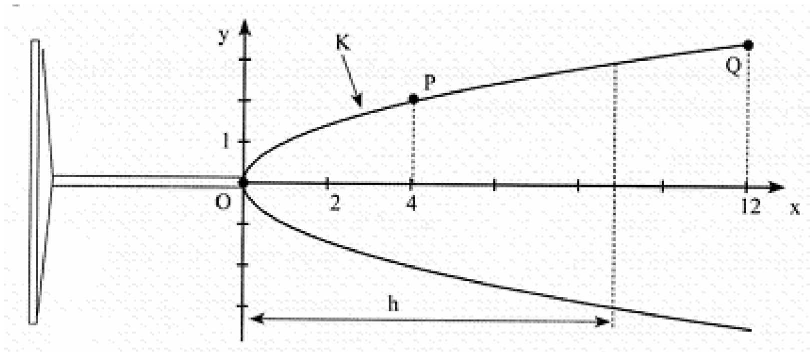
Abiturprüfung Mathematik 2005 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien ohne TG – Anwendungsorientierte Aufgabe
Gruppe III, Aufgabe A



Das Bild zeigt den Querschnitt eines Sektglases. Der Kelch des Glases entsteht durch Rotation des Schaubildes K um die x-Achse. Das Schaubild K setzt sich zusammen aus dem Kurvenbogen OP und der Strecke PQ, welche den Kurvenbogen OP im Punkt P tangential bis Q verlängert. Die Wanddicke des Glases ist zu vernachlässigen.

Punkt O ist der Koordinatenursprung, Punkt P besitzt die x-Koordinate 4, Punkt Q die x-Koordinate 12.
Der Kurvenbogen OP wird beschrieben durch das Schaubild der Funktion f mit

$$f(x) = \sqrt{x} \;;\; 0 \le x \le 4$$

Eine Längeneinheit im Bild entspricht 1 cm im Original.

a) Ermittle die Gleichung der Tangente des Schaubildes K im Punkt P.
Zeige, dass Q die y-Koordinate 4 hat. (4 Punkte)

b) Das aufrecht stehende Glas wird bis zur Füllhöhe $h_1 = 4$ mit Sekt gefüllt.
Wie viel cm³ Sekt sind in diesem Glas ? (3 Punkte)

c) Jetzt wird mehr Sekt in das Glas gefüllt.
Berechne das Flüssigkeitsvolumen V in Abhängigkeit von der Einfüllhöhe h für $4 \le h \le 12$. (5 Punkte)

d) Das Flüssigkeitsvolumen V kann in Abhängigkeit von der Einfüllhöhe h für $4 \le h \le 12$ berechnet werden mit Hilfe von

$$V(h) = \pi \cdot \left(\frac{1}{48}h^3 + \frac{1}{4}h^2 + h - \frac{4}{3} \right)$$

Bei welcher Einfüllhöhe sind 0,1 Liter Sekt im Glas ? (3 Punkte)

Lösung Aufgabe A:

a) Gleichung der Tangente in P(4/2):

$$f'(x) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{4}} = \frac{1}{4} = m_{Tangente}$$

Punkt-Steigungs-Form: $y - 2 = \frac{1}{4}(x-4) \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + 1$

Der Punkt Q liegt auf der Tangente:

Einsetzen von x = 12: $y = \frac{1}{4}\cdot 12 + 1 = 4 \Rightarrow Q(12/4)$

b) Volumen $= \pi \cdot \int_0^4 (f(x))^2\,dx = \pi \cdot \int_0^4 x\,dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4 = 8\pi \approx 25{,}1$ cm³

c) $V(h) = 8\pi + \pi \cdot \int_4^h \left(\frac{1}{4}x+1\right)^2 dx = 8\pi + \int_4^h \left(\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{2}x + 1\right)dx = 8\pi + \left[\frac{1}{48}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + x\right]_4^h$

$= 8\pi + \pi \cdot (\frac{1}{48}h^3 + \frac{1}{4}h^2 + h - \frac{28}{3}) = \pi \cdot (\frac{1}{48}h^3 + \frac{1}{4}h^2 + h - \frac{4}{3})$

d) 0,1 Liter = 100 cm³ = $\pi \cdot (\frac{1}{48}h^3 + \frac{1}{4}h^2 + h - \frac{4}{3})$

GTR-Lösung: h = 7,83 cm