Abiturprüfung Mathematik 2011 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien – Analysis, Aufgabe 1

1.1
Für jedes $t \in \mathbb{R}$ mit t > 1 ist die Funktion g_t gegeben durch

$$g_t(x) = t - e^{-x},\ x \in \mathbb{R}$$

Das Schaubild von g_t ist G_t.

1.1.1 (3 Punkte)
Nennen Sie drei gemeinsame Eigenschaften aller Schaubilder G_t.

1.1.2 (5 Punkte)
Eine Parabel berührt G_2 auf der y-Achse und schneidet G_2 auf der x-Achse.
Bestimmen Sie die Gleichung dieser Parabel.

1.1.3 (4 Punkte)
$\overline{G_t}$ entsteht durch Spiegelung von G_t an der y-Achse.
Zeigen Sie, dass sich G_t und $\overline{G_t}$ rechtwinklig schneiden.

1.1.4 (7 Punkte)
Berechnen Sie exakt den Wert von t, für den G_t mit den Koordinatenachsen eine Fläche mit dem Inhalt 1 einschließt.

1.2
Für jedes positive reelle a ist die Funktion f_a gegeben durch

$$f_a(x) = \frac{1}{a} - a \cdot \sin(x);\quad 0 < x < 2\pi$$

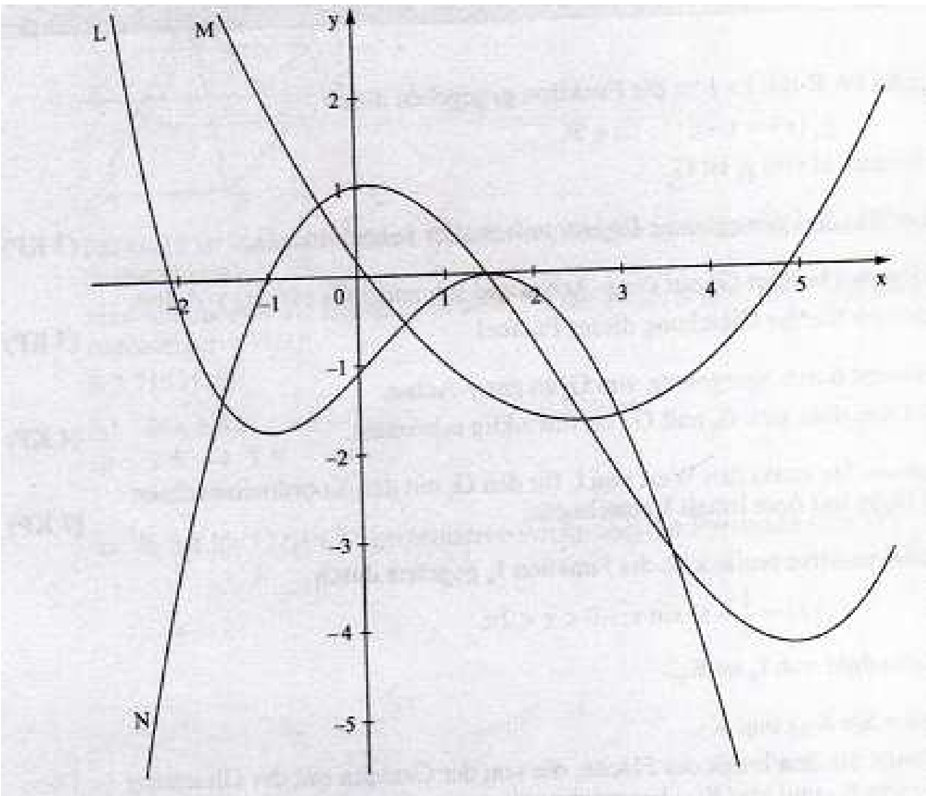
Das Schaubild von f_a ist K_a.

1.2.1 (8 Punkte)
Zeichnen Sie $K_{0,5}$ und K_2.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Geraden mit der Gleichung $x = \frac{\pi}{2}$, von K_2 und von $K_{0,5}$ begrenzt wird.

1.2.2 (5 Punkte)
Die Gerade mit der Gleichung x = u mit $0 < u < \frac{3}{2}\pi$ schneidet K_2 im Punkt P und $K_{0,5}$ im Punkt Q.
Berechnen Sie den größten Wert, den der Flächeninhalt des Dreiecks PQR mit R(0/1) annehmen kann.

1.2.3 (6 Punkte)
Bestimmen Sie die Koordinaten des Hochpunktes und des Tiefpunktes von K_a.
Für welche Werte von a verläuft K_a oberhalb der x-Achse ?

1.3
Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt der Schaubilder einer Funktion h, ihrer Ableitungsfunktion h' und einer Stammfunktion H von h.



1.3.1 (4 Punkte)
Ordnen Sie die Schaubilder den Funktionen h, h' und H zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.

1.3.2 (3 Punkte)
Das Schaubild N und die x-Achse begrenzen eine Fläche, die oberhalb der x-Achse liegt. Bestimmen Sie näherungsweise deren Inhalt.

Abiturprüfung Mathematik 2011 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien – Analysis, Aufgabe 2

2.1 (6 Punkte)
Das zur y-Achse symmetrische Schaubild einer Polynomfunktion 4.Grades schneidet die y-Achse im Punkt S(0/2), es hat an der Stelle x = 1 die Steigung -4 und einen Extrempunkt an der Stelle $x = \sqrt{2}$.

2.2
Für jedes positive reelle t ist die Funktion f_t gegeben durch

$f_t(x) = \frac{1}{t}x^4 - 4x^2 + t + 1; \quad x \in \mathbb{R}$

Das Schaubild von f_t ist K_t.

2.2.1 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass f_6 für $x > \sqrt{12}$ streng monoton wächst.

2.2.2 (7 Punkte)
Zeichnen Sie K_6.
Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Wendetangenten von K_6 mit der x-Achse.

2.2.3 (6 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Integrale und erläutern Sie ihre geometrische Bedeutung.

(1) $\int_{-3}^{3} (f_6(x) - f_2(x))dx$ (2) $\int_{-3}^{3} |f_6(x) - f_2(x)|dx$

2.2.4 (7 Punkte)
Bestimmen Sie die Gleichung der Kurve, auf der die Tiefpunkte aller K_t liegen.

2.3
Für jedes reelle a > 0 ist die Funktion g_a gegeben durch

$g_a(x) = a \cdot \cos(2x) + 4; \quad x \in \mathbb{R}$

Das Schaubild von g_a ist G_a.

2.3.1 (4 Punkte)
Beschreiben Sie, wie G_a aus dem Schaubild der Funktion h mit $h(x) = \cos(x)$; $x \in \mathbb{R}$ Hervorgeht. Geben Sie die Amplitude und die Periode von g_a an.
Für welche Werte von a verläuft G_a oberhalb der x-Achse ?

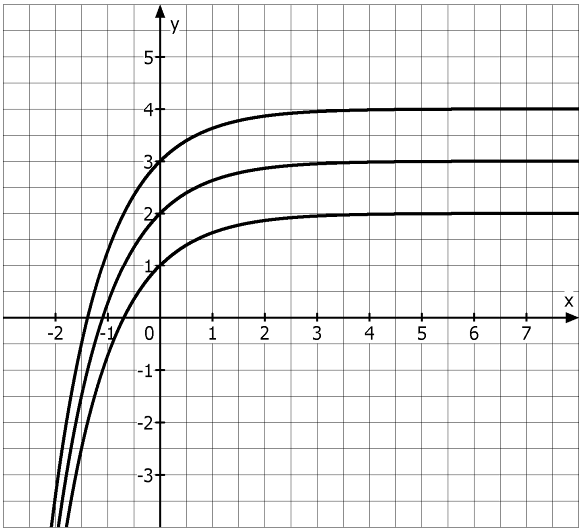
2.3.2 (4 Punkte)
G_4 und die x-Achse schließen für $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ eine Fläche ein. Berechnen Sie deren Inhalt exakt.

2.3.3 (7 Punkte)
In das Flächenstück aus 2.3.2 werden Rechtecke so einbeschrieben, dass eine Seite auf der x-Achse und ein Eckpunkt auf G_4 im ersten Quadranten liegt.
Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt des Rechtecks mit maximalem Umfang etwa fünfmal so groß ist wie der Flächeninhalt des Rechtecks mit mniimalem Umfang.

Abiturprüfung Mathematik 2011 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien – Analysis, Lösung Aufgabe 1

1.1.1

Skizziert man sich mit Hilfe des GTR drei Schaubilder der Schar (z.B. für t = 2, t = 3 und t = 4) ergeben sich folgende Skizzen:



Anhand dieser Schaubilder können folgende gemeinsame Eigenschaften entnommen werden:

- Streng monoton wachsend
- keine Extrempunkte
- keine Wendepunkte
- genau eine Nullstelle
- eine waagrechte Asymptote für $x \to \infty$

1.1.2

Für die gesuchte Parabelfunktion gilt der Ansatz $h(x) = ax^2 + bx + c$ mit $h'(x) = 2ax + b$

Es ist $g_2(x) = 2 - e^{-x}$ mit $g_2'(x) = e^{-x}$

G_2 schneidet die y-Achse im Punkt P(0/1), da $g_2(0) = 1$ ist.
Die Steigung der Scharkurve im Punkt P beträgt $g_2'(0) = 1$
Die Berührung der Parabel und der Scharkurve im Punkt P bedeutet:
$h(0) = g(0) = 1 \Rightarrow c = 1$
$h'(0) = g_2'(0) = 1 \Rightarrow b = 1$

Schnittpunkt von G_2 mit der x-Achse: $2 - e^{-x} = 0 \Rightarrow e^{-x} = 2 \Rightarrow x = -\ln 2$
Der Schnittpunkt lautet $N(-\ln 2 / 0)$.

Daher gilt auch: $h(\ln 2) = 0 \Rightarrow a \cdot (-\ln 2)^2 + 1 \cdot (-\ln 2) + 1 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{\ln(2) - 1}{(\ln 2)^2} \approx -0{,}64$

Gleichung der gesuchten Parabel: $h(x) = -0{,}64x^2 + x + 1$

1.1.3
Das an der y-Achse gespiegelte Schaubild besitzt die Funktion $\overline{g_t}(x) = g_t(-x) = t - e^x$

Schnittpunktberechnung der beiden Funktionen:
$g_t(x) = \overline{g_t}(x) \Rightarrow t - e^{-x} = t - e^x$
$\Leftrightarrow e^{-x} = e^x \Rightarrow -x = x \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

Der Schnittpunkt lautet $S(0 / t-1)$

Damit die Schaubilder sich an der Stelle x = 0 rechtwinklig schneiden, müsste gelten:
$g_t'(0) \cdot \overline{g_t}'(0) = -1$

Es gilt $g_t'(x) = e^{-x}$ und $\overline{g_t}'(x) = -e^x$.
Daraus folgt $g_t'(0) \cdot \overline{g_t}'(0) = 1 \cdot (-1) = -1$. Damit ist der rechtwinklige Schnitt in S bewiesen.

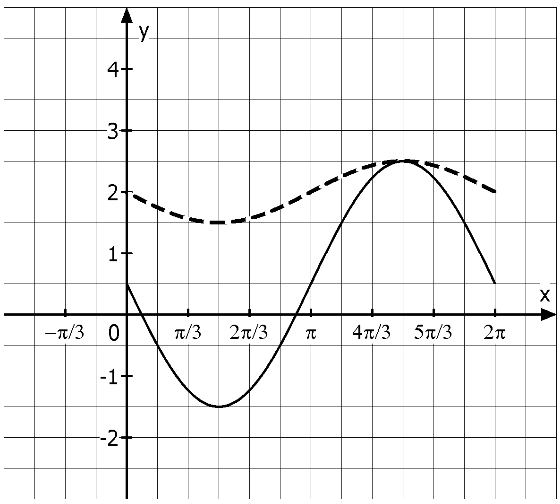
1.1.4
Berechnung des Schnittpunktes von G_t mit der x-Achse:
$g_t(x) = 0 \Rightarrow t - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = t \Leftrightarrow x = -\ln(t)$

Berechnung der Fläche zwischen dem Schaubild G_t und den Koordinatenachsen:
$$\int_{-\ln(t)}^{0} (t - e^{-x})dx = \left[tx + e^{-x}\right]_{-\ln(t)}^{0} = 0 + e^0 - (-t \cdot \ln(t) + e^{\ln(t)}) = 1 + t \cdot \ln(t) - t$$

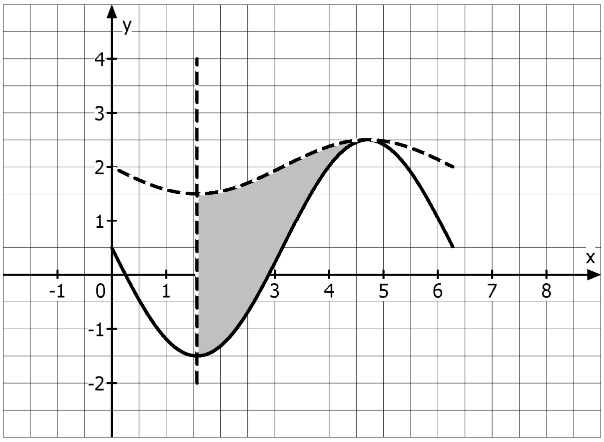
Nun soll gelten: $1 + t \cdot \ln(t) - t = 1 \Leftrightarrow t \cdot (\ln(t) - 1) = 0$
Mit dem Satz vom Nullprodukt folgt t = 0 oder t = e.
Da t > 1 vorausgesetzt wird, ist t = e die einzige Lösung.

1.2.1

Es gilt $f_{0,5}(x) = 2 - 0,5 \cdot \sin(x)$ und $f_2(x) = \frac{1}{2} - 2 \cdot \sin(x)$



Berechnung der Fläche:



Zunächst wird der Schnittpunkt der beiden Schaubilder benötigt:

$$f_2(x) = f_{0,5}(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2} - 2\sin(x) = 2 - \frac{1}{2}\sin(x) \Leftrightarrow 1,5\sin(x) = -1,5 \Leftrightarrow \sin(x) = -1$$

Die Sinusfunktion nimmt im Bereich $0 < x < 2\pi$ den Wert -1 bei $x = 1,5\pi$ an.

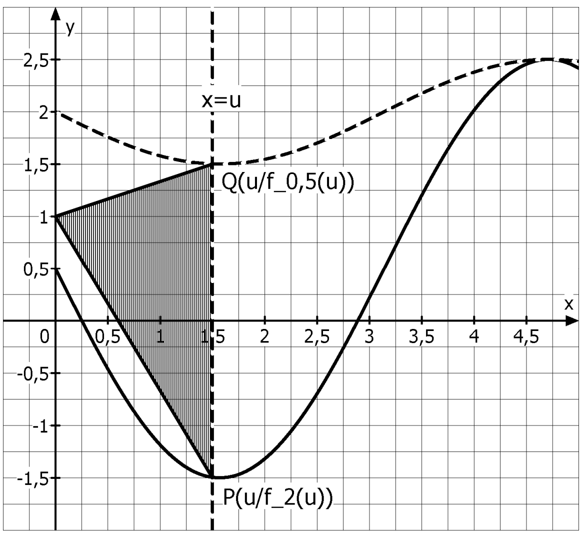
Somit schneiden sich die Schaubilder an dieser Stelle.

Berechnung der Fläche:

$$A = \int_{0,5\pi}^{1,5\pi} \left(2 - 0,5\sin(x) - (0,5 - 2\sin(x)\right)dx = \int_{0,5\pi}^{1,5\pi} (1,5 + 1,5\sin(x))dx = \left[1,5x - 1,5\cos(x)\right]_{0,5\pi}^{1,5\pi}$$

$$= 2,25\pi - 1,5 \cdot 0 - (0,75\pi - 1,5 \cdot 0) = 1,5\pi$$

1.2.2



Die Eckpunkte des Dreiecks besitzen die Koordinaten R(0/1), $P(u / f_2(u))$ und $Q(u / f_{0,5}(u))$.

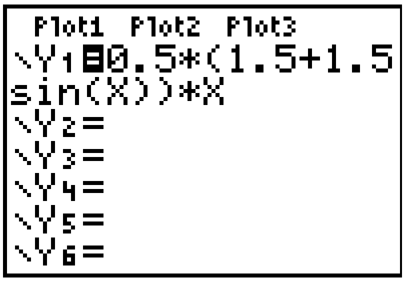
Die Fläche des Dreiecks beträgt $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$, wobei die Grundseite g der Strecke $\overline{PQ}$ entspricht und die Höhe h dem Abstand des Punktes R von der Grundseite.

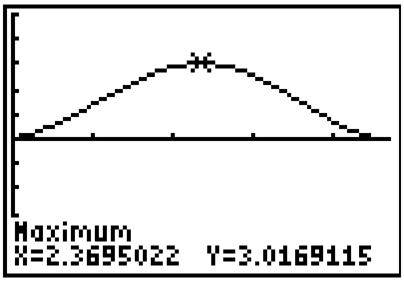
Es ist $g = \overline{PQ} = f_{0,5}(u) - f_2(u) = 2 - 0,5\sin(u) - (0,5 - 2\sin(u)) = 1,5 + 1,5\sin(u)$
Die Dreieckshöhe beträgt h = u.

Somit gilt: $A(u) = \frac{1}{2} \cdot \left(1,5 + 1,5\sin(u)\right) \cdot u$

Gesucht ist nun der Wert von u mit $0 < u < \frac{3}{2}\pi$, für die die Funktion A(u) maximal wird.

Mit Hilfe des GTR ergibt sich:





Für u = 2,37 wird die Dreiecksfläche maximal mit A = 3,017 Flächeneinheiten.

1.2.3
Die Grundfunktion $g(x) = a \cdot \sin(x)$ mit Amplitude a besitzt im Intervall $0 < x < 2\pi$
Einen Hochpunkt bei $H(\frac{\pi}{2} / a)$ und einen Tiefpunkt bei $T(\frac{3\pi}{2} / -a)$.
Die Funktion $h(x) = -a \cdot \sin(x)$ stellt eine Spiegelung des Schaubildes von g(x) an der x-Achse dar. Hierdurch wird der bisherige Hochpunkt zum Tiefpunkt und umgekehrt.
Die Funktion h besitzt den Hochpunkt $H(\frac{3\pi}{2} / a)$ und den Tiefpunkt $T(\frac{\pi}{2} / -a)$.

Um von h(x) auf die Funktion $f_a(x) = \frac{1}{a} - a\sin(x)$ zu kommen, wird das Schaubild noch um $\frac{1}{a}$ nach oben verschoben.

Der Hochpunkt dieser Funktion liegt somit bei $H(\frac{3\pi}{2} / a + \frac{1}{a})$ und der Tiefpunkt bei $T(\frac{\pi}{2} / -a + \frac{1}{a})$.

Damit das Schaubild K_a oberhalb der x-Achse liegt, müssen die Tiefpunkte einen positiven y-Wert besitzen.

Bedingung: $-a + \frac{1}{a} > 0 \mid \cdot a$ (a ist größer 0 gemäß Voraussetzung)

$$-a^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow a^2 < 1 \Rightarrow 0 < a < 1$$

Für alle Werte von a zwischen 0 und 1 liegt das Schaubild komplett oberhalb der x-Achse.
Für a = 0,5 sieht man dies an obigem gestrichelten Schaubild.

1.3.1

Das Schaubild L gehört zu der Stammfunktion H.
Das Schaubild N gehört zu der Funktion h.
Das Schaubild M gehört zu der Funktion h'.

Begründung:
An den Stellen, wo das Schaubild von H Extrempunkte besitzt (bei x = -1 und x = 1,5) besitzt das Schaubild von h Nullstellen mit dem entsprechenden Vorzeichenwechsel.
Somit muss h die Ableitungsfunktion von H sein.

An den Stellen, wo das Schaubild von h Extrempunkte besitzt (bei x = 0,1 und x = 4,8) besitzt das Schaubild von h' Nullstellen mit dem entsprechenden Vorzeichenwechsel.
Somit ist h' die Ableitungsfunktion von h.

1.3.2

Zu berechnen ist näherungsweise $\int_{-1}^{1,5} (h(x)dx$.

Es gilt $\int_{-1}^{1,5} (h(x)dx = H(1,5) - H(-1) = 0 - (-1,7) = 1,7$

Die Werte H(1,5) und H(-1) können direkt am Schaubild L abgelesen werden.

Somit beträgt der Inhalt näherungsweise 1,7 Flächeneinheiten.

Abiturprüfung Mathematik 2011 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien – Analysis, Lösung Aufgabe 2

2.1

Ansatz für die Funktion 4.Grades: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$
(Lauter gerade Hochzahlen, da das Schaubild symmetrisch zur y-Achse ist)

Es gilt $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$

Die Bedingungen lauten folgendermaßen:
$f(0) = 2 \Rightarrow c = 2$ (da S(0/2) auf dem Schaubild liegt)
$f'(1) = -4 \Rightarrow 4a + 2b = -4$ (Steigung bei x = 1 ist -4)
$f'(\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow 4a \cdot \sqrt{2}^3 + 2b \cdot \sqrt{2} = 0$ (Extrempunkt bedeutet Steigung ist 0)
$\Rightarrow 8a + 2b = 0$ (bei Division der Gleichung durch $\sqrt{2}$)

Folgendes lineares Gleichungssystem wird mit dem GTR gelöst:

$$\begin{array}{rrrcr} & & c & = & 2 \\ 4a & +2b & & = & -4 \\ 8a & +2b & & = & 0 \end{array}$$

Die Lösung lautet a = 1, b = -4 und c = 2.

Die Funktionsgleichung lautet $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$.

2.2.1

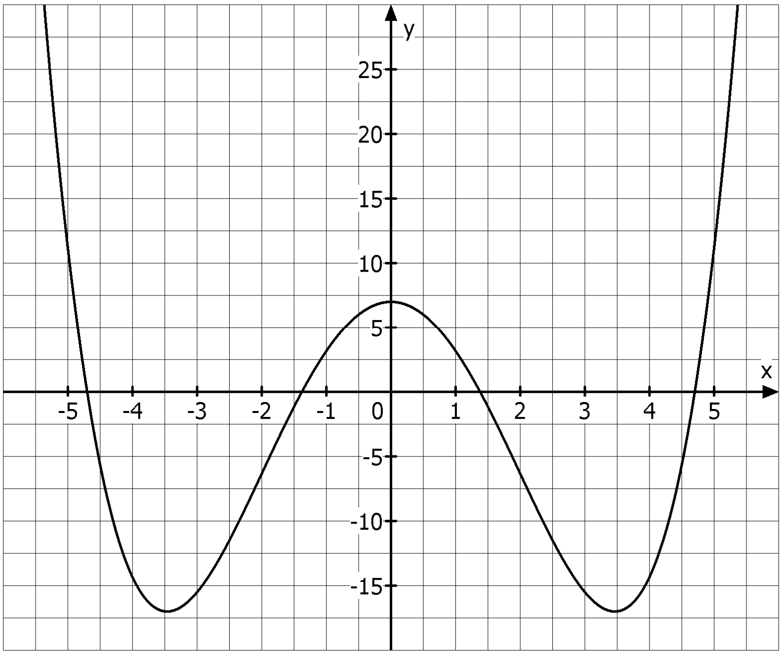
Es ist $f_6(x) = \frac{1}{6}x^4 - 4x^2 + 7$
Um den Nachweis der Monotonie zu führen, werden zunächst die Extremstellen der Funktion bestimmt.

Es ist $f_6'(x) = \frac{2}{3}x^3 - 8x$ und $f_6''(x) = 2x^2 - 8$

Hinreichende Bedingung: $f_6'(x) = 0$ und $f_6''(x) \neq 0$.
$f_6'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2}{3}x^3 - 8x = 0 \Rightarrow x \cdot \left(\frac{2}{3}x^2 - 8\right) = 0$
Als Lösung folgt x = 0 oder $\frac{2}{3}x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = \pm\sqrt{12}$
Es ist $f_6''(\sqrt{12}) = 2 \cdot 12 - 8 = 16 > 0$ und damit liegt an der Stelle $x = \sqrt{12}$ ein Tiefpunkt vor.
Da rechts von $x = \sqrt{12}$ keine weiteren Extrempunkte existieren und rechts von einem Tiefpunkt das Schaubild streng monoton wächst, gilt die strenge Monotonie für $x > \sqrt{12}$.

2.2.2

Zeichnung von K_6



Berechnung der Wendepunkte von K_6:

Es gilt $f_6'(x)=\frac{2}{3}x^3-8x$ und $f_6''(x)=2x^2-8$ und $f_6'''(x)=4x$

Hinreichende Bedingung für Wendepunkte: $f_6''(x)=0$ und $f_6'''(x)\neq 0$

$f_6''(x)=2x^2-8=0 \Rightarrow x=\pm 2$

$f_6'''(2)=8\neq 0 \Rightarrow W_1(2/f_6(2))=W_1(2/-\frac{19}{3})$

Wegen der Symmetrie des Schaubildes zur y-Achse (Funktionsgleichung besitzt lauter gerade Hochzahlen) folgt als zweiter Wendepunkt $W_2(-2/-\frac{19}{3})$.

Berechnung der Wendetangente im Berührpunkt W_1:

Allgemeine Tangentengleichung: $y=f'(u)\cdot(x-u)+f(u)$

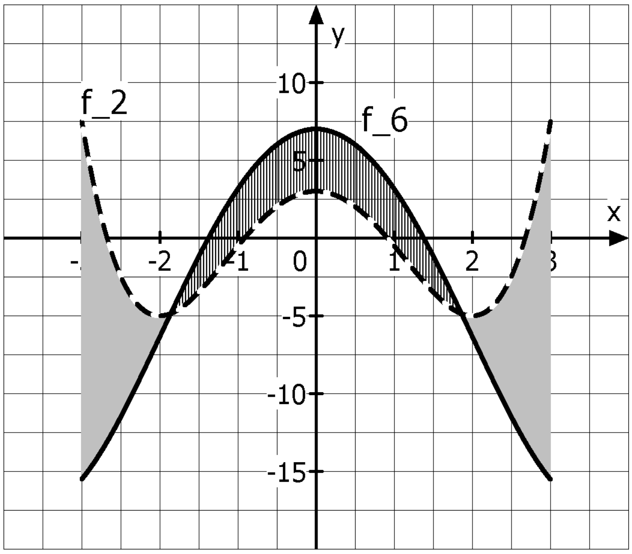
Mit u = 2 folgt: $y=f'(2)\cdot(x-2)+f(2)\Rightarrow y=-\frac{32}{3}(x-2)-\frac{19}{3}\Rightarrow y=-\frac{32}{3}x+15$

Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse: $0=-\frac{32}{3}x+15\Rightarrow x=\frac{45}{32}$ also $S_1(\frac{45}{32}/0)$

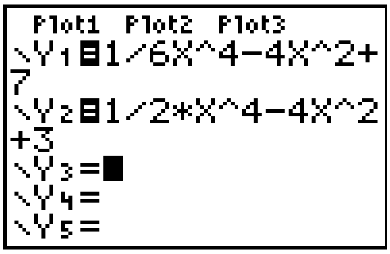
Aus Symmetriegründen folgt, dass die Wendetangente im Berührpunkt W_2 die Gleichung $y=\frac{32}{3}x+15$ besitzt.

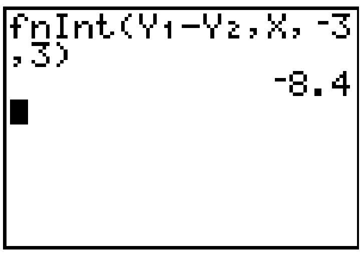
Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse: $0=\frac{32}{3}x+15\Rightarrow x=-\frac{45}{32}$ also $S_2(-\frac{45}{32}/0)$.

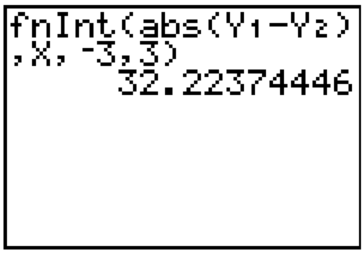
2.2.3



Berechnung von $\int_{-3}^{3}(f_6(x)-f_2(x))dx$ und $\int_{-3}^{3}\left|f_6(x)-f_2(x)\right|dx$ mit dem GTR:







$\int_{-3}^{3}(f_6(x)-f_2(x))dx=-8,4$ und $\int_{-3}^{3}\left|f_6(x)-f_2(x)\right|dx\approx 32,2$

Geometrische Bedeutung des ersten Integrals:
Die Inhalte der grauen Flächen für x < - 1,86 und x > 1,86 laufen als negative Werte in das Integral ein, da die obere Randkurve f_2 und die untere Randkurve f_6 ist. Der Inhalt der mittleren Fläche fließt als positiver Wert in das Integral ein. Die grauen Flächen links und rechts sind damit um 8,4 Flächeneinheiten größer als die mittlere Fläche.

Geometrische Bedeutung des zweiten Integrals:
Durch die Betragsstriche innerhalb des Integrals fließen die Inhalte aller drei Flächen als positive Werte in das Integral mit ein. Der gesamte Flächeninhalt zwischen den Schaubildern im Bereich x = -3 bis x = 3 beträgt ungefähr 32,2 Flächeneinheiten.

2.2.4

Zunächst müssen von der allgemeinen Funktion f_t die Tiefpunkte berechnet werden.

$f_t(x)=\frac{1}{t}x^4-4x^2+t+1$

Berechnung der Ableitungen: $f_t'(x) = \frac{4}{t}x^3 - 8x$ und $f_t''(x) = \frac{12}{t}x^2 - 8$

Hinreichende Bedingung für Tiefpunkt: $f_t'(x) = 0$ und $f_t''(x) > 0$

$f_t'(x) = \frac{4}{t}x^3 - 8x = 0 \Rightarrow x \cdot \left(\frac{4}{t}x^2 - 8\right) = 0$

Daraus folgt x = 0 oder $x = \pm\sqrt{2t}$

Da $f_t''(0) = -8 < 0$ ist, liegt bei x = 0 ein Hochpunkt vor.

Es gilt $f_t''(\pm\sqrt{2t}) = 16 > 0$

Somit besitzt jedes Schaubild zwei Tiefpunkte:

Es gilt $f_t(\pm\sqrt{2t}) = \frac{1}{t} \cdot 4t^2 - 4 \cdot 2t + t + 1 = -3t + 1$

Somit besitzt jedes Schaubild zwei Tiefpunkte: $T_1(\sqrt{2t}\ /\ -3t+1)$ und $T_2(-\sqrt{2t}\ /\ -3t+1)$

Gleichung der Kurve, auf der T_1 liegt:

(1) $x = \sqrt{2t}$ und (2) $y = -3t + 1$

Aus (1) folgt $t = \frac{1}{2}x^2$ und dies in (2) eingesetzt ergibt $y = -\frac{3}{2}x^2 + 1$

Gleichung der Kurve, auf der T_2 liegt:

(1) $x = -\sqrt{2t}$ und (2) $y = -3t + 1$

Aus (1) folgt $t = \frac{1}{2}x^2$ und dies in (2) eingesetzt ergibt $y = -\frac{3}{2}x^2 + 1$

Somit liegen alle Tiefpunkte auf der Parabel $y = -\frac{3}{2}x^2 + 1$

2.3.1

Wie entsteht G_a aus der Funktion h(x) = cos(x) ?

$\cos(x) \rightarrow a \cdot \cos(x) \rightarrow a \cdot \cos(2x) \rightarrow a \cdot \cos(2x) + 4$

1.Umformung: Streckung des Schaubildes mit dem Faktor a in y-Richtung

2.Umformung: Streckung des Schaubildes mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in x-Richtung

3.Umformung: Verschiebung des Schaubildes um 4 nach oben

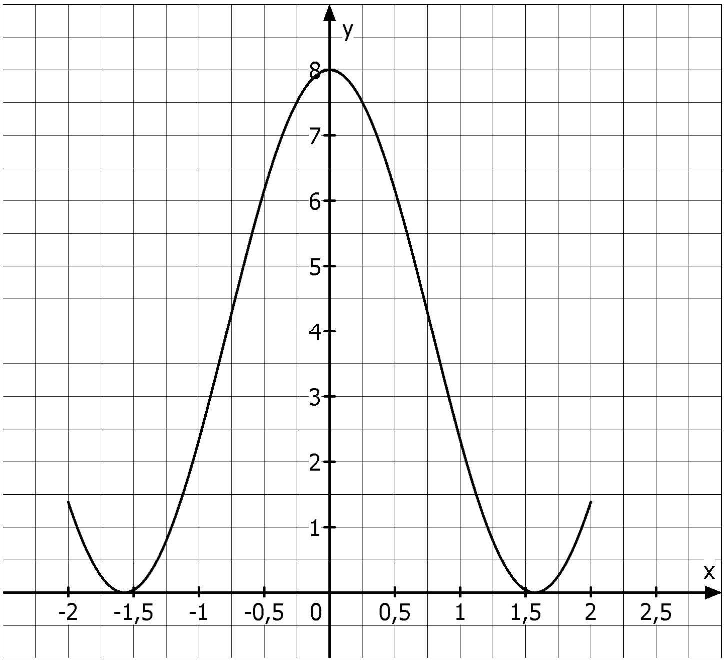
Amplitude von g_a ist a.

Periode von g_a ist $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$

Die Funktion $y = \cos(2x) + 4$ (mit a = 1) nimmt y-Werte an im Wertebereich von [3 ; 5].
Für a = 2 wäre der Wertebereich [2 ; 6]. Für a = 3 wäre der Wertebereich [1 ; 7]
Für a = 4 wäre der Wertebereich [0 ; 8].
Damit das Schaubild oberhalb der x-Achse verläuft, muss 0 < a < 4 sein.

2.3.2

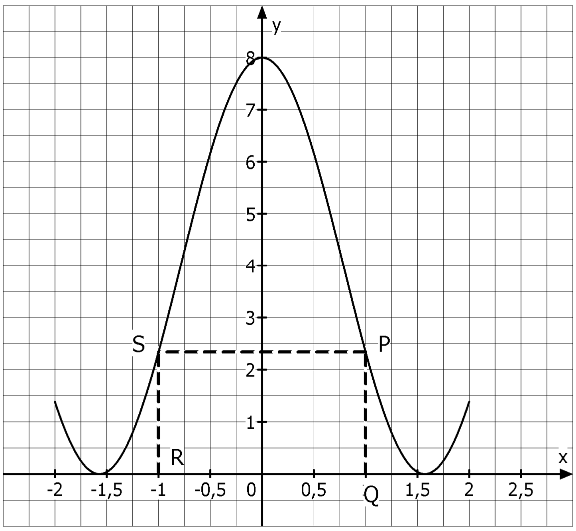
Es ist $g_4(x) = 4\cos(2x) + 4$



Da das Schaubild von G_4 komplett oberhalb der x-Achse verläuft, kann von $-\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2}$ durchintegriert werden.

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (4\cos(2x) + 4)dx = \left[2\sin(2x) + 4x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\sin(\pi) + 2\pi - (2\sin(-\pi) - 2\pi) = 4\pi$$

2.3.3



Das Rechteck PQRS besitzt folgende Eckpunktkoordinaten:
$P(u\,/\,g_4(u))$ $Q(u\,/\,0)$ $R(-u\,/\,0)$ $S(-u\,/\,g_4(u))$

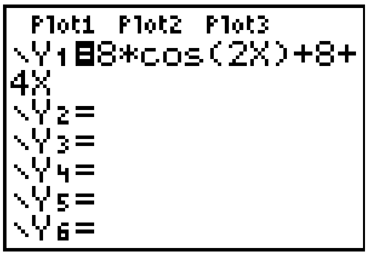
Gesucht ist der Wert von u, so dass der Umfang des Rechtecks extremal (das heißt maximal bzw. minimal) wird:

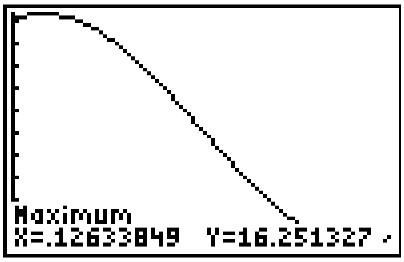
Der Umfang des Rechtecks besitzt die Formel $U = 2\cdot\overline{PQ} + 2\cdot\overline{QR}$
Mit $\overline{PQ} = g_4(u)$ und $\overline{QR} = 2u$ folgt:

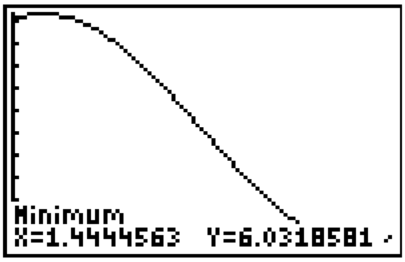
$U(u) = 2\cdot g_4(u) + 4u \Rightarrow U(u) = 8\cdot\cos(2u) + 8 + 4u$ wobei gilt $0 \le u \le \frac{\pi}{2}$

Gesucht ist nun der Wert von u, für die die Funktion U(u) maximal bzw. minimal wird.

Mit dem GTR ergibt sich:







Der Umfang wird maximal für u = 0,126 und minimal für u = 1,444

Rechtecksfläche für u = 0,126: $A = \overline{PQ}\cdot\overline{QR} = 7{,}87\cdot 0{,}252 = 1{,}98$ Flächeneinheiten
Rechtecksfläche für u = 1,444: $A = \overline{PQ}\cdot\overline{QR} = 0{,}128\cdot 2{,}888 = 0{,}37$ Flächeneinheiten

Da 1,98 Flächeneinheiten ungefähr das Fünffache von 0,37 Flächeninheiten sind, ist die Behauptung damit gezeigt.