Hauptprüfung Abiturprüfung 2015 (ohne CAS)

Baden-Württemberg

Stochastik Aufgabe 1

Hilfsmittel: GTR, Formelsammlung

berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

April 2015

1

Zwei Seiten eines idealen Würfels sind mit S, zwei Seiten sind mit A und zwei Seiten sind mit M beschriftet.

Bei einem Schulfest der "Schule am Meer" (SAM) stehen drei derart beschriftete Würfel zur Verfügung. Bei einem Versuch werden diese Würfel gleichzeitig geworfen.

1.1
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
E_1: Alle drei Würfel zeigen den gleichen Buchstaben.
E_2: Mindestens ein Würfel zeigt den Buchstaben S.

Zeigen Sie, dass mit der Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{9}$ mit den gewürfelten Buchstaben das Wort SAM gebildet werden kann.

(5 Punkte)

1.2
Formulieren Sie für den oben beschriebenen Versuch ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit $\frac{7}{27}$ ist.

(2 Punkte)

1.3
Wie viele Versuche braucht man mindestens, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90% mindestens einmal das Wort SAM bilden zu können ?

(3 Punkte)

1.4
Wer nach einem Versuch das Wort SAM bilden kann, erhält einen Preis.
Ein Spiel besteht aus drei Versuchen. Pro Spiel kann man also maximal drei Preise erhalten.

Wie viele Preise erhält man durchschnittlich pro Spiel ?

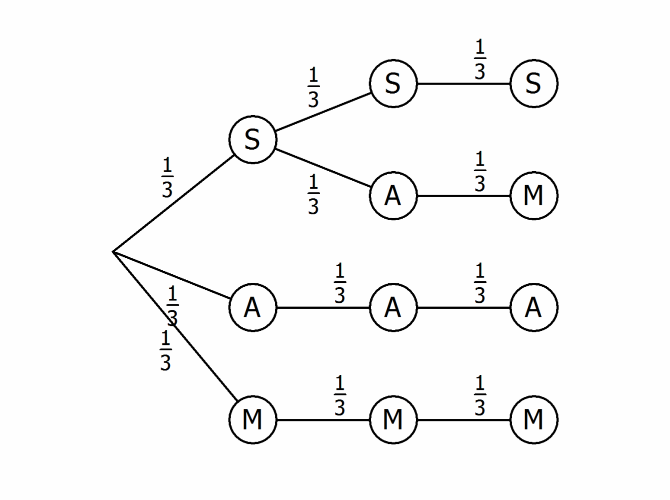
Geben Sie eine begründete Empfehlung, wie viele Preise die Schule bereithalten sollte, wenn insgesamt maximal 900 Spiele auf dem Schulfest gemacht werden.

(5 Punkte)
----
15 Punkte

Lösungen

1.1

Baumdiagramm zum Würfelwurf:
Das gleichzeitige Werfen der Würfel wird so interpretiert, dass ein Würfel dreimal hintereinander geworfen wird:



$$P(E_1) = P(SSS) + P(AAA) + P(MMM) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot 3 = \frac{1}{9}$$

$$P(E_2) = 1 - P(\text{kein Würfel zeigt S}) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{19}{27}$$

$P(SAM) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3! = \frac{2}{9}$ was zu zeigen war

Hinweis: Der Faktor $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ ergibt sich dadurch, dass es 6 Möglichkeiten gibt, die Buchstaben SAM zu würfeln (SAM, SMA, MAS, MSA, AMS, ASM)

1.2

Jeder einzelne Pfad des Baumdiagramms besitzt eine Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{27}$.

Das gesuchte Ereignis muss daher 7 verschiedene Pfade (Ergebnisse) beinhalten.
Es gibt hierzu sehr viele Lösungsmöglichkeiten.

Beispiel
Ereignis A: Man kann mit den Würfeln das Wort SAM bilden oder es erscheint dreimal S.
A = {SAM, SMA, MAS, MSA, AMS, ASM, SSS}

1.3

Es werden n Versuche durchgeführt.
Bedingung: P(mindestens einmal SAM bei n Versuchen) > 0,9
Daraus folgt: 1 - P(niemals SAM bei n Versuchen) > 0,9

$$\Rightarrow 1-\left(\frac{7}{9}\right)^n > 0{,}9 \quad \Rightarrow \left(\frac{7}{9}\right)^n < 0{,}1 \quad \Rightarrow n\cdot\ln\left(\frac{7}{9}\right) < \ln(0{,}1) \quad \Rightarrow n > \frac{\ln(0{,}1)}{\ln\left(\frac{7}{9}\right)} \approx 9{,}2$$

Man muss mindestens 10 Mal würfeln

1.4

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Preise an, die man erhält.

X kann die Werte 0, 1, 2 oder 3 annehmen.

$$P(X=0) = \left(\frac{7}{9}\right)^3 = \frac{343}{729} \qquad P(X=3) = \left(\frac{2}{9}\right)^3 = \frac{8}{729}$$

$$P(X=1) = \frac{2}{9}\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^2\cdot 3 = \frac{98}{243}$$ (Faktor 3, da SAM im 1., 2. oder 3. Versuch auftreten kann)

$$P(X=2) = \left(\frac{2}{9}\right)^2\cdot\frac{7}{9}\cdot 3 = \frac{28}{243}$$

(Faktor 3, da "Nicht-SAM" im 1., 2. oder 3. Versuch auftreten kann)

$$E(X) = 0\cdot\frac{343}{729} + 1\cdot\frac{98}{243} + 2\cdot\frac{28}{243} + 3\cdot\frac{8}{729} = \frac{2}{3}$$

Bei maximal 900 Spielen ist mit $\frac{2}{3}\cdot 900 = 600$ Preisen im Durchschnitt zu rechnen.
Sicherheitshalber sollte die Schule noch einige Preise in Reserve halten, da die Zahl 600 nur einen Durchschnittswert darstellt.
Mehr als 2700 Preise werden aber definitiv nicht benötigt.