiber betragen $K(4) = 112864$ US-Dollar.

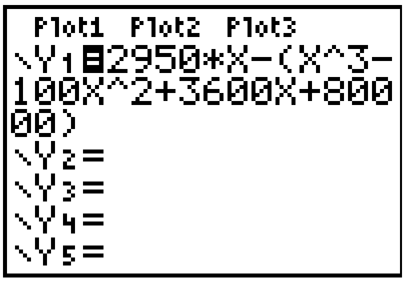
Ein Kugelschreiber müsste dann mindestens $\frac{112864}{4000} = 28{,}22$ US-Dollar kosten, um keinen Verlust zu machen.

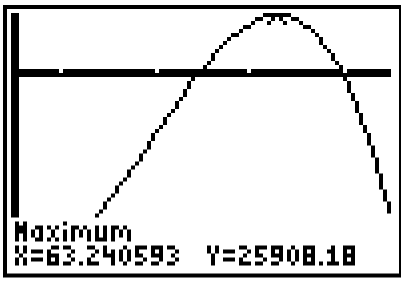
2.2.4

Aufgrund der neuen Fixkosten in Höhe von 80.000 US-Dollar lautet die neue Kostenfunktion
$K^*(x) = x^3 - 100x^2 + 3600x + 80000$

Die neue Erlösfunktion lautet $E^*(x) = 2950 \cdot x$ (x in 1000 Stück)

Die neue Gewinnfunktion beträgt $G^*(x) = E^*(x) - K^*(x)$





Der maximale Gewinn beträgt nur noch 25908 US-Dollar und wird bei einer Stückzahl von 63241 erreicht.

Da der Einzelpreis gesunken ist gegenüber der Aufgabe 2.2.2, müssen nun mehr Kugelschreiber verkauft werden (ca. 37%) und der Gewinn reduziert sich auf 27% des ursprünglichen Gewinns.