Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2009 Teil 4, Lineare Optimierung, Aufgabe 1
Baden-Württemberg

1
Ein Unternehmen stellt auf einer Produktionsanlage Spezialschrauben der Sorten A, B und C her. In der betrachteten Produktionsperiode steht die Produktionsanlage höchstens 4000 Zeiteinheiten (ZE) zur Verfügung und es können maximal 1800 Schrauben hergestellt werden.
Zur Produktion der Schrauben benötigt man 1 ZE für eine Schraube der Sorte A, 2 ZE für eine Schraube der Sorte B und 3 ZE für eine Schraube der Sorte C.
Der Gewinn je Schraube beträgt 4 Geldeinheiten (GE) für Sorte A, 5 GE für Sorte B und 6 GE für Sorte C.
Das Unternehmen möchte die Produktionsmenge der drei Sorten so wählen, dass maximaler Gewinn erzielt wird.

1.1
Aus produktionstechnischen Gründen werden 880 Schrauben der Sorte C hergestellt.
Zeichnen Sie das Planungsvieleck.
Bestimmen Sie die optimalen Produktionsmengen der Sorten A und B.
(6 Punkte)

1.2
Bei einer neuen Produktionsanlage würde die Produktionsdauer für die Schrauben der Sorte A halbiert werden. Alle anderen Bedingungen blieben erhalten.
Untersuchen Sie anhand Ihrer Zeichnung, ob sich der maximale Gewinn dadurch vergrößern würde. (2 Punkte)

1.3
Die alte Produktionsanlage wurde neu justiert. Es können nun maximal 1000 Schrauben der Sorte C hergestellt werden. Alle anderen Bedingungen bleiben erhalten.
Berechnen Sie mittels des Simplexverfahrens eine Möglichkeit, die Produktionszahlen der drei Schraubensorten so festzulegen, dass maximaler Gewinn erzielt wird. Geben Sie diesen Gewinn an.
Woraus lässt sich schließen, dass es eine weitere Möglichkeit für die Festlegung der Produktionszahlen geben könnte ?
(7 Punkte)

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2009 Teil 4, Lineare Optimierung, Lösung zu Aufgabe 1
Baden-Württemberg

1.1

Folgende Variablen werden definiert:

y = Anzahl der Schrauben von Sorte B
z = Anzahl der Schrauben von Sorte C

Folgende Ungleichungen ergeben sich aus der Aufgabenstellung:

$x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$
Maximal 1800 Schrauben: $x + y + z \leq 1800$
Höchstens 4000 Zeiteinheiten: $x + 2y + 3z \leq 4000$

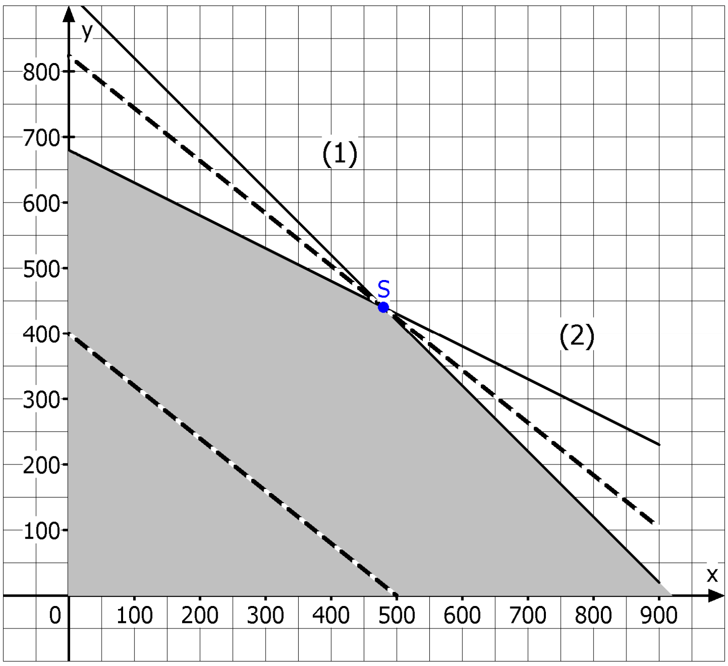
Der Gewinn G soll maximiert werden.
Die Zielfunktion lautet: $G = 4x + 5y + 6z$

Vorgegeben ist die Anzahl z = 880 der Sorte C.

Folgende Ungleichungen ergeben sich daraus:
(1) $x + y + 880 \leq 1800 \Leftrightarrow x + y \leq 920 \Leftrightarrow y \leq -x + 920$
(2) $x + 2y + 3 \cdot 880 \leq 4000 \Leftrightarrow x + 2y \leq 1360 \Leftrightarrow y \leq -0{,}5x + 680$

Zielfunktion: $G = 4x + 5y + 6 \cdot 880 \Leftrightarrow y = -\frac{4}{5}x + \frac{1}{5}G - 1056$

Aus den Ungleichungen ergibt sich folgendes gefärbtes Planungsvieleck:



Berechnung der Koordinaten von S als Schnittpunkt der Geraden
$y=-x+920$ und $y=-0{,}5x+680$

$-x+920=-0{,}5x+680 \Leftrightarrow x=480$
Einsetzen von x = 480 in eine Gerade ergibt $y=-480+920=440$.

Daraus folgt S(480/440).

Die gestrichelte Gerade entspricht der Zielfunktion. Diese muss nun möglichst weit nach oben verschoben werden unter der Bedingung, dass die Gerade noch einen Punkt des Planungsvielecks enthält.

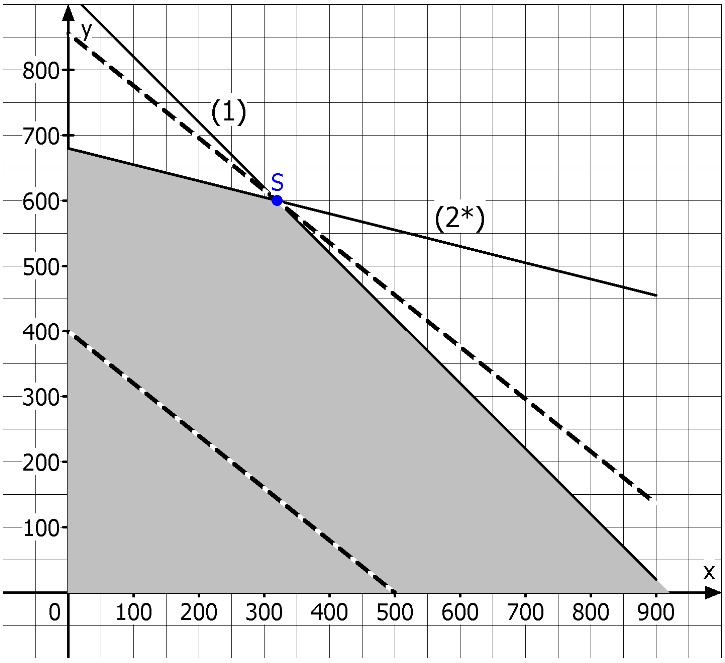
Der gemeinsame Punkt der maximal nach oben verschobenen Geraden und des Planungsvielecks ist S(480/440).
Damit wird der Gewinn (unter der Voraussetzung, dass z = 880 ist) maximal für x = 480 (Sorte A) und y = 440 (Sorte B).

1.2

Wenn die Produktionsdauer für die Sorte A halbiert, ändert sich die Ungleichung (2) des oberen Ungleichungssystems wie folgt:

(2*) $0{,}5x+2y+3\cdot 880\le 4000 \Leftrightarrow y\le -\frac{1}{4}x+680$
Die Ungleichung (1) bleibt gleich.

Das neue Planungsvieleck sieht nun so aus:



Da die gestrichelte Gerade nun weiter nach oben verschoben wurde, steigt der y-Achsenabschnitt der Gerade und damit auch der Gewinn im Vergleich zu 1.1

1.3

Nun können maximal 1000 Schrauben der Sorte C hergestellt werden, das heißt es gilt neben den bekannten Ungleichungen zusätzlich $z \le 1000$.

Diese Ungleichungen werden für das Simplexverfahren mit Hilfe von Schlupfvariablen nun in Gleichungen übergeführt.

$$\begin{array}{l} x + y + z + u = 1800 \\ x + 2y + 3z + v = 4000 \\ z + w = 1000 \end{array}$$

Die Zielfunktion lautet $G = 4x + 5y + 6z$

Daraus ergibt sich folgendes Simplextableau:

x	y	z	u	v	w		Einschränkung
1	1	1	1	0	0	1800	1800
1	2	3	0	1	0	4000	1333,33
0	0	1	0	0	1	1000	1000
4	5	6	0	0	0	G	

Die Spalte mit der größten Zahl bei der Zielfunktionszeile ist die Pivotspalte (hier die 3.Spalte z).
Die Werte der Spalte „Einschränkung“ ergeben sich aus der Division der Spalte 7 durch die Elemente der Pivotspalte (1800:1 ; 4000 : 3 ; 1000 : 1).

Die Zeile, in der die kleinste Zahl bei „Einschränkung“ steht, ist die Pivotzeile.
Dies ist in diesem Fall mit 1000 die 3.Zeile.

Das Element, das sowohl in der Pivotspalte als auch in der Pivotzeile steht, ist das so genannte Pivotelement – hier 1.

Nun werden alle Elemente der Pivotspalte durch übliche Zeilenumformungen zu Null gemacht, außer das Pivotelement selbst.

Damit ergibt sich:

x	y	z	u	v	W		Einschränkung
1	1	0	1	0	-1	800	800
1	2	0	0	1	-3	1000	500
0	0	1	0	0	1	1000	-
4	5	0	0	0	-6	G-6000	

Nun ist die 2.Spalte (y) die Pivotspalte und die 2.Zeile die Pivotzeile.
Der Wert 2 ist das Pivotelement.

x	y	z	u	v	W		Einschränkung
-1 1 0	0 2 0	0 0 1	-2 0 0	1 1 0	-1 -3 1	-600 1000 1000	600 1000 -
3	0	0	0	-5	3	2G-17000	

Nun ist die 1.Spalte (x) die Pivotspalte und die 1.Zeile ist die Pivotzeile.
Der Wert -1 ist das Pivotelement.

x	y	z	u	v	W		
-1 0 0	0 2 0	0 0 1	-2 -2 0	1 2 0	-1 -4 1	-600 400 1000	
0	0	0	-6	-2	0	2G-18800	

Nun werden die Zeilen noch so durchdividiert, dass in der Hauptdiagonalen (fett) „1“ stehen:

x	y	z	u	v	w		
1 0 0	0 **1** 0	0 0 **1**	2 -1 0	-1 1 0	1 -2 1	600 200 1000	
0	0	0	-3	-1	0	G-9400	

Aus dem Simplextableau ergibt sich nun:
x = 600
y = 200
z = 1000
G = 9400

Damit der Gewinn möglichst groß wird, müssen 600 Schrauben der Sorte A, 200 Schrauben der Sorte B und 1000 Schrauben der Sorte C hergestellt werden. Der Gewinn beträgt dann 9400 GE.

In der letzten Zeile hat die Schlupfvariable w den Koeffizienten 0.
Wenn man w in die Basis einbezieht, ändert die Zielfunktion ihren Wert nicht.
Es gibt somit weitere Lösungen des Maximierungsproblems.