Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2005 Gruppe II, Vektorgeometrie, Aufgabe B
Baden-Württemberg

Im Anschauungsraum sind der Punkt A(3/6/-9), die Gerade

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie für jedes $k \in \mathbb{R}$ die Ebene $E_k:\ 2kx_1 + kx_2 - x_3 = 4k$ gegeben.

a) Die Ebene F enthält die Gerade g und den Punkt A.
Geben Sie eine Gleichung von F in Koordinatenform an. (5 Punkte)

b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden von E_1 mit der Ebene
F: $2x_1 + x_2 + 2x_3 = -6$
Untersuchen Sie die Lage der Ebene F zur Ebene E_k. (7 Punkte)

c) Das Dreieck aus den Punkten A, B(1/2/5) und C(7/4/1) soll durch einen Punkt D zu einem Parallelogramm ABCD ergänzt werden.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D.
Berechnen Sie den Umfang des Parallelogramms. (6 Punkte)

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2005 Gruppe II, Vektorgeometrie, Lösung zu Aufgabe B
Baden-Württemberg

a) Parameterform von F: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1-3 \\ 4-6 \\ -4-(-9) \end{pmatrix}$

Vereinfacht: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Umwandlung in Koordinatenform:

$x_1 = -1 - 2t - 4r \quad (1)$
$x_2 = 4 + 2t - 2r \quad (2)$
$x_3 = -4 + t + 5r \quad (3)$

Zunächst wird der Parameter t entfernt:

(1) + (2): $x_1 + x_2 = 3 - 6r$ (3)
(1) + 2•(3) : $x_1 + 2 \cdot x_3 = -9 + 6r$ (4)

Nun wird der Parameter r entfernt:

(2) + (4): $x_1 + x_2 + x_1 + 2x_3 = -6 \Rightarrow 2x_1 + x_2 + 2x_3 = -6$ Koordinatengleichung von F

b) Berechnung der Schnittgerade:
E_1: $2x_1 + x_2 - x_3 = 4$ (1)
F: $2x_1 + x_2 + 2x_3 = -6$ (2)

Zur Lösung des Gleichungssystems wird dieses auf Stufenform gebracht:
(1) $2x_1 + x_2 - x_3 = 4$
(1) – (2) $-3x_3 = 10$

Aus der letzten Zeile folgt $x_3 = -\frac{10}{3}$
Da das Gleichungssystems mehr Variablen als Gleichungen besitzt, muss ein Parameter eingeführt werden. Sei $x_1 = t$.
Daraus folgt $x_2 = 4 - \frac{10}{3} - 2t = \frac{2}{3} - 2t$

Aus der Lösung kann nun eine Geradengleichung aufgestellt werden:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ \frac{2}{3} - 2t \\ -\frac{10}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{10}{3} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Untersuchung der Lage der Ebene F zur Ebene E_k:

$E_k:\ 2kx_1 + kx_2 - x_3 = 4k$ (1)
F: $2x_1 + x_2 + 2x_3 = -6$ (2)

(2) $2x_1 + x_2 + 2x_3 = -6$
(1) - k•(2) $-x_3 - 2kx_3 = 10k \Rightarrow x_3 \cdot (-1 - 2k) = 10k$ (*)

Für $-1 - 2k = 0 \Rightarrow k = -0{,}5$ lautet (*): 0 = 5 es ergibt sich somit ein Widerspruch.
Für k = -0,5 sind die Ebenen somit echt parallel zueinander.

Für $k \neq -0{,}5$ ist das Gleichungssystem (2 Gleichungen, 3 Unbekannte) mehrdeutig lösbar und die Ebenen schneiden sich in einer Schnittgerade.

c) Das Viereck ABCD ist ein Parallelogramm, wenn gilt: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
Mit $D(d_1 / d_2 / d_3)$ folgt daraus die Bedingung:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 - d_1 \\ 4 - d_2 \\ 1 - d_3 \end{pmatrix}$$ folgt D(9/8/-13).

Umfang des Parallelogramms U = $2 \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| + 2 \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|$

Mit $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4 + 16 + 196} = \sqrt{216}$ und $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{36 + 4 + 16} = \sqrt{56}$ folgt
$U = 2 \cdot \sqrt{216} + 2 \cdot \sqrt{56}$