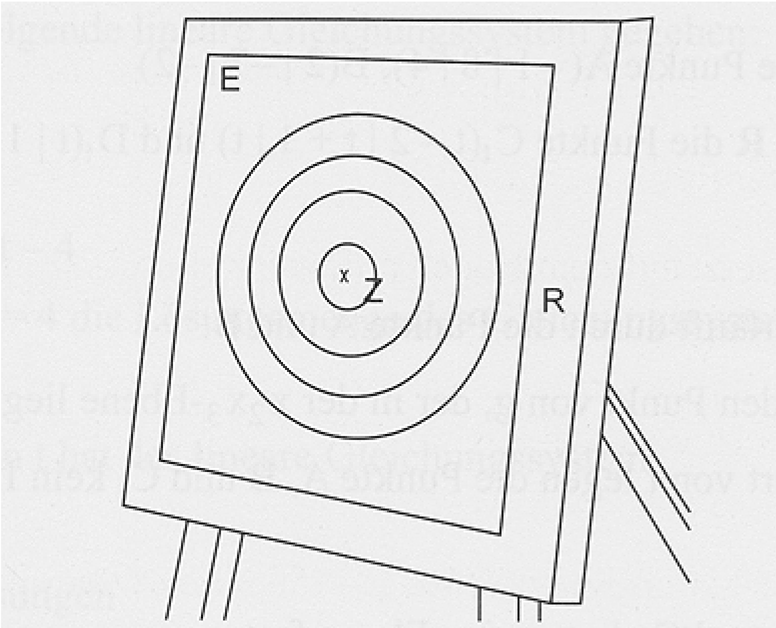
Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2010 Teil 4, Vektorgeometrie, Aufgabe 2
Baden-Württemberg



2
Die Abbildung zeigt eine Zielscheibe, wie sie beim Bogenschießen verwendet wird.
Gegeben sind die Punkte E(-5005/100/150), R(-5000/200/100) und das Zentrum Z(-5000/150/100) der Zielscheibe.
Der Boden liegt in der x_1x_2-Ebene. Die Koordinaten sind in cm angegeben.

2.1
Geben Sie eine Gleichung der Ebene an, in der die Zielscheibe liegt. (2 Punkte)

2.2
Zwei Schützen schießen zur Zeit t = 0 jeweils einen Pfeil ab. Für den Ort der Pfeilspitzen zum Zeitpunkt t in Sekunden gilt in vereinfachter Darstellung:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 170 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -10004 \\ 360 \\ -100 \end{pmatrix};\ t \geq 0 \qquad h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 300 \\ 180 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -10006 \\ -340 \\ -100 \end{pmatrix};\ t \geq 0$$

Schütze 1 Schütze 2

2.2.1
Begründen Sie, welcher Schütze vermutlich der Größere ist. Begründen Sie, welcher der Schützen bei diesem Schuss der Bessere ist. (7 Punkte)

2.2.2
Berechnen Sie den geringsten Abstand der beiden Pfeilspitzen während ihres Fluges.
(6 Punkte)

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2010 Teil 4, Vektorgeometrie, Lösung zu Aufgabe 2
Baden-Württemberg

2.1
Aufstellen der Gleichung der Ebene H, in der die Punkte E, R und Z liegen:

$$H:\ \vec{x} = \overrightarrow{OE} + r\cdot\overrightarrow{ER} + s\cdot\overrightarrow{EZ} = \begin{pmatrix}-5005\\100\\150\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}5\\100\\-50\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}5\\50\\-50\end{pmatrix}$$

2.2.1
Der Ortsvektor der Geraden gibt den Punkt an, an dem sich die Pfeilspitzen zu Beginn (t = 0) befinden.
Da die x_3 -Koordinate des Ortsvektors der Geraden h (Schütze 2) mit 180 um 10 größer ist als diejenige der Geraden g (Schütze 1), heißt dies dass die Pfeilspitze vom Schützen 2 zu Beginn 10 cm höher ist als die von Schütze 1.
Somit dürfte der Schütze 2 der Größere der beiden sein.

Der bessere Schütze ist der, dessen Pfeileinschussloch näher am Mittelpunkt Z liegt.

Das Einschussloch von Schütze 1 ergibt sich aus dem Schnitt der Gerade g mit der Ebene H.
Gleichsetzen der Gerade und der Ebene ergibt:

$$\begin{pmatrix}-5005\\100\\150\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}5\\100\\-50\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}5\\50\\-50\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\170\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-10004\\360\\-100\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow r\cdot\begin{pmatrix}5\\100\\-50\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}5\\50\\-50\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}10004\\-360\\100\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5005\\-100\\20\end{pmatrix}$$

Mit dem GTR ergibt sich als Lösung r = 1, s = -0,4 und t = 0,5.

Einsetzen von t = 0,5 in die Gerade g ergibt als Einschussloch $S_1(-5002/180/120)$
Der Abstand des Einschussloches von Z beträgt

$$\left|\overrightarrow{S_1Z}\right| = \left|\begin{pmatrix}2\\-30\\-20\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+900+400} = 36{,}11\text{cm}$$

Das Einschussloch von Schütze 2 ergibt sich aus dem Schnitt der Gerade h mit der Ebene H.

Gleichsetzen der Gerade und der Ebene ergibt:

$$\begin{pmatrix} -5005 \\ 100 \\ 150 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 100 \\ -50 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 50 \\ -50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 300 \\ 180 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -10006 \\ -340 \\ -100 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 100 \\ -50 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 50 \\ -50 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10006 \\ 340 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5005 \\ 200 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Mit dem GTR ergibt sich als Lösung r = 0,2, s = 0,2 und t = 0,5.

Einsetzen von t = 0,5 in die Gerade h ergibt als Einschussloch $S_2(-5003/130/130)$
Der Abstand des Einschussloches von Z beträgt

$$\left|\overrightarrow{S_2Z}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 20 \\ -30 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+400+900} = 36{,}18\,\text{cm}$$

Damit ist der erste Schütze etwas besser als der zweite.

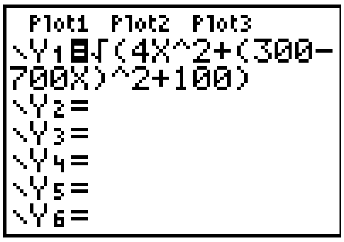
2.2.2
Zum Zeitpunkt t befindet sich der Pfeil von Schütze 1 im Punkt
$P_t(-10004t/360t/170-100t)$ und der Pfeil von Schütze 2 im Punkt
$Q_t(-10006t/300-340t/180-100t)$

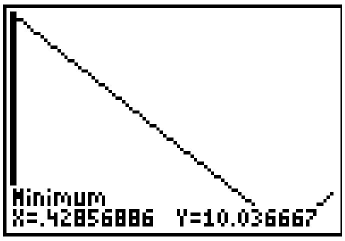
Der Abstand der beiden Punkte zum Zeitpunkt t beträgt

$$\left|\overrightarrow{P_tQ_t}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2t \\ 300-700t \\ 10 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4t^2 + (300-700t)^2 + 100}$$

Gesucht ist nun der Wert von t für $0 \le t \le 0{,}5$ (da für t = 0,5 die Pfeile in der Scheibe stecken) für den der Abstand minimal wird.

GTR:





Für t = 0,429 Sekunden beträgt der Abstand der Pfeile 10,04 cm.
(Hinweis: Nach t = 0,5 Sekunden beträgt der Abstand der Pfeile 51 cm, was dem Abstand der beiden Einschusslöcher entspricht).