Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG, BTG, TG)
Hauptprüfung 2013 Teil 4, Vektorgeometrie, Aufgabe 2
Baden-Württemberg

2
Gegeben sind die Punkte A(1/2/2), B(7/14/2) und C(2/4/-3).

2.1 (5 Punkte)
Prüfen Sie, ob das Dreieck ABC rechtwinklig ist.
Bestimmen Sie einen Punkt D so, dass die Punkte A, B, C und D Eckpunkte eines Parallelogramms sind.

2.2 (4 Punkte)
Prüfen Sie, ob die Ebene, in der das Dreieck ABC liegt, die x_3-Achse enthält.

2.3 (6 Punkte)
Zeigen Sie, dass eine Seite des Dreiecks ABC parallel zu einer der Koordinatenebenen ist.
Zeigen Sie, dass die x_1x_2-Ebene aus der Dreiecksfläche eine Strecke ausschneidet, und berechnen Sie die Länge dieser Strecke.

**Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG, BTG)
Hauptprüfung 2013 Teil 4, Vektorgeometrie, Lösung zu Aufgabe 2
Baden-Württemberg**

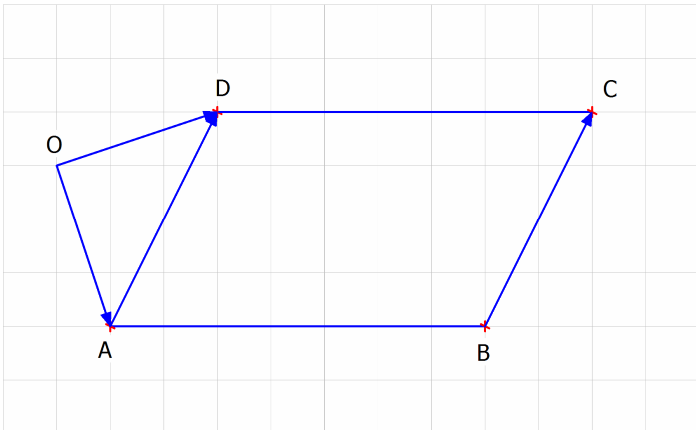
2.1

Es gilt $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ -5 \end{pmatrix}$

Kontrolle mit Hilfe des Skalarproduktes, ob zwei Vektoren rechtwinklig zueinander sind:

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 + 24 + 0 = 30 \neq 0$ also nicht rechtwinklig
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -30 - 120 + 0 = -150 \neq 0$ also nicht rechtwinklig
$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = -5 - 20 + 25 = 0$ also rechtwinklig.

Das Dreieck hat im Punkt C einen rechten Winkel.



Berechnung des Punktes D: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix}$

Der Punkt D hat die Koordinaten D(-4/-8/-3).

2.2

Aufstellen der Ebene E durch ABC: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

Die Gerade, die der x_3-Achse entspricht, hat die Gleichung g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Berechnung der gemeinsamen Punkte der Gerade g und der Ebene E:

$$t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

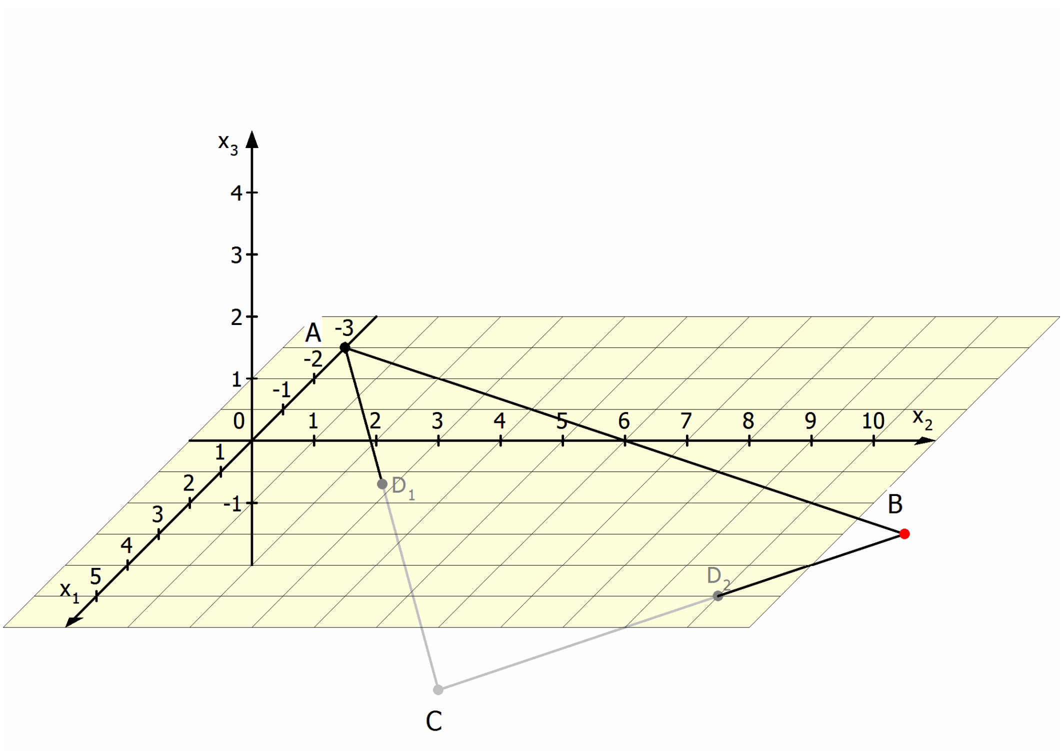
Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:
$$\begin{array}{rrrcr} 6r & +s & & = & -1 \\ 12r & +2s & & = & -2 \\ & -5s & -t & = & -2 \end{array}$$

Mit dem rref-Befehl des GTR ergibt sich:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/30 & -7/30 \\ 0 & 1 & 1/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Nullzeile bedeutet, dass das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen besitzt.
Das heißt, dass es unendlich viele Schnittpunkte geben muss.
Daher liegt die x_3-Achse in der Ebene E.

2.3

Die Dreiecksseite AB ist parallel zur x_1x_2-Ebene.
Dies kann man entweder daran erkennen, dass die Punkte A und B dieselbe x_3-Koordinate besitzen.
Alternativ kann man es daran erkennen, dass der Vektor $\overrightarrow{AB}$ die x_3-Koordinate Null besitzt.



Die Punkte A und B liegen oberhalb der x_1x_2-Ebene. Der Punkt C hat eine negative x_3-Koordinate und liegt daher unterhalb der x_1x_2-Ebene.

Somit schneidet die x_1x_2-Ebene aus der Dreiecksflächehe eine Strecke aus.

Um die Länge dieser Strecke zu bestimmen, werden die Schnittpunkte der Geraden AC und BC mit der x_1x_2-Ebene benötigt.

Gerade AC: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

Setze $x_3 = 0 \Rightarrow 2 - 5t = 0 \Rightarrow t = 0,4$. Der Schnittpunkt lautet $D_1(1,4 / 2,8 / 0)$.

Gerade BC: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ -5 \end{pmatrix}$

Setze $x_3 = 0 \Rightarrow 2 - 5t = 0 \Rightarrow t = 0,4$. Der Schnittpunkt lautet $D_2(5 / 10 / 0)$.

Die gesuchte Strecke hat die Länge $\left|\overrightarrow{D_1D_2}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3,6 \\ 7,2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3,6^2 + 7,2^2 + 0^2} = \sqrt{64,8} \approx 8,05$ LE