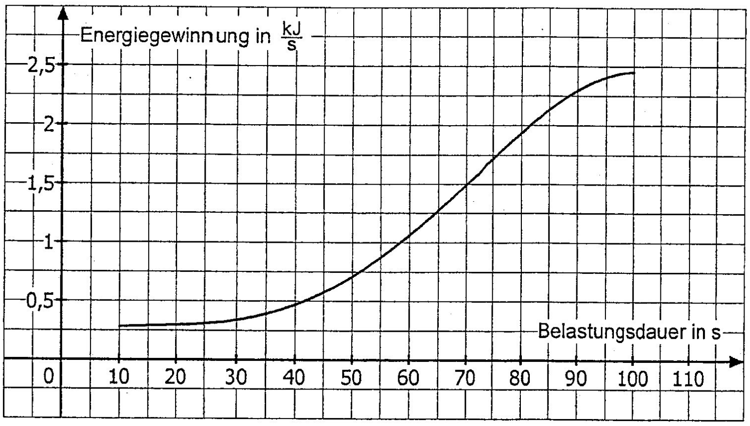
Abiturprüfung Mathematik 2013 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien – Anwendungsorientierte Aufgabe
Teil 3, Aufgabe 1

1
Lena ist Läuferin. Zum Laufen benötigt ihr Körper Energie.
Der Körper gewinnt auf zwei Arten Energie: Aerob (Energiegewinnung mit Sauerstoffverbrauch) und anaerob (Energiegewinnung ohne Sauerstoffverbrauch).
Zu Beginn der Belastung wird die Energie hauptsächlich durch anaerobe Energiegewinnung bereitgestellt. Später wird der Hauptanteil der Energie durch aerobe Energiegewinnung bereitgestellt.
Das Schaubild zeigt für einen Lauf von Lena die aerobe Energiegewinnung in Kilojoule pro Sekunde ($\frac{kJ}{s}$) zwischen der 10. und der 100. Sekunde.



1.1 (6 Punkte)
Bestimmen Sie eine Funktion, die das Schaubild näherungsweise beschreibt.
Die aerobe Energiegewinnung nimmt ständig zu. Prüfen Sie, ob Ihre Funktion diese Eigenschaft zwischen der 10. und der 100. Sekunde richtig wiedergibt.

1.2 (3 Punkte)
Zwischen der 10. und der 100. Sekunde wurden insgesamt 275 kJ bereitgestellt.
Bestimmen Sie den prozentualen Anteil, der auf die aerobe Energie entfällt.

1.3 (6 Punkte)
Die anaerobe Energiegewinnung in $\frac{kJ}{s}$ wird zwischen der 10. und der 100.Sekunde durch eine Funktion g mit $g(t) = a \cdot t \cdot e^{b \cdot t}$ dargestellt.
Dabei gibt t die Zeit in Sekunden an.
Nach 26 Sekunden hat die anaerobe Energiegewinnung mit 2,5 $\frac{kJ}{s}$ ihren größten Wert. Bestimmen Sie a und b.
Berechnen Sie den Zeitpunkt, ab dem der aerobe Anteil überwiegt.

Abiturprüfung Mathematik 2013 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien – Anwendungsorientierte Aufgabe
Teil 3, Lösung Aufgabe 1

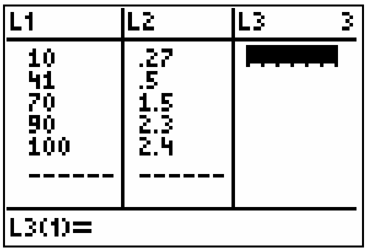
1.1

Die Funktionsgleichung von f(x) wird mit Hilfe der Regression bestimmt.

Als Ansatz wird eine Funktion 4.Grades gewählt.
(Begründung: Anhand des Schaubildausschnittes kann man nicht richtig erkennen, ob es sich um eine Funktion 3.Grades oder 4.Grades handelt; da der Schaubildausschnitt bei einem Ansatz mit Grad 4 genauer beschrieben werden kann, wird Grad 4 gewählt)

Folgende Punkte werden für die Regression ausgewählt:

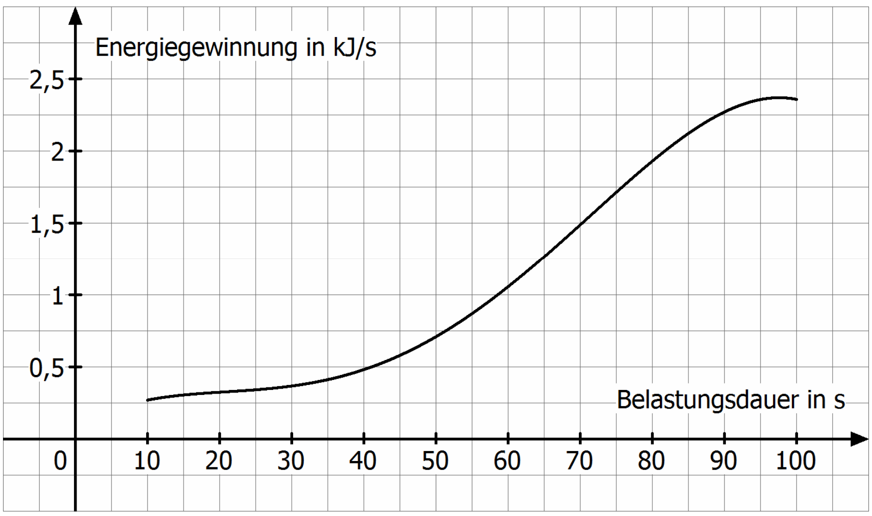
A(10/0,27); B(41/0,5) ; C(70/1,5) ; D(90/2,3) ; E(100/2,4)



Die gesuchte Funktionsgleichung lautet näherungsweise
$f(x) = -1{,}625203 \cdot 10^{-7} x^4 + 3{,}0061 \cdot 10^{-5} x^3 - 0{,}0014537 x^2 + 0{,}0304562 x + 0{,}0823724$
(x in Sekunden mit $10 \le x \le 100$ und f(x) in kJ pro Sekunde)

(Hinweis: Sofern andere Punkte gewählt werden, ergibt sich eine andere Funktionsgleichung, deren Schaubild aber ähnlich aussehen sollte)

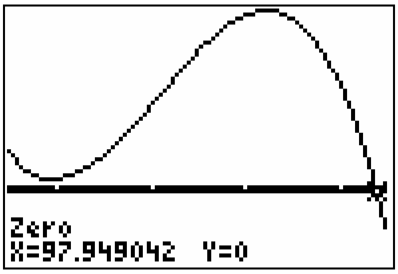
Das Schaubild von f(x) hat folgende Gestalt:



Nun ist zu prüfen, ob das Schaubild von f(x) im Bereich $10 \le x \le 100$ ständig wächst, also streng monoton wachsend ist.

f(x) ist streng monoton wachsend, wenn $f'(x) > 0$ ist.

Zeichnung der Ableitungsfunktion $f'(x)$ mit dem GTR:



Man erkennt, dass die Ableitungsfunktion bei x = 97,9 die x-Achse schneidet und für x > 97,9 negativ wird.
Die Funktion f(x) erfüllt die Eigenschaft des ständigen Anstiegs nicht.

1.2

Die aerobe Energie zwischen der 10. und 100. Sekunde wird über das Integral von f(x) berechnet: $\int_{10}^{100} f(x)dx = 100{,}5\,\text{kJ}$ (GTR)

Prozentualer Anteil der aeroben Energie = $\frac{100{,}5}{275} = 0{,}365 = 36{,}5\%$

1.3

Ansatz für die anaerobe Energiegewinnung: $g(t) = a \cdot t \cdot e^{b \cdot t}$

Bestimmung der Ableitungsfunktion: $g'(t) = a \cdot e^{b \cdot t} + a \cdot t \cdot b \cdot e^{b \cdot t} = a \cdot e^{b \cdot t}(1 + b \cdot t)$

Berechnung der Parameter a und b über folgende Bedingungen:

$g(26) = 2{,}5: \quad 2{,}5 = 26a \cdot e^{26 \cdot b} \qquad (*)$
$g'(26) = 0: \quad 0 = a \cdot e^{26b}(1 + 26 \cdot b) \qquad (**)$

Mit der Gleichung (**) kann der Parameter b berechnet werden:

Satz vom Nullprodukt: $a \cdot e^{26b} = 0$ oder $1 + 26b = 0$
Die erste Gleichung hat die Lösung a = 0, was aber kein sinnvoller Wert von a ist.
(Dann wäre $g(t) = 0$)

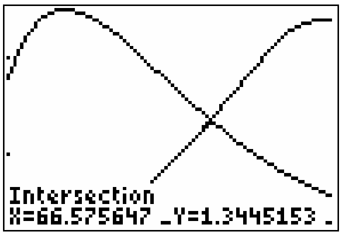
Die zweite Gleichung hat die Lösung $1 + 26b = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{26}$

Eingesetzt in (*) folgt: $2{,}5 = 26 \cdot a \cdot e^{-1} \Rightarrow a = \frac{2{,}5}{26 \cdot e^{-1}} = 0{,}2614$

Die Funktion lautet $g(t) = 0{,}2614 \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{26} \cdot t}$

Zeitpunkt, bei dem der aerobe Anteil überwiegt:

Einzeichnen der beiden Funktionen in den GTR und Berechnung des Schnittpunktes:



Die beiden Schaubilder schneiden sich an der Stelle t = 66,6.

Für $t > 66{,}6$ Sekunden ist der aerobe Anteil höher als der anaerobe Anteil.