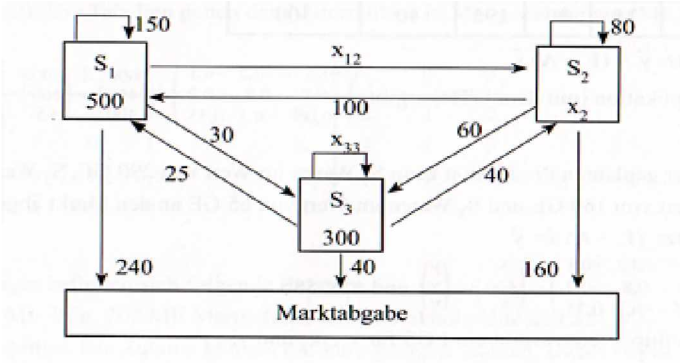
Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2006 Teil 2, Wirtschaftliche Anwendungen, Aufgabe A
Baden-Württemberg

1.1.
Die Verflechtung von drei volkswirtschaftlichen Sektoren S_1, S_2 und S_3 nach dem Leontief-Modell ist durch folgendes Diagramm gegeben.
Die Lieferungen untereinander, die Marktabgabe sowie die Gesamtproduktionen sind in Geldeineinheiten (GE) angegeben.



1.1.1
Bestimme die zugehörige Inputmatrix. (3 Punkte)

1.1.2
Für den kommenden Produktionszeitraum ist die Produktion
$\vec{x} = (600 \quad 450 \quad 400)^T$ geplant.
Berechne die zugehörige Marktabgabe. (2 Punkte)

1.1.3
Der Sektor S_1 kann höchstens Waren im Wert von 580 GE produzieren.
Der Sektor S_2 produziert Waren im Wert von 600 GE.
Untersuche, ob die Produktionen der Sektoren S_1 und S_3 so festgelegt werden können, dass alle drei Sektoren gleich viel an den Markt abgeben. (5 Punkte)

1.1.4
Nach Umstellung der Produktionsverfahren gibt es eine neue Inputmatrix.

Bestimme t so, dass $A_t = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,14 & 0,1 \\ 0,2 & 1-0,56t & 0,2 \\ 0,05 & 0,14t-0,02 & 0,65 \end{pmatrix}$ mit $t \in R$

eine Inputmatrix nach dem Leontief-Modell ist.
Überprüfe, ob für t = 1 jede beliebige Nachfrage befriedigt werden kann. (5 Punkte)

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2006 Teil 2, Wirtschaftliche Anwendungen, Lösungen Aufgabe A
Baden-Württemberg

1.1.1
Es ergibt sich folgende Input-Output-Tabelle

	S_1	S_2	S_3	Markt	Produktion
S_1	150	x_{12}	30	240	500
S_2	100	80	60	160	x_2
S_3	25	40	x_{33}	40	300

Es gilt: $x_{12} = 500 - 240 - 30 - 150 = 80$
$x_2 = 100 + 80 + 60 + 160 = 400$
$x_{33} = 300 - 40 - 40 - 25 = 195$

$$\text{Inputmatrix: } A = \begin{pmatrix} \frac{150}{500} & \frac{80}{400} & \frac{30}{300} \\ \frac{100}{500} & \frac{80}{400} & \frac{60}{300} \\ \frac{25}{500} & \frac{40}{400} & \frac{195}{300} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}65 \end{pmatrix}$$

1.1.2

$$\vec{y} = (E - A) \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & -0{,}2 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & 0{,}8 & -0{,}2 \\ -0{,}05 & -0{,}1 & 0{,}35 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 600 \\ 450 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 290 \\ 160 \\ 65 \end{pmatrix}$$

S_1 muss Waren im Wert von 290 GE, S_2 im Wert von 160 GE und S_3 im Wert von 65 GE an den Markt abgeben.

1.1.3

$$\vec{y} = (E - A) \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & -0{,}2 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & 0{,}8 & -0{,}2 \\ -0{,}05 & -0{,}1 & 0{,}35 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ 600 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ y \end{pmatrix} \text{ mit } x_1 \le 580$$

Umformung zu einem linearen Gleichungssystem:
$0{,}7x_1 - 0{,}1x_3 - y = 120$
$-0{,}2x_1 - 0{,}2x_3 - y = -480$
$-0{,}05x_1 + 0{,}35x_3 - y = 60$
Lösung mit GTR: $x_1 = 575$, $x_3 = 825$, y = 200

Wenn S_1 Waren im Wert von 575 GE (≤ 580 ist erfüllt) und S_3 Waren im Wert von 825 GE produziert, können alle drei Sektoren jeweils Waren im Wert von 200 GE an den Markt abgeben.

1.1.4

Es handelt sich dann um eine Inputmatrix, wenn alle Einträge zwischen 0 und 1 liegen.
$\Rightarrow 0 \leq 1 - 0{,}56t \leq 1$ (*) und $0 \leq 0{,}14t - 0{,}02 \leq 1$ (**)

Aus (*): $t \leq \frac{25}{14}$ und $t \geq 0$

Aus (**): $t \geq \frac{1}{7}$ und $t \leq \frac{51}{7}$

Zusammengefasst: $\frac{1}{7} \leq t \leq \frac{25}{14}$

Für t = 1 gilt: $(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{43}{26} & \frac{61}{104} & \frac{21}{26} \\ \frac{10}{13} & \frac{30}{13} & \frac{20}{13} \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{8} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$ (Berechnung mit GTR)

Da alle Einträge der Inversen Matrix nichtnegativ sind, kann jede Nachfrage befriedigt werden.