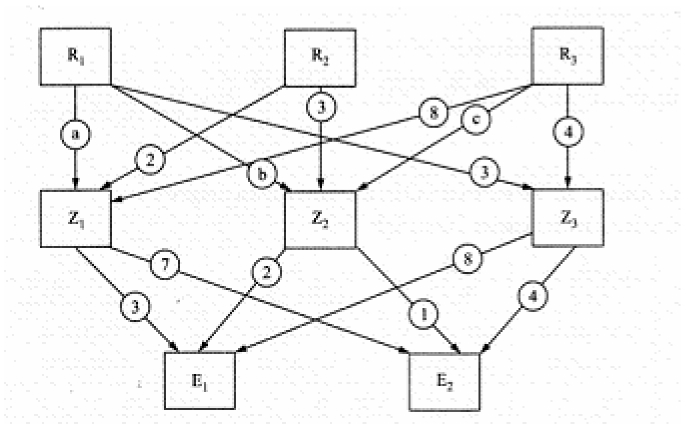
Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2008 Teil 2, Wirtschaftliche Anwendungen, Aufgabe 2
Baden-Württemberg

2.1
Ein Betrieb stellt aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 Her. Aus diesen Zwischenprodukten werden die Endprodukte E_1 und E_2 hergestellt.
Der Bedarf an Rohstoffen in Mengeneinheiten (ME) pro ME der Endprodukte ist durch folgende Matrix gegeben: $C = \begin{pmatrix} 46 & 45 \\ 12 & 17 \\ 70 & 79 \end{pmatrix}$.
Das Materialflussdiagramm beschreibt den Bedarf an Rohstoffen pro ME der Zwischenprodukte und den Bedarf an Zwischenprodukten pro ME der Endprodukte.



2.1.1
Wie viele ME von R_1 sind notwendig, um eine ME von Z_1 herzustellen ?
Wie viele ME von R_1 und wie viele ME von R_3 werden für eine ME von Z_2 benötigt ?
(6 Punkte)

2.1.2
Der Betrieb erhält einen Auftrag über 250 ME von E_1 und 300 ME von E_2.

2.1.2.1
Welche Rohstoffmengen werden zur Produktion dieses Auftrags benötigt ? (2 Punkte)

2.1.2.2
Für den Auftrag über 250 ME von E_1 und 300 ME von E_2 betragen die Fixkosten 200 Euro.
Der Erlös für diesen Auftrag beträgt 3000 Euro. Die Rohstoffkosten pro ME betragen 2 Cent für R_1 und 3 Cent für R_2. Die Kosten für R_3 sind saisonabhängig. Die Fertigungskosten in Cent je ME der Zwischenprodukte sind gegeben durch
$\overrightarrow{k_Z}^T = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 5 \end{pmatrix}$, die Fertigungskosten in Cent je ME der Endprodukte durch
$\overrightarrow{k_E}^T = \begin{pmatrix} 15 & 10 \end{pmatrix}$.
Wie hoch darf der Preis für eine ME von Rohstoff R_3 höchstens sein, damit die Firma bei diesem Auftrag keinen Verlust macht ? (7 Punkte)

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2008 Teil 2, Wirtschaftliche Anwendungen, Lösungen Aufgabe 2
Baden-Württemberg

2.1.1

Aus dem Materialflussdiagramm kann man die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix A und die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix B ablesen:

$A = \begin{pmatrix} a & b & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 8 & c & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$.

Gesucht sind nun die Einträge a, b und c der Matrix A.

Es gilt $A \cdot B = C$ wobei aufgrund der fehlenden Invertierbarkeit der Matrix B diese Formel nicht nach A aufgelöst werden kann.

$$\begin{pmatrix} a & b & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 8 & c & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = C = \begin{pmatrix} 46 & 45 \\ 12 & 17 \\ 70 & 79 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3a+2b+24 & 7a+b+12 \\ 12 & 17 \\ 56+2c & 72+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 & 45 \\ 12 & 17 \\ 70 & 79 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:
3a + 2b + 24 = 46 (1)
7a + b + 12 = 45 (2)
56 + 2c = 70 (3)
72 + c = 79 (4)

Aus (3) und (4) folgt c = 7.
Aus (1) und (2) ergibt sich a = 4 und b = 5.

Es gilt also $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.

Um 1 ME von Z_1 herzustellen, braucht man a = 4 ME von R_1.
Um 1 ME von Z_2 herzustellen, braucht man b = 5 ME von R_1.
Um 1 ME von Z_2 herzustellen, braucht man c = 7 ME von R_3.

2.1.2.1

Mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} 250 \\ 300 \end{pmatrix}$ folgt $\vec{r} = C \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 46 & 45 \\ 12 & 17 \\ 70 & 79 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 250 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25000 \\ 8100 \\ 41200 \end{pmatrix}$

Für den Auftrag sind 25000 ME von R_1, 8100 ME von R_2 und 41200 ME von R_3 erforderlich.

2.1.2.2

Es gilt $\overrightarrow{k_R}^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & s \end{pmatrix}$ in Cent.

Für den Vektor der variablen Herstellkosten für je 1 ME der Endprodukte gilt:

$$\overrightarrow{k_V}^T = \overrightarrow{k_R}^T \cdot C + \overrightarrow{k_Z}^T \cdot B + \overrightarrow{k_E} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 46 & 45 \\ 12 & 17 \\ 70 & 79 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 8 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 & 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 128 + 70s & 141 + 79s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 62 & 42 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 205 + 70s & 193 + 79s \end{pmatrix}$$

Die Gesamtkosten in Cent betragen

$$K = \overrightarrow{k_V}^T \cdot \vec{x} + 20000 = \begin{pmatrix} 205 + 70s & 193 + 79s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 250 \\ 300 \end{pmatrix} + 20000 = 129150 + 41200s$$

Damit kein Verlust entsteht, muss gelten: $129150 + 41200s \le 300000$.
Dies gilt für $s \le 4{,}15$.

Um einen Verlust zu vermeiden, darf der Preis von R_3 höchstens 4,15 Cent, also gerundet 4 Cent pro ME betragen.