Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2008 Teil 2, Vektorgeometrie, Aufgabe 1
Baden-Württemberg

1.1.1
Für jedes $t \in \mathbb{R}$ sind die folgenden linearen Gleichungen gegeben:

$$\begin{array}{rrrcll} 2x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 0 & (1) \\ x_1 & +3x_2 & +t\cdot x_3 & = & 0 & (2) \\ x_1 & +(t+1)\cdot x_2 & +2x_3 & = & 0 & (3) \end{array}$$

1.1.1.1
Es ist t = 2.
Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems (LGS), das aus den drei Gleichungen (1), (2) und (3) besteht.
Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS, das aus den Gleichungen (1) und (2) besteht.
Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung (1). (5 Punkte)

1.1.1.2
Für welche $t \in \mathbb{R}$ hat das aus den Gleichungen (1), (2) und (3) bestehende LGS mehr als eine Lösung ? (5 Punkte)

1.1.2
Gegeben sind die Punkte A(4/0/1), B(4/5/1) und C(1/0/5).
Beweisen Sie: Das Dreieck ABC ist gleichschenklig und rechtwinklig.
Bestimmen Sie einen Punkt P so, dass die Punkte A, B, C und P die Eckpunkte eines Quadrates sind. (5 Punkte)

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2008 Teil 2, Vektorgeometrie, Lösung zu Aufgabe 1
Baden-Württemberg

1.1.1.1

Das LGS für t = 2 hat folgende Gestalt:

$$\begin{array}{llllll} 2x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 0 \\ x_1 & +3x_2 & +2\cdot x_3 & = & 0 \\ x_1 & +3x_2 & +2x_3 & = & 0 \end{array}$$

```
rref([A])
 [[1 0 -1.75 0]
  [0 1 1.25  0]
  [0 0 0     0]]
```

Anhand des GTR-Ergebnisses erkennt man, dass aufgrund der Nullzeile unendlich viele Lösungen existieren. Es muss folglich ein Parameter r eingeführt werden:
Es sei $x_3 = r$ mit $r \in \mathbb{R}$
Daraus folgt $x_2 = -1{,}25 \cdot r$ und $x_1 = 1{,}75 \cdot r$

Die Lösung von (1), (2), (3) lautet $\vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 1{,}75 \\ -1{,}25 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$.

Das LGS, das nur aus (1) und (2) besteht, führt auf dieselbe Lösung, da die zweite und die dritte Zeile des obigen Gleichungssystems für t = 2 identisch ist und somit der Wegfall der 3.Zeile zu keiner Änderung der Lösungsmenge führen kann.

Das LGS, das nur aus (1) besteht, besitzt 1 Gleichung mit 3 Variablen:
$2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$
Nun müssen zwei Parameter r und s eingeführt werden.
Es sei $x_1 = r$ und $x_2 = s$. Dann gilt $x_3 = 2r + 2s$.

Die Lösungsmenge von (1) lautet $\vec{x} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ 2r+2s \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$

1.1.1.2
Man bringt das vorhandene LGS zunächst auf eine Stufenform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & t & 0 \\ 1 & t+1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |\cdot(-2) \\ |\cdot(-2) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -2t-1 & 0 \\ 0 & -2t & -5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |\cdot t \\ |\cdot(-2) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -2t-1 & 0 \\ 0 & 0 & -2t^2-t+10 & 0 \end{array}\right)$$

Das LGS besitzt genau dann keine eindeutige Lösung, wenn eine der Hauptdiagonalelemente den Wert 0 annimmt.
Da nur das Hauptdiagonalelement rechts unten $-2t^2-t+10$ von t abhängig ist, muss untersucht werden, wann dieser Term den Wert Null annimmt.

$-2t^2-t+10=0 \Rightarrow t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+80}}{-4}=\frac{1\pm 9}{-4}$ und damit gilt t = -2,5 oder t = 2.

Für diese beiden t-Werte ergibt die 3.Zeile eine komplette Nullzeile, es bleiben also 2 Gleichungen mit 3 Variablen übrig, d.h. es existieren unendlich viele Lösungen.
Für alle anderen Werte von t besitzt das LGS eine eindeutige Lösung, und da das LGS ein homogenes LGS ist, ist diese einzige Lösung $x_1=x_2=x_3=0$.

1.1.2
Beweis der Gleichschenkligkeit des Dreiecks:

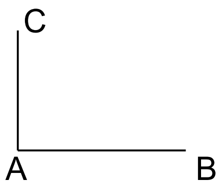
$$\overline{AB}=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}\right|=\sqrt{0+25+0}=5 \qquad \overline{AC}=\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\begin{pmatrix}-3\\0\\4\end{pmatrix}\right|=\sqrt{9+0+16}=5$$

$$\overline{BC}=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\left|\begin{pmatrix}-3\\-5\\4\end{pmatrix}\right|=\sqrt{9+25+16}=\sqrt{50}$$

Da zwei Seiten des Dreiecks gleich lang sind, ist das Dreieck gleichschenklig.

Die Prüfung der Rechtwinkligkeit erfolgt über den Satz des Pythagoras:

Zu prüfen: $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 \Rightarrow 5^2 + 5^2 = \sqrt{50}^2$ ist eine wahre Aussage.
Damit ist das Dreieck bei A rechtwinklig.



Der Punkt P wird nun so gewählt, dass gilt: $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 - 4 \\ p_2 - 5 \\ p_3 - 1 \end{pmatrix}$ und daraus ergibt sich P(1/5/5).