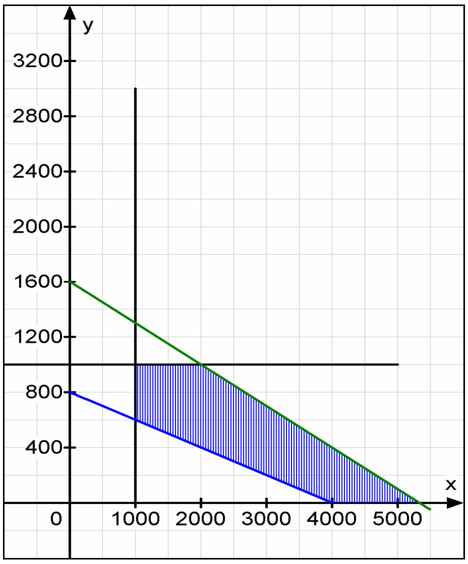
Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2008 Teil 2, Lineare Optimierung, Aufgabe 1
Baden-Württemberg

1.1.1
Gegeben ist die grafische Lösung eines Ungleichungssystems:



Geben Sie ein dazu passendes Ungleichungssystem an.

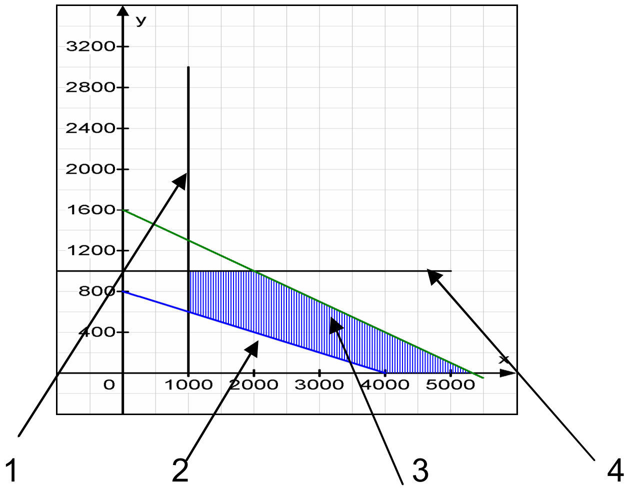
Bestimmen sie für das abgebildete Planungsvieleck
- eine Zielfunktion so, dass es genau eine optimale Lösung gibt, die ein Maximum liefert und
- eine Zielfunktion so, dass es unendlich viele optimale Lösungen gibt, die ein Minimum liefern.

Erläutern Sie jeweils Ihre Vorgehensweise. (7 Punkte)

1.1.2
Ein Kaffeehändler hat von der Kaffeesorte A 185 kg, von der Kaffeesorte B 260 kg und von der Kaffeesorte C 90 kg auf Lager.
Aus den drei Sorten stellt er drei Mischungen her.
Die Mischung 1 besteht zu 20% aus Sorte A und zu 80% aus Sorte B.
Die Mischung 2 besteht zu 60% aus Sorte A und zu 40% aus Sorte C.
Die Mischung 3 besteht zu 30% aus Sorte A, zu 40% aus Sorte B und zu 30% aus Sorte C.
Beim Verkauf erzielt er für Mischung 1 einen Gewinn von 2,00 € je kg, für Mischung 2 einen Gewinn von 2,50 € je kg und für Mischung 3 einen Gewinn von 3,00 € je kg.
Bestimmen Sie, wie viel er von jeder Mischung herstellen und verkaufen muss, damit der Gewinn möglichst groß wird.
Werden dabei alle Vorräte aufgebraucht ? (8 Punkte)

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2008 Teil 2, Lineare Optimierung, Lösung zu Aufgabe 1
Baden-Württemberg

1.1.1



Gerade 1: x = 1000

Gerade 2: $m = -\frac{800}{4000} = -0{,}2 \Rightarrow y = -0{,}2x + 800$

Gerade 3: $m = -\frac{600}{2000} = -0{,}3 \Rightarrow y = -0{,}3x + 1600$

Gerade 4: y = 1000

Das Ungleichungssystem, das zu der markierten Fläche führt lautet demnach:

$x \geq 1000$

$0 \leq y \leq 1000$

$y \geq -0{,}2x + 800$

$y \leq -0{,}3x + 1600$

Bestimmung einer Zielfunktion mit genau einer optimalen Lösung:
Die Gerade muss durch einen Eckpunkt der Fläche gehen, durch welchen ist egal.
Wir wählen z.B. den Punkt A(2000/1000) aus.
Damit die Zielfunktionsgerade die Fläche nur im Punkt A berührt, muss die Gerade „zwischen“ den Geraden 3 und 4 liegen. Für die Steigung muss also gelten $-0{,}3 < m < 0$.
Zum Beispiel wäre also die Gerade $y = -0{,}2x + C$ möglich, so dass die Zielfunktion umgeformt lauten könnte C = y + 0,2x.

Bestimmung einer Zielfunktion für unendlich viele Minima:
Wenn es unendlich viele Lösungen geben soll, muss die Zielfunktion auf einer der Randgeraden der Fläche liegen. Die Zielfunktion könnte z.B. y = -0,2x+800 gemäß Gerade 2 lauten. Alle Punkte der Gerade 2 sind dann Lösungen der Aufgabe.

1.1.2
Es werden x kg von Mischung 1 hergestellt.
Es werden y kg von Mischung 2 hergestellt.
Es werden z kg von Mischung 3 hergestellt.

Es ergeben sich folgende Ungleichungen:
$x, y, z \geq 0$
$0{,}2x + 0{,}6y + 0{,}3z \leq 185$ (Sorte A)
$0{,}8x + 0{,}4z \leq 260$ (Sorte B)
$0{,}4y + 0{,}3z \leq 90$ (Sorte C)

Mit der Einführung der Schlupfvariablen u,v,w ergibt sich folgendes Gleichungssystem:
$0{,}2x + 0{,}6y + 0{,}3z + u = 185$
$0{,}8x + 0{,}4z + v = 260$
$0{,}4y + 0{,}3z + w = 90$

Zu maximieren ist der Gewinn als Zielfunktion: G = 2x + 2,5y + 3z

Daraus ergibt sich folgendes Simplextableau:

x	y	z	u	v	w		Einschränkung
0,2	0,6	0,3	1	0	0	185	616,6
0,8	0	0,4	0	1	0	260	650
0	0,4	0,3	0	0	1	90	300
2	2,5	3	0	0	0	G	

Die Spalte mit der größten Zahl bei der Zielfunktionszeile ist die Pivotspalte (hier die 3.Spalte z).
Die Werte der Spalte „Einschränkung“ ergeben sich aus der Division der Spalte 6 durch die Elemente der Pivotspalte (185:0,3 ; 260 : 0,4 ; 90 : 0,3).

Die Zeile, in der die kleinste Zahl bei „Einschränkung“ steht, ist die Pivotzeile.
Dies ist in diesem Fall mit 300 die 3.Zeile.

Das Element, das sowohl in der Pivotspalte als auch in der Pivotzeile steht, ist das so genannte Pivotelement – hier 0,3.

Nun werden alle Elemente der Pivotspalte durch übliche Zeilenumformungen zu Null gemacht, außer das Pivotelement selbst.

Damit ergibt sich:

x	y	z	u	v	w		Einschränkung
0,2	0,2	0	1	0	-1	95	475
0,24	-0,16	0	0	0,3	-0,4	42	175
0	0,4	0,3	0	0	1	90	-
2	-1,5	0	0	0	-10	G-900	

Nun ist die 1.Spalte (x) die Pivotspalte und die 2.Zeile die Pivotzeile.
Der Wert 0,24 ist das Pivotelement.

x	y	z	u	v	w	
0 0,24 0	0,08 -0,16 0,4	0 0 0,3	0,24 0 0	-0,06 0,3 0	-0,16 -0,4 1	14,4 42 90
0	-0,04	0	0	-0,6	-1,6	0,24G-300

Aus dem Simplextableau ergibt sich y = 0.
Dann gilt 0,24x = 42 und damit x = 175.
Außerdem gilt 0,3z = 90 und damit z = 300.

Der Gewinn beträgt $G = 2 \cdot 175 + 2{,}5 \cdot 0 + 3 \cdot 300 = 1250$

Vorräte:
Sorte A: $0{,}2 \cdot 175 + 0{,}6 \cdot 0 + 0{,}3 \cdot 300 + u = 185 \Rightarrow u = 60$ kg bleibt von Sorte A übrig
Sorte B: $0{,}8 \cdot 175 + 0{,}4 \cdot 300 + v = 260 \Rightarrow v = 0$ kg bleibt von Sorte B übrig
Sorte C: $0{,}4 \cdot 0 + 0{,}3 \cdot 300 + w = 90 \Rightarrow w = 0$ kg bleibt von Sorte C übrig