Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2006 Teil 2, Vektorgeometrie, Aufgabe 2
Baden-Württemberg

2.1

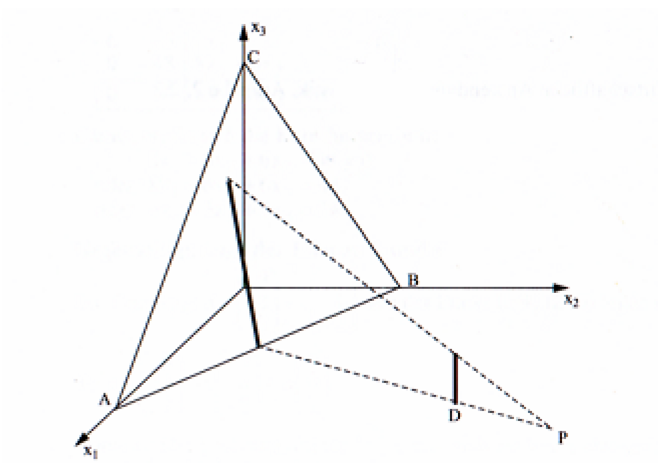
Im Anschauungsraum sind die Geraden g mit

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix},\ r \in \mathbb{R}$$

und die Punkte A(6/0/0), B(0/8/0), C(0/0/8) und D(9/12/0) gegeben.

2.1.1
Die Ebene E geht durch die Punkte A, B und C. Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Ebene in Koordinatenform.
Die Gerade g und der Punkt D legen eine Ebene F fest.
Untersuchen Sie die gegenseitige Lage von E und F. (8 Punkte)

2.1.2
Das Dreieck ABC stellt eine Seitenfläche einer Pyramide dar. Ein Pfosten der Länge 2 steht im Punkt D senkrecht auf der $x_1 - x_2 -$ Ebene. Er wird von einer punktförmigen Lichtquelle beleuchtet, die sich im Punkt P(12/16/0) befindet.
Berechnen Sie die Länge des Schattens, den der Pfosten auf die Seitenfläche wirft. (7 Punkte)



(Skizze ist nicht maßstabsgetreu)

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2006 Teil 2, Vektorgeometrie, Lösung zu Aufgabe 2
Baden-Württemberg

2.1.1

Aufstellen der Ebene E in Parameterform: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$

Umformung der Ebenengleichung von E in Koordinatenform:

$x_1 = 6 - 6r - 6s \qquad (1)$

$x_2 = 8r \Rightarrow r = \frac{1}{8}x_2 \qquad (2)$

$x_3 = 8s \Rightarrow s = \frac{1}{8}x_3 \qquad (3)$

Einsetzen von (2) und (3) in (1) ergibt:
$x_1 = 6 - \frac{6}{8}x_2 - \frac{6}{8}x_3 \Rightarrow 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 24$

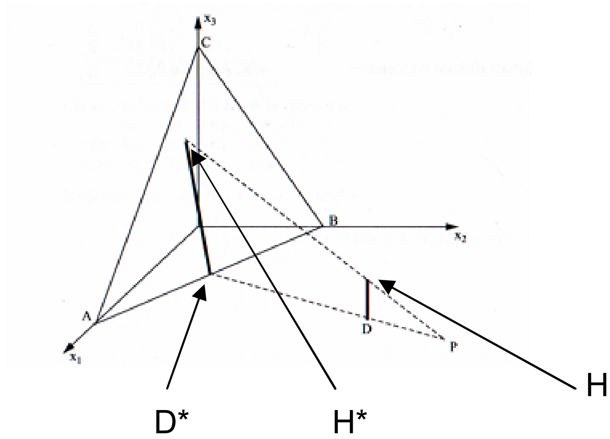
Aufstellen der Ebene F in Parameterform: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(Der zweite Richtungsvektor entspricht dem Verbindungsvektor vom Punkt D zum Aufpunkt der Geraden g).

Einsetzen der Parameterform von F in die Koordinatengleichung von E:
$4 \cdot (9 + 3r) + 3(12 + 4r) + 3(2 - 2r - 2s) = 24 \Rightarrow 36 + 12r + 36 + 12r + 6 - 6r - 6s = 24$
$\Rightarrow 18r - 6s = -54 \Rightarrow s = 3r + 9$

Einsetzen dieser Beziehung in die Parameterform von F:
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + (3r + 9) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$
und dies ist die Parameterform der Schnittgerade der beiden Ebenen.

2.1.2



Es gilt H(9/12/2).
Die Gerade durch P und H besitzt die Gleichung

$$h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Berechnung des Schnittpunktes H* der Gerade h mit der Ebene E:

$$4(9+3t)+3(12+4t)+3(2-2t)=24 \Rightarrow 36+12t+36+12t+6-6t=24 \Rightarrow 18t=-54 \Rightarrow t=-3$$

t=-3 eingesetzt in die Geradengleichung ergibt H*(0/0/8).

Die Gerade durch P und D besitzt die Gleichung

$$n:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechnung des Schnittpunktes D* der Gerade n mit der Ebene E:

$$4(9+3t)+3(12+4t)+3 \cdot 0=24 \Rightarrow 36+12t+36+12t=24 \Rightarrow 24t=-48 \Rightarrow t=-2$$

t=-2 eingesetzt in die Geradengleichung ergibt D*(3/4/0).

Die Länge des Schattens beträgt $\overline{D^*H^*} = \sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2+(0-8)^2} = \sqrt{89}$ LE