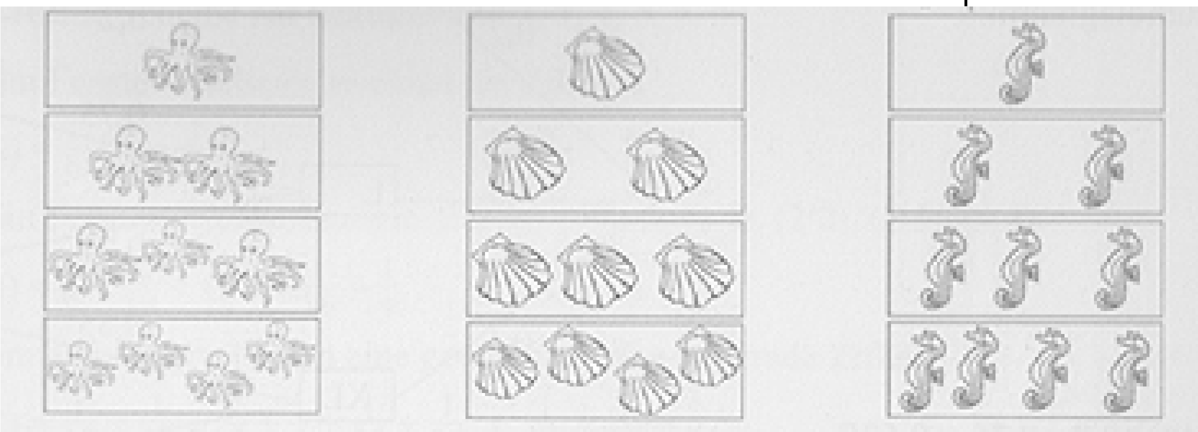
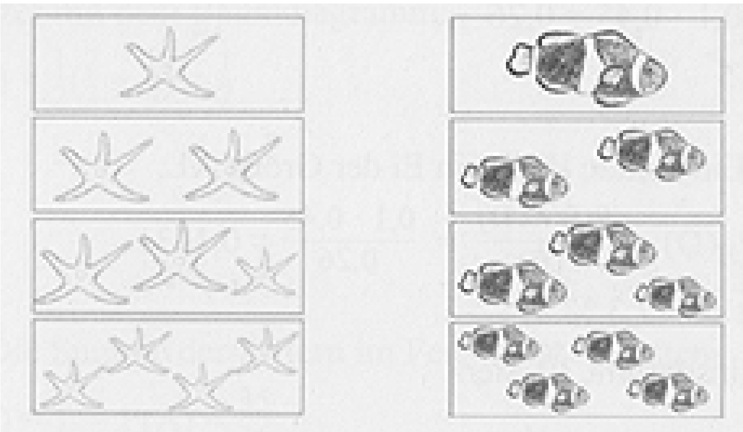
Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG, BTG, TG)
Hauptprüfung 2010 Teil 2, Stochastik, Aufgabe 2 Baden-Württemberg

2
Zu einem Kartenspiel gehören 20 Karten:

4 Krakenkarten 4 Muschelkarten 4 Seepferdchenkarten



4 Seesternkarten 4 Fischkarten



Zu jeder dieser Tierarten gibt es eine Karte mit einem Tier, eine Karte mit zwei Tieren, eine Karte mit drei Tieren und eine Karte mit vier Tieren.

2.1
Aus dem gemischten Kartenstapel zieht ein Spieler vier Karten ohne Zurücklegen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
A: Auf jeder Karte sind vier Tiere.
B: Alle Karten zeigen dieselbe Tierart.
C: Alle Karten zeigen unterschiedliche Tierarten. (7 Punkte)

2.2
Abiturienten bieten beim Schulfest folgendes Spiel an: Gegen einen Einsatz von 2€ darf ein Spieler aus den 20 Karten vier Karten ohne Zurücklegen ziehen.
Zeigen die gezogenen Karten vier verschiedene Tierarten, so erhält er eine Auszahlung von 5€. In allen anderen Fällen erhält er nichts.

2.2.1
Wie oft muss er mindestens spielen, damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine Auszahlung von 5€ zu bekommen, größer als 99% ist ? (4 Punkte)

2.2.2
Die Abiturienten vermuten, dass sie bei 500 Spieldurchgängen einen Gewinn von 340 € erzielen können.
Bestätigen oder widerlegen Sie diese Vermutung rechnerisch. (4 Punkte)

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG, BTG)
Hauptprüfung 2010 Teil 2, Stochastik, Lösung Aufgabe 2
Baden-Württemberg

2.1
Die Kartenziehung kann als Ziehung mit einem Griff interpretiert werden, da es sich um eine Ziehung ohne Zurücklegen handelt und die Reihenfolge keine Rolle spielt.

$$P(A) = \frac{\binom{5}{4}\cdot\binom{15}{0}}{\binom{20}{4}} = \frac{5}{4845} = \frac{1}{969}$$

(von 20 Karten sollen 4 gezogen werden -> Nenner
von 5 Viererkarten sollen 4 gezogen werden und von den restlichen 15 Karten keine –> Zähler)

$$P(B) = \frac{\binom{4}{4}\cdot\binom{16}{0}}{\binom{20}{4}}\cdot 5 = \frac{1}{4845}\cdot 5 = \frac{1}{969}$$

(von den 4 Karten einer Tierart sollen 4 gezogen werden; da es fünf verschiedene Tierartmöglichkeiten gibt, muss noch mit 5 multipliziert werden)

$$P(C) = \frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{0}}{\binom{20}{4}}\cdot 5 = \frac{256}{4845}\cdot 5 = \frac{256}{969}$$

(von den 5 Tierarten mit jeweils 4 Karten soll eine Tierart nicht gezogen werden und von den anderen 4 Tierarten jeweils 1 Karte; da es keine Rolle spielt, welche Tierart nicht gezogen werden soll, muss noch mit 5 multipliziert werden)

2.2.1

Es soll gelten:
P("bei n Spielen mindestens eine Auszahlung von 5€") > 0,99
$\Rightarrow$ P("bei n Spielen mindestens einmal 4 verschiedene Tierkarten ziehen) > 0,99

$\Rightarrow$ P("bei n Spielen tritt mindestens einmal Ereignis C ein") > 0,99

$\Rightarrow$ 1 – P("bei n Spielen tritt nie Ereignis C ein") > 0,99

$$\Rightarrow 1-\left(\frac{713}{969}\right)^n > 0{,}99 \Leftrightarrow \left(\frac{713}{969}\right)^n < 0{,}01 \Rightarrow n > \frac{\log 0{,}01}{\log\left(\frac{713}{969}\right)} = 15{,}01$$

Er muss mindestens 16 mal spielen.

2.2.2

Zu berechnen ist zunächst der erwartete Gewinn (aus Sicht der Abiturienten) pro Spiel.
Bei der Ziehung von 4 verschiedenen Tierkarten machen sie einen Verlust von -3€.
Ansonsten machen sie einen Gewinn von 2€.

Erwartete Gewinn pro Spiel = $-3€ \cdot \frac{256}{969} + 2€ \cdot \frac{713}{969} = 0{,}679\,€$

Bei 500 Spielen gewinnen sie im Durchschnitt $0{,}679 \cdot 500 = 339{,}53 \approx 340\,€$.
Die angegebene Vermutung kann somit bestätigt werden.