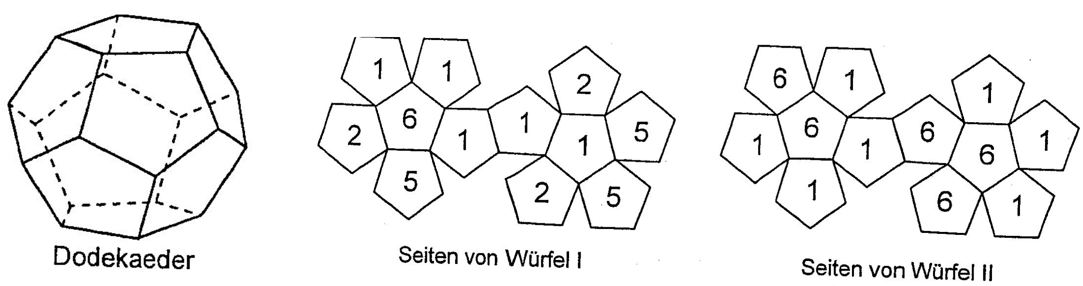
Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG, BTG, TG)
Hauptprüfung 2013 Teil 2, Stochastik, Aufgabe 2
Baden-Württemberg

2
Zwei Dodekaeder werden als Spielwürfel verwendet. Ihre 12 Seiten sind wie unten abgebildet beschriftet. Es gilt stets die Zahl als geworfen, die auf der obersten Fläche zu sehen ist.
Alle Seiten liegen mit derselben Wahrscheinlichkeit oben.



2.1 (6 Punkte)
Würfel I wird viermal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
A: Es tritt die Zahlenreihenfolge 5 – 6 – 2 – 2 auf.
B: Alle Zahlen sind verschieden.

Marc behauptet: Das Ereignis "alle Zahlen sind gleich" ist das Gegenereignis von B.
Nehmen Sie Stellung.

2.2 (3 Punkte)
Würfel II wird viermal geworfen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dabei die Sechs häufiger auftritt als die Eins.

2.3 (6 Punkte)
Jonas und Marc benutzen die beiden Würfel für ein Spiel. Jonas wirft Würfel I einmal, Marc wirft Würfel II einmal.
Gewonnen hat derjenige, dessen Würfel die höhere Zahl anzeigt. Der Gewinner erhält vom Verlierer die höhere der geworfenen Zahlen in Euro ausgezahlt. Bei gleichen Zahlen endet das Spiel unentschieden und keiner der beiden muss zahlen.
Prüfen Sie, für wen sich das Spiel langfristig lohnt.

**Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG, BTG, TG)
Hauptprüfung 2013 Teil 2, Stochastik, Lösung Aufgabe 2 Baden-Württemberg**

2.1

$$P(A) = P(5-6-2-2) = \frac{3}{12}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{12}\cdot\frac{3}{12} = \frac{1}{768}$$

Ereignis B: Wenn alle Zahlen verschieden sein müssen, dann wird jede mögliche Augenzahl des Dodekaeders einmal geworfen, also 1, 2, 5, 6 (in beliebiger Reihenfolge).

$$P(B) = \frac{5}{12}\cdot\frac{3}{12}\cdot\frac{3}{12}\cdot\frac{1}{12}\cdot 4! = \frac{5}{96}$$

Hinweis: Der Faktor 4! ist erforderlich, da die Zahlen 1, 2, 5, 6 in beliebiger Reihenfolge geworfen werden können und diese vier Zahlen auf 4! verschiedene Arten angeordnet werden können.

Die Behauptung von Marc ist falsch.
Das Gegenereignis von B lautet richtig: "Mindestens zwei Zahlen sind gleich".
Das Gegenereignis von B umfasst also alle Ergebnisse, in denen genau zwei Zahlen oder genau drei Zahlen oder alle vier Zahlen gleich sind.

2.2
Beim Würfel II wird die Sechs häufiger gewürfelt als die Eins, wenn die Sechs mindestens dreimal geworfen wird.

Dieses Experiment kann als BInomialverteilung interpretiert werden:
Es gibt n = 4 Versuche, die "6" sei der Treffer mit Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{5}{12}$.

P(genau 3 Treffer) = $\binom{4}{3}\cdot\left(\frac{5}{12}\right)^3\cdot\left(\frac{7}{12}\right)^1 = 0{,}169$ ($\binom{4}{3}$ mit dem GTR über den Befehl "nCr")

P(genau 4 Treffer) = $\binom{4}{4}\cdot\left(\frac{5}{12}\right)^4\cdot\left(\frac{7}{12}\right)^0 = \left(\frac{5}{12}\right)^4 = 0{,}0301$

P(mehr Sechser als Einser) = 0,169 + 0,0301 = 0,1991

2.3
Folgende Würfelkombinationen können eintreten, bei denen sich ein Gewinn bei einem von beiden Spielern ergibt.
Der Gewinn ist aus Sicht von Jonas (Würfel I) dargestellt:

Würfel I	Würfel II		
"2"	"1"	mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{12} \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{48}$	(Gewinn 2€)
"5"	"1"	mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{12} \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{48}$	(Gewinn 5€)
"6"	"1"	mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{12} \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{144}$	(Gewinn 6€)
"1"	"6"	mit Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12} = \frac{25}{144}$	(Gewinn -6€)
"2"	"6"	mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{12} \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{48}$	(Gewinn -6€)
"5"	"6"	mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{12} \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{48}$	(Gewinn -6€)

erwarteter Gewinn für Jonas:

$$2€ \cdot \frac{7}{48} + 5€ \cdot \frac{7}{48} + 6€ \cdot \frac{7}{144} - 6€ \cdot \frac{25}{144} - 6€ \cdot \frac{5}{48} - 6€ \cdot \frac{5}{48} \approx -0{,}98€$$

Jonas verliert langfristig pro Spiel 98 Cent.
Daher lohnt sich das Spiel langfristig für Marc.