Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG, BTG)
Hauptprüfung 2013 Teil 4, Wirtschaftliche Anwendungen, Aufgabe 2
Baden-Württemberg

2.1
Die Produktion einer Firma ist auf drei Werke W_1, W_2 und W_3 verteilt, die nach dem Leontief-Modell miteinander verflochten sind. Gegeben ist die Input-Matrix A durch

$$A = \frac{1}{120} \cdot \begin{pmatrix} 24 & 48 & 0 \\ 36 & 12 & 15 \\ 0 & 18 & 5 \end{pmatrix}$$

Die Lieferungen untereinander und an den Markt sowie die Produktion werden in Geldeinheiten (GE) angegeben.

2.1.1 (6 Punkte)
In der vergangenen Produktionsperiode lieferte Werk W_1 Waren im Wert von 48 GE, Werk W_2 Waren im Wert von 222 GE und Werk W_3 Waren im Wert von 176 GE an den Markt.
Erstellen Sie das zugehörige Verflechtungsdiagramm.

2.1.2 (2 Punkte)
Überprüfen Sie, ob jede beliebige Nachfrage erfüllt werden kann.

2.1.3 (4 Punkte)
In der laufenden Produktionsperiode produzierten die Werke W_1 und W_2 jeweils Waren im Wert von 100 GE. Werk W_1 gibt Waren im Wert von 40 GE an den Markt ab. Die Werke W_2 und W_3 beliefern den Markt mit Waren im Wert von zusammen 145 GE.
Berechnen Sie den Wert der Lieferungen der Werke W_2 und W_3 an den Markt und den Wert der Produktion des Werks W_3.

2.2 (3 Punkte)
Für $t \in \mathbb{R}$ ist das folgende lineare Gleichungssystem gegeben:

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & & +3x_3 & = & 4t \\ & x_2 & +3tx_3 & = & 5 \\ & & (t^2-1)x_3 & = & 3t+3 \end{array}$$

Untersuchen Sie, für welche Werte von t das lineare Gleichungssystem keine Lösung, unendlich viele Lösungen bzw. genau eine Lösung besitzt.

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG, BTG)
Hauptprüfung 2013 Teil 4, Wirtschaftliche Anwendungen, Lösungen Aufgabe 2
Baden-Württemberg

2.1.1

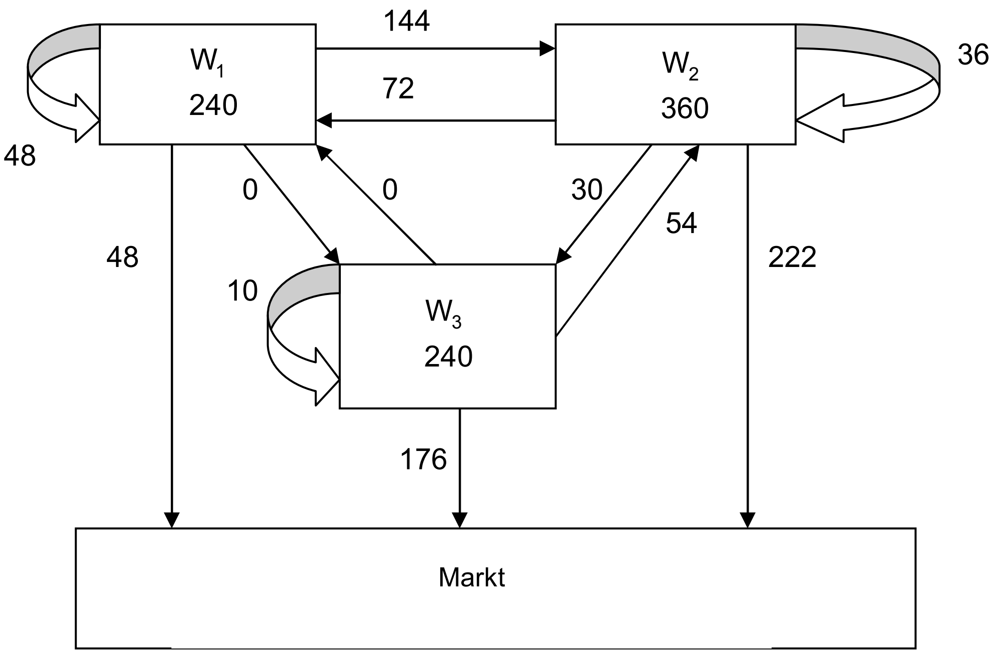
Der Marktabgabevektor lautet $\vec{y} = \begin{pmatrix} 48 \\ 222 \\ 176 \end{pmatrix}$.

Berechnung des Produktionsvektors: $\vec{x} = (E - A)^{-1} \cdot \vec{y}$ wobei E die Einheitsmatrix ist.

Mit dem GTR ergibt sich $\vec{x} = \begin{pmatrix} 240 \\ 360 \\ 240 \end{pmatrix}$.

	W_1	W_2	W_3	Markt y	Produktion x
W_1	$\frac{24}{120} \cdot 240$	$\frac{48}{120} \cdot 360$	$0 \cdot 240$	48	240
W_2	$\frac{36}{120} \cdot 240$	$\frac{12}{120} \cdot 360$	$\frac{15}{120} \cdot 240$	222	360
W_3	$0 \cdot 240$	$\frac{18}{120} \cdot 360$	$\frac{5}{120} \cdot 240$	176	240

Das zugehörige Verflechtungsdiagramm hat folgendes Aussehen:



2.1.2

Ermittlung der Inversen $(E-A)^{-1}$ mit dem GTR:

$$(E-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 675/448 & 115/168 & 5/56 \\ 115/224 & 115/84 & 5/28 \\ 9/112 & 3/14 & 15/14 \end{pmatrix}$$

Da kein einziger Eintrag der Inversen negativ ist, kann jede beliebige Marktnachfrage erfüllt werden.

2.1.3

Für den Produktionsvektor gilt $\vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und für den Marktabgabevektor gilt $\vec{y} = \begin{pmatrix} 40 \\ y_2 \\ 145 - y_2 \end{pmatrix}$

Die Leontief-Gleichung lautet $\vec{y} = (E-A) \cdot \vec{x}$.

Einsetzen der gegeben Größen liefert $\begin{pmatrix} 40 \\ y_2 \\ 145 - y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,4 & 0 \\ -0,3 & 0,9 & -0,125 \\ 0 & -0,15 & 23/24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Das Ausmultiplizieren der Gleichung ergibt in der 1.Zeile: $40 = 80 - 40 = 40$
(wahre Aussage)

Aus der 2.Zeile folgt $y_2 = -30 + 90 - 0,125x_3$ (*)

Aus der 3.Zeile folgt: $145 - y_2 = -15 + \frac{23}{24}x_3$ (**)

Umschreiben von (*) und (**) in ein LGS:
$$\begin{array}{rrcr} y_2 & +0,125x_3 & = & 60 \\ -y_2 & -\frac{23}{24}x_3 & = & -160 \end{array}$$

Mit dem GTR folgt daraus $y_2 = 45$ und $x_3 = 120$.

Das Werk W_3 produziert Waren im Wert von 120 GE und gibt Waren im Wert von 145 - 45 = 100 GE an den Markt ab.

Das Werk W_2 liefert Waren im Wert von 45 GE an den Markt.

2.2

Aus der dritten Zeile des Gleichungssystems ergeben sich folgende Sonderfälle:
$t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t = \pm 1$

Prüfung für t = 1:
In der 3.Zeile ergibt sich die Gleichung 0 = 6, was einen Widerspruch darstellt.
Das heißt, dass für t = 1 das Gleichungssystem keine Lösung besitzt.

Prüfung für t = -1:
In der 3.Zeile ergibt sich die Gleichung 0 = 0, was eine wahre Aussage darstellt.
Da nur noch 2 Gleichungen mit 3 Variablen übrig bleiben, besitzt das LGS unendlich viele Lösungen.

Aus der zweiten und der ersten Zeile ergeben sich keine weiteren Sonderfälle, da vor den Variablen x_2 und x_1 keine von t abhängigen Koeffizienten stehen.

Fazit:
Für t = 1 besitzt das LGS keine Lösung.
Für t = -1 besitzt das LGS unendlich viele Lösungen.
Für alle anderen Werte für t besitzt das LGS eine eindeutige Lösung.