Abiturprüfung Mathematik 2009 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien ohne TG – Analysis, Aufgabe 1

1.1 (7 Punkte)
Das Schaubild P einer Polynomfunktion dritten Grades hat den Wendepunkt W(-4/-4) und bei x = -2 einen Extrempunkt.
Die Normale von P in W schneidet die x-Achse an der Stelle x = 8.
Bestimmen Sie den zugehörigen Funktionsterm.

1.2
Für jedes $k \in \mathbb{R}$ ist G_k das Schaubild von g_k mit

$$g_k(x) = \frac{1}{4}x(x-2k)^2 \,;\; x \in \mathbb{R}$$

1.2.1 (8 Punkte)
Welche der folgenden Schaubilder könnten zu einer Funktion g_k gehören, welche nicht ?
Begründen Sie Ihre Entscheidung und ermitteln Sie gegebenenfalls den zugehörigen Wert von k.

Schaubild 1

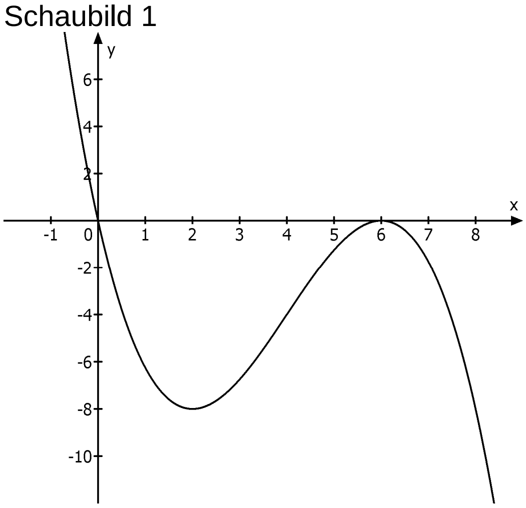


Schaubild 2

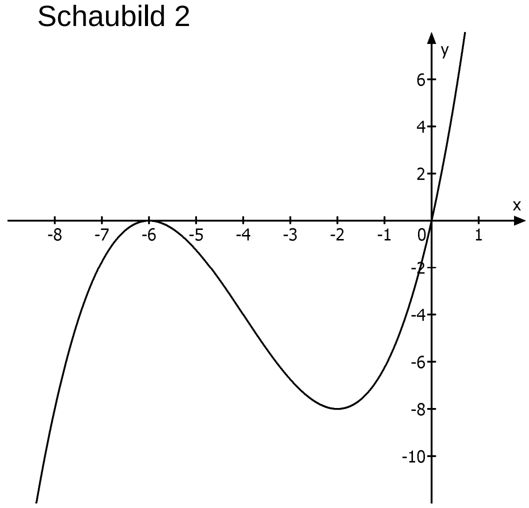


Schaubild 3

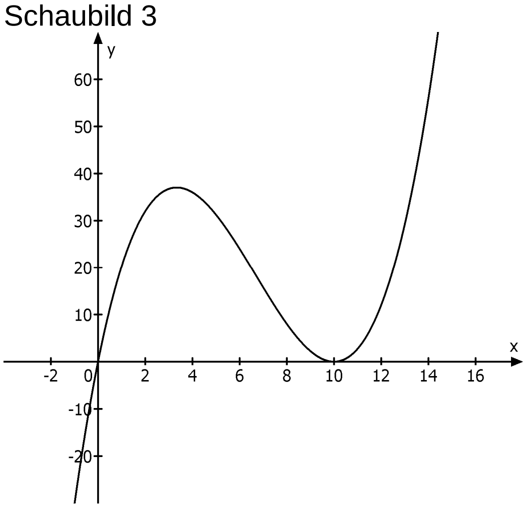
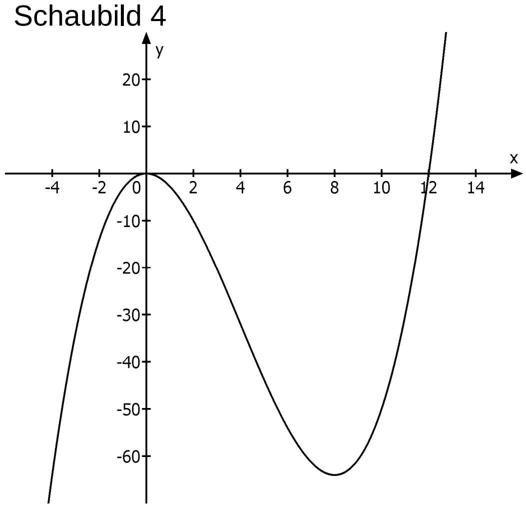


Schaubild 4



1.2.2 (7 Punkte)
Bestimmen Sie die Ortskurve der Tiefpunkte aller G_k mit k < 0.

1.3
Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist die Funktion f_t gegeben durch
$f_t(x) = (t - x^2) \cdot e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$
Das Schaubild von f_t heißt K_t.

1.3.1 (11 Punkte)
Zeichnen Sie K_4.
Die Schnittpunkte von K_4 mit der x-Achse und der Punkt $P(u / f_4(u))$ mit -2 < u < 2 sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Bestimmen Sie u so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks maximal wird.
Um wie viel Prozent weicht der Flächeninhalt dieses größten Dreiecks vom Inhalt der Fläche ab, die von K_4 und der x-Achse eingeschlossen wird ?

1.3.2 (5 Punkte)
Die Tangente an K_4 im Schnittpunkt von K_4 mit der y-Achse, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung x = c begrenzen ein Dreieck.
Berechnen Sie einen Wert von c so, dass das Dreieck den Flächeninhalt 8 hat.

1.3.3 (7 Punkte)
Für welche Werte von t hat K_t zwei Punkte mit der x-Achse gemeinsam ?
Ermitteln Sie für diese Werte von t den Abstand dieser beiden Punkte.
Für welche Werte von t hat K_t zwei Extrempunkte ?

Abiturprüfung Mathematik 2009 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien ohne TG – Analysis, Aufgabe 2

2.1
Für jedes t > 0 ist die Funktion f_t gegeben durch
$f_t(x) = -\frac{1}{t}x^4 + x^3 - x\,;\; x \in \mathbb{R}$
Das Schaubild von f_t heißt K_t.

2.1.1 (9 Punkte)
Zeichnen Sie K_4.
Berechnen Sie den Schnittpunkt der beiden Wendetangenten von K_4 exakt.

2.1.2 (7 Punkte)
Die erste und die zweite Winkelhalbierende sowie die Gerade mit der Gleichung $y = 3x-4$ begrenzen ein Dreieck.
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.
In welchem Verhältnis teilt K_4 diese Dreiecksfläche ?

2.1.3 (6 Punkte)
Für welche Werte von t hat K_t einen Wendepunkt mit positiver Steigung ?

2.1.4 (5 Punkte)
Prüfen Sie, ob es ein t gibt, so dass die Gerade mit der Gleichung $y = -x$ das Schaubild K_t senkrecht schneidet.

2.2 (8 Punkte)
Eine Polynomfunktion h hat folgende Eigenschaften:
(1) $h(0) = 2$
(2) $h'(x) = 0$ für $x = -4$ und für $x = 2$
(3) $h'(x) \geq 0$ für $x \leq 2$
(4) $h''(x) > 0$ für $-4 < x < 0$
Welche Bedeutung hat jede einzelne Eigenschaft für das Schaubild von h ?
Skizzieren Sie ein mögliches Schaubild von h.

2.3
Für jedes k > 0 ist die Funktion g_k gegeben durch
$g_k(x) = \cos(kx) + 2k\,;\; x \in \mathbb{R}$
Ihr Schaubild ist G_k

2.3.1 (4 Punkte)
Bestimmen Sie die exakten Koordinaten der Hoch- und Wendepunkte des Schaubilds G_3 im Bereich $-0{,}5 \leq x \leq 2{,}5$.

2.3.2 (6 Punkte)
Welche Auswirkungen hat eine Vergrößerung von k auf das Schaubild ?
Wie muss k gewählt werden, damit die Funktion g_k die Periode 4 hat ?
Für welche Werte von k besitzt die Funktion g_k Nullstellen ?

Abiturprüfung Mathematik 2009 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien ohne TG – Analysis, Lösung Aufgabe 1

1.1
Der Ansatz für die Polynomfunktion 3.Grades lautet $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Daraus folgt $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ und $f''(x) = 6ax + 2b$.

Folgende Bedingungen können dem Aufgabentext entnommen werden:
Punkt (-4/-4) liegt auf dem Schaubild: $f(-4) = -4 \Rightarrow -64a + 16b - 4c + d = -4$ (1)
Bei x = -4 existiert Wendestelle: $f''(-4) = 0 \Rightarrow -24a + 2b = 0$ (2)
Bei x = -2 existiert Extrempunkt: $f'(-2) = 0 \Rightarrow 12a - 4b + c = 0$ (3)

Von der Normalen in P ist bekannt, dass sie den Punkt W(-4/-4) und N(8/0) enthält.
Damit kann die Steigung der Normalen berechnet werden:
$$m_{Normale} = \frac{y_W - y_N}{x_W - x_N} = \frac{-4-0}{-4-8} = \frac{1}{3}$$
Daraus folgt die Steigung der Tangente bei x = -4: $m_{Tang} = -\frac{1}{m_{Norm}} = -3$
Damit gilt als weitere Bedingung: $f'(-4) = -3 \Rightarrow 48a - 8b + c = -3$ (4)

Nun liegt folgendes lineares Gleichungssystem vor:

$$\begin{array}{rrrrcr} -64a & +16b & -4c & +d & = & -4 \\ -24a & +2b & & & = & 0 \\ 12a & -4b & +c & & = & 0 \\ 48a & -8b & +c & & = & -3 \end{array}$$

Mit dem GTR folgt: $a = \frac{1}{4}$; b = 3 ; c = 9 ; d = 0

Die Funktionsgleichung lautet $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + 3x^2 + 9x$

1.2.1
Das Schaubild der Funktion g_k besitzt bei x = 0 eine einfache Nullstelle und bei x = 2k eine doppelte Nullstelle.
Für den Spezialfall k = 0 existiert bei x = 0 eine dreifache Nullstelle.

Das Schaubild 4 besitzt bei x = 0 eine doppelte Nullstelle, da dort ein Extrempunkt vorliegt.
Da dies für keinen Wert von k möglich ist, kann dieses Schaubild nicht zu einer Funktion g_k gehören.

Verhalten für $x \to \pm\infty$:
Für $x \to \infty$ strebt $g_k(x) \to \infty$.
Für $x \to -\infty$ strebt $g_k(x) \to -\infty$.

Da das Unendlichkeitsverhalten von Schaubild 1 nicht zu der Beschreibung von g_k passt, kann auch Schaubild 1 nicht zu einer Funktion g_k gehören.

Das Schaubild 2 erfüllt die genannten Bedingungen. Da die doppelte Nullstelle bei x = -6 liegt muss für das Schaubild 2 gelten: $2k = -6 \Leftrightarrow k = -3$.

Das Schaubild 3 erfüllt auch die genannten Bedingungen. Da die doppelte Nullstelle bei x = 10 liegt muss für das Schaubild 3 gelten: $2k = 10 \Leftrightarrow k = 5$.

1.2.2

Die Funktionsgleichung lautet $g_k(x) = \frac{1}{4}x \cdot (x^2 - 4kx + 4k^2) = \frac{1}{4}x^3 - kx^2 + k^2x$

Ableitungen: $g_k'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2kx + k^2 = 0$ und $g_k''(x) = \frac{3}{2}x - 2k$

Berechnung des allgemeinen Tiefpunktes der Schar:

$g_k'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3}{4}x^2 - 2kx + k^2 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{2k \pm \sqrt{4k^2 - 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot k^2}}{\frac{3}{2}} = \frac{2k \pm k}{\frac{3}{2}} \text{ und damit } x_1 = 2k \text{ und } x_2 = \frac{2}{3}k$$

$g_k''(2k) = 3k - 2k = k < 0$ für k < 0 und damit liegt dort kein Tiefpunkt vor.

$g_k''(\frac{2}{3}k) = k - 2k = -k > 0$ für k < 0 und damit liegt dort ein Tiefpunkt vor.

Berechnung des y-Wertes vom Tiefpunkt:

$g_k(\frac{2}{3}k) = \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{27}k^3 - \frac{4}{9}k^3 + \frac{2}{3}k^3 = \frac{8}{27}k^3$ und damit lautet der Tiefpunkt TP($\frac{2}{3}k / \frac{8}{27}k^3$)

Berechnung der Ortskurve der Tiefpunkte:

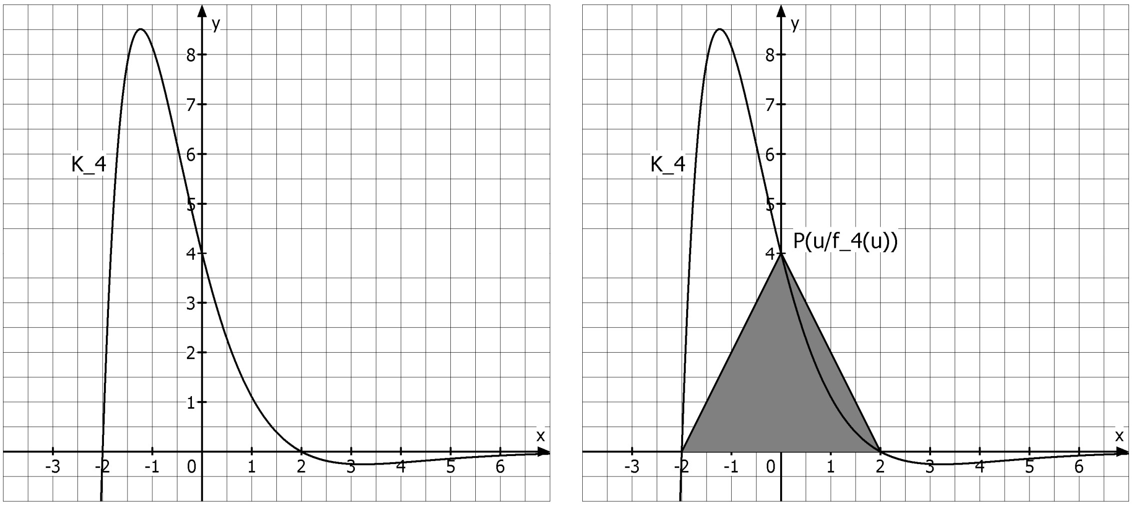
$x = \frac{2}{3}k \Rightarrow k = \frac{3}{2}x$ eingesetzt in $y = \frac{8}{27}k^3$ ergibt $y = \frac{8}{27} \cdot \left(\frac{3}{2}x\right)^3 = x^3$

Da k < 0 ist, nehmen die Tiefpunkte wegen $x = \frac{2}{3}k$ nur negative x-Werte an.

Daher ist die Ortskurve $y = x^3$ nur für x < 0 mit Tiefpunkten der Funktionsschar belegt.

1.3.1

Zeichnung für t = 4: Skizze des Dreiecks;



Berechnung der Schnittpunkte von K_4 mit der x-Achse:

$f_4(x) = 0 \Rightarrow (4 - x^2) \cdot e^{-x} = 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Die Schnittpunkte lauten $N_1(-2/0)$ und $N_2(2/0)$.

Berechnung der Dreiecksfläche: $A = \frac{1}{2} \cdot \overline{N_1N_2} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot f_4(u)$

$\Rightarrow A(u) = 2 \cdot (4 - u^2) \cdot e^{-u}$ für -2 < u < 2

Mit dem GTR ergibt sich für u = -1,236 ein absolutes Maximum mit A(-1,236)=17,02 FE.

Die Fläche zwischen K_4 und der x-Achse beträgt:

$$A = \int_{-2}^{2} f_4(x)dx = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)e^{-x}dx = 15{,}59 \text{ FE (GTR)}$$

Prozentuale Abweichung von der Dreiecksfläche: $\frac{17{,}02}{15{,}59} = 1{,}0917 = 109{,}17\%$

Die prozentuale Abweichung beträgt 9,17%.

1.3.2

Der Schnittpunkt von K_4 mit der y-Achse lautet $S(0/f_4(0)) = S(0/4)$.

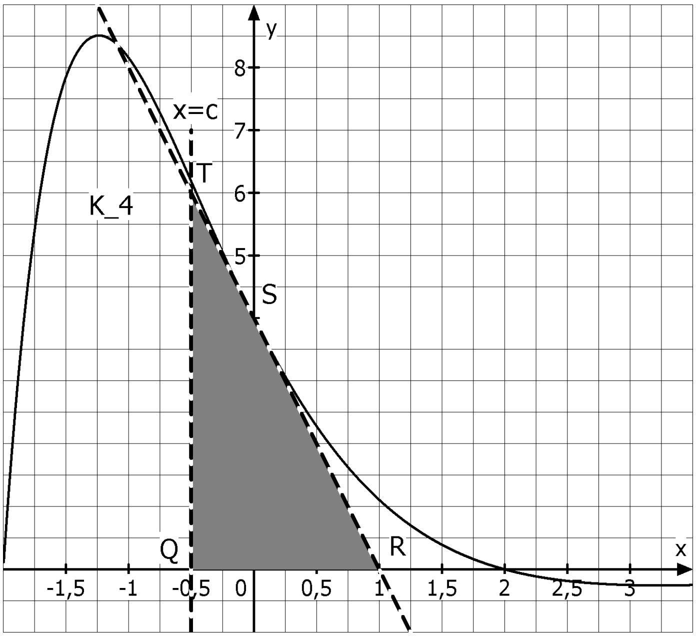
Berechnung der Tangentengleichung in S:
Tangentensteigung $m_{tang} = f_4'(0)$:

$f_4'(x) = (4 - x^2) \cdot (-e^{-x}) + (-2x) \cdot e^{-x} = e^{-x} \cdot (-4 + x^2 - 2x)$

Daraus folgt $f_4'(0) = -4$.

Einsetzen von m = -4 und S(0/4) in $y = mx + c$: $4 = -4 \cdot 0 + c \Rightarrow c = 4$

Die Tangentengleichung in S lautet $y = -4x + 4$.



Berechnung der Schnittstelle R der Tangente mit der x-Achse:
$-4x+4=0 \Leftrightarrow x=1$ und damit R(1/0).

Koordinaten von Q: Q(c/0)
Koordinaten von T: T(c/-4c+4)   (x-Wert c in die Tangentengleichung einsetzen)

Fläche des Dreiecks: $A=\frac{1}{2}\cdot\overline{QR}\cdot\overline{QT}=\frac{1}{2}\cdot(1-c)\cdot(-4c+4)=2c^2-4c+2$

Nun soll gelten: $2c^2-4c+2=8 \Rightarrow 2c^2-4c-6=0$

$$\Rightarrow c_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16+48}}{4}=\frac{4\pm 8}{4}$$

Daraus folgt c = 3 oder c = -1.

Es gibt somit zwei verschiedene Werte für c, wobei für c = 3 die Gerade x = c rechts von R und die Dreiecksfläche unterhalb der x-Achse liegt.

1.3.3
Berechnung der Schnittstellen mit der x-Achse:
$f_t(x)=0 \Rightarrow (t-x^2)\cdot e^{-x}=0$
Satz vom Nullprodukt: $t-x^2=0$ oder $e^{-x}=0$ (die letzte Gleichung besitzt keine Lösung)
$t-x^2=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{t}$

Damit diese beiden Lösungen existieren, muss t > 0 sein. Für t = 0 existiert nur eine Nullstelle x = 0.
Abstand der Nullstellen: $d=2\cdot\sqrt{t}$

Berechnung der Extrempunkte:
$f_t(x)=(t-x^2)\cdot e^{-x}$
$f_t'(x)=(t-x^2)\cdot(-e^{-x})+(-2x)\cdot e^{-x}=e^{-x}(-t+x^2-2x)$
$f_t''(x)=-e^{-x}(-t+x^2-2x)+e^{-x}(2x-2)=e^{-x}(t-x^2+2x+2x-2)=e^{-x}(-x^2+4x-2+t)$

$f_t'(x) = 0 \Rightarrow e^{-x}(-t + x^2 - 2x) = 0$

Satz vom Nullprodukt: Da $e^{-x} = 0$ keine Lösung besitzt, kann nur $x^2 - 2x - t = 0$ werden.

$x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+4t}}{2} = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{1+t}}{2} = 1 \pm \sqrt{1+t}$

Es existieren zwei Lösungen für t > -1.

Prüfung, ob bei $x = 1 \pm \sqrt{1+t}$ Extrempunkte vorliegen:

$f_t''(1 \pm \sqrt{1+t}) = e^{-(1\pm\sqrt{1+t})}(-(1 \pm \sqrt{1+t})^2 + 4(1 \pm \sqrt{1+t}) - 2 + t)$

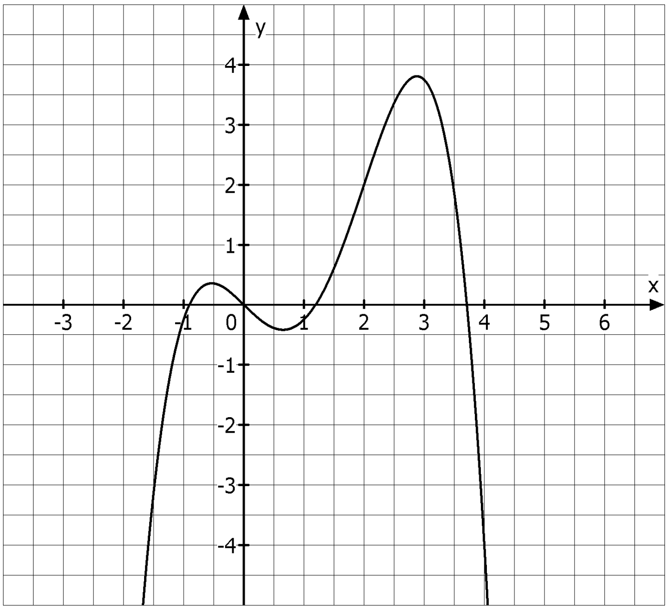
$= e^{-(1\pm\sqrt{1+t})} \cdot (-1 \mp 2\sqrt{1+t} - 1 - t + 4 \pm 4\sqrt{1+t} - 2 + t) = e^{-(1\pm\sqrt{1+t})} \cdot (\pm 2\sqrt{1+t})$

Für t > -1 ist die zweite Ableitungsfunktion ungleich null, damit existieren bei $x = 1 \pm \sqrt{1+t}$ auch Extrempunkte.

Abiturprüfung Mathematik 2009 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien ohne TG – Analysis, Lösung Aufgabe 2

2.1.1

Zeichnung für t = 4:



Berechnung der Wendepunkte von K_4:

$f_4(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - x$

$f_4'(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$

$f_{4(}''(x) = -3x^2 + 6x$

$f_4'''(x) = -6x + 6$

$f_4''(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(-x+2) = 0$
Die Lösung der Gleichung lautet x = 0 oder x = 2.

$f_4'''(0) = 6 \neq 0 \Rightarrow WP_1(0/f_4(0)) = WP_1(0/0)$
$f_4'''(2) = -6 \neq 0 \Rightarrow WP_2(2/f_4(2)) = WP_2(2/2)$

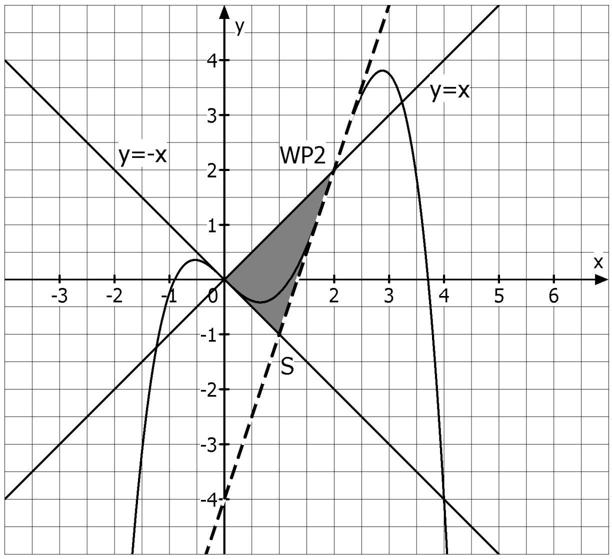
Gleichung der Wendetangente in $WP_1(0/0)$:
Tangentensteigung: $m = f_4'(0) = -1$
Einsetzen von $WP_1(0/0)$ und m = -1 in die Geradengleichung y = mx + c:
$0 = -1 \cdot 0 + c \Rightarrow c = 0$
Tangentengleichung: y = -x

Gleichung der Wendetangente in $WP_2(2/2)$:
Tangentensteigung: $m = f_4'(2) = 3$
Einsetzen von $WP_2(2/2)$ und m = 3 in die Geradengleichung y = mx + c:
$2 = 3 \cdot 2 + c \Rightarrow c = -4$

Tangentengleichung: y = 3x – 4.

Schnittpunkt der Wendetangenten:
$-x = 3x - 4 \Leftrightarrow -4x = -4 \Leftrightarrow x = 1$
Einsetzen von x = 1 in eine Tangentengleichung liefert y = -1.
Der Schnittpunkt S der Wendetangenten hat die Koordinaten S(1/-1).

2.1.2
Die erste Winkelhalbierende besitzt die Gleichung y = x.
Die zweite Winkelhalbierende besitzt die Gleichung y = -x.



Die Gerade y = 3x – 4 entspricht der Tangente im Wendepunkt $WP_2(2/2)$ (siehe 2.1.1)

Zu berechnen ist die Fläche des Dreiecks $OS\,WP_2$.
Da das Dreieck in O rechtwinklig ist (die erste und zweite Winkelhabierende stehen senkrecht aufeinander), gilt für die Dreiecksfläche:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{OS} \cdot \overline{OWP_2}$$

Es gilt $\overline{OS} = \sqrt{(1-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{2}$

$$\overline{OWP_2} = \sqrt{(2-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{8}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = 2 \text{ FE}$$

Wie teilt K_4 diese Dreiecksfläche ?

$$A_{\text{oberer Teil des Dreiecks}} = \int_0^2 (x - f_4(x))dx = \int_0^2 (x + \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x)dx = \int_0^2 (2x + \frac{1}{4}x^4 - x^3)dx$$

$$= \left[x^2 + \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = 4 + \frac{32}{20} - 4 = 1{,}6 \text{ FE}$$

$$A_{\text{unterer Teil des Dreiecks}} = 2 - 1{,}6 = 0{,}4 \text{ FE}$$

Das Schaubild K_4 teilt das Dreieck im Verhältnis 1,6 : 0,4 = 4:1

2.1.3

Berechnung des Wendepunktes von K_t:

$$f_t(x) = -\frac{1}{t}x^4 + x^3 - x$$
$$f_t'(x) = -\frac{4}{t}x^3 + 3x^2 - 1$$
$$f_t''(x) = -\frac{12}{t}x^2 + 6x$$
$$f_t'''(x) = -\frac{24}{t}x + 6$$

$$f_t''(x) = 0 \Rightarrow x \cdot (-\frac{12}{t}x + 6) = 0$$

Mit dem Satz vom Nullprodukt folgt x = 0 oder $-\frac{12}{t}x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}t$

$$f_t'''(0) = 6 \neq 0 \Rightarrow WP_1(0/0)$$
$$f_t'''(\frac{1}{2}t) = -6 \neq 0 \Rightarrow WP_2(\frac{1}{2}t / f_t(\frac{1}{2}t))$$

(der konkrete y-Wert wird für die Steigungsberechnung nicht benötigt)

Steigung in WP_1: $f_t'(0) = -1 < 0$ dieser Wendepunkt hat immer eine negative Steigung !

Steigung in WP_2: $f_t'(\frac{1}{2}t) = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{4}t^2 - 1 = \frac{1}{4}t^2 - 1$

Für eine positive Steigung muss gelten: $\frac{1}{4}t^2 - 1 > 0 \Rightarrow t^2 > 4$

Daraus folgt t > 2 oder t < -2.
Da t > 0 vorausgesetzt ist, hat K_t für t > 2 eine positive Steigung.

2.1.4

Zwei Schaubilder f(x) und g(x) schneiden sich senkrecht, wenn folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:
Schnittbedingung: $f(x) = g(x)$
Senkrechter Schnitt: $f'(x) \cdot g'(x) = -1$

Berechnung der Schnittpunkte von K_t mit der Geraden y = -x:

$$-x = -\frac{1}{t}x^4 + x^3 - x \Leftrightarrow -\frac{1}{t}x^4 + x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3 \cdot (-\frac{1}{t}x + 1) = 0$$

Die Schnittstellen lauten x = 0 oder x = t.

Damit sich K_t und die Gerade y = -x (mit Steigung m = -1) bei x = 0 senkrecht schneiden, muss gelten: $f_t'(0) \cdot (-1) = -1 \Leftrightarrow -1 \cdot (-1) = -1$ ist eine falsche Aussage, somit kann an der Stelle x = 0 kein senkrechter Schnitt vorliegen.

Damit sich K_t und die Gerade y = -x (mit Steigung m = -1) bei x = t senkrecht schneiden, muss gelten: $f_t'(t) \cdot (-1) = -1 \Leftrightarrow (-t^2 - 1) \cdot (-1) = -1 \Leftrightarrow t^2 = -2$ besitzt keine Lösung, somit kann an der Stelle x = t auch kein senkrechter Schnitt vorliegen.
Es gibt somit keinen t-Wert, für den sich K_t und die Gerade y = -x senkrecht schneiden.

2.2

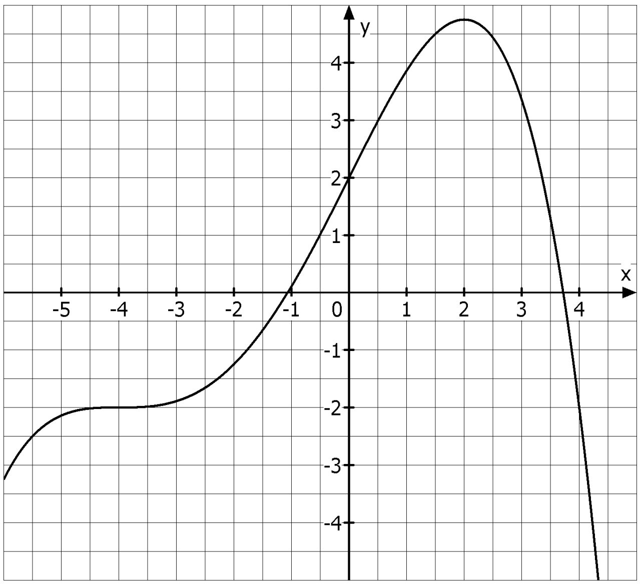
(1) h(0) = 2
Diese Eigenschaft bedeutet, dass das Schaubild durch den Punkt P(0/2) verläuft.

(2) $h'(x) = 0$ für x = -4 und für x = 2
Diese Eigenschaft bedeutet, dass das Schaubild an den Stelle x = -4 und x = 2 die Steigungszahl m = 0, also waagrechte Tangenten besitzt. Hierbei könnte es sich um Hoch-, Tief- oder Sattelpunkte handeln.

(3) $h'(x) \geq 0$ für $x \leq 2$
Für $x \leq 2$ sind die Tangentensteigungen positiv oder null. Das Schaubild ist folglich für $x \leq 2$ monoton wachsend.

(4) $h''(x) > 0$ für -4 < x < 0
Eine positive zweite Ableitung bedeutet, dass das Schaubild linksgekrümmt ist.
Somit stellt das Schaubild für -4 < x < 0 eine Linkskurve dar.

Mögliches Schaubild von h:



2.3.1

Es gilt: $g_3(x) = \cos(3x) + 6$

Die Berechnung der Hoch- und Wendepunkte könnte man zum einen mit Hilfe der üblichen Berechnungsmethode (Ableitungsfunktionen null setzen usw.) lösen.

Schneller behilft man sich mit folgender Überlegung.
Für die Funktion $y = \cos(x)$ gilt:
Bei (0/1), $(2\pi / 1)$, $(4\pi / 1)$,… befinden sich die Hochpunkte im Periodenabstand 2π

Das Schaubild von $g_3(x)$ besitzt die Periode $p = \frac{2}{3}\pi$. Außerdem ist das Schaubild um 6 Einheiten nach oben verschoben.

Damit erhält man als Hochpunkte für $g_3(x)$ im Bereich von $-0,5 \le x \le 2,5$:

$H_1(0/7)$; $H_2(\frac{2}{3}\pi/7)$

Für die Funktion $y = \cos(x)$ gilt:

Bei $(\frac{\pi}{2}/0)$, $(\frac{3}{2}\pi/0)$, $(\frac{5}{2}\pi/1)$,... befinden sich die Nullstellen und gleichzeitig die Wendepunkte im halben Periodenabstand π

Das Schaubild von $g_3(x)$ besitzt die Periode $p = \frac{2}{3}\pi$. Außerdem ist das Schaubild um 6 Einheiten nach oben verschoben.

Damit erhält man als Wendepunkte für $g_3(x)$ im Bereich von $-0,5 \le x \le 2,5$:

$W_1(\frac{\pi}{6}/6)$; $W_2(\frac{1}{2}\pi/6)$

2.3.2
Die Änderung des Parameters k hat zwei Auswirkungen auf das Schaubild von $g_k(x)$:

1.) Die Periode des Schaubildes ergibt sich als $p = \frac{2\pi}{k}$. Je größer der Parameter k ist, umso kleiner ist die Periode.
2.) Die Verschiebung des Schaubildes nach oben parallel zur y-Achse beträgt 2k. Je größer der Parameter k ist, umso größer ist die Verschiebung nach oben.

Die Periode soll nun 4 sein, das heißt $4 = \frac{2\pi}{k} \Leftrightarrow k = \frac{\pi}{2}$

Nullstellen von $g_k(x)$:
Das Schaubild besitzt die Amplitude 1, das heißt das Schaubild darf maximal um 1 Einheit nach oben verschoben werden, ansonsten schneidet das Schaubild nicht mehr die x-Achse:

$2k \le 1 \Leftrightarrow k \le 0,5$
Da laut Voraussetzung k > 0 gilt muss also $0 < k \le 0,5$ gelten.