Abiturprüfung Mathematik 2008 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien ohne TG – Analysis, Aufgabe 1

1
Für jedes $t \in R$ ist die Funktion f_t gegeben durch
$f_t(x) = -x^3 + tx^2$ mit $x \in R$.

Das Schaubild von f_t heißt K_t.

1.1 (6 Punkte)
Zeigen Síe, dass f_3 für $0 \le x \le 2$ monoton wächst.
Für welche Werte von x ist K_3 linksgekrümmt ? Begründen Sie Ihre Antwort.

1.2 (10 Punkte)
Die Parallele zur x-Achse durch den Hochpunkt von K_3 begrenzt mit K_3 eine Fläche, die von der y-Achse in zwei Teilflächen zerlegt wird.
Zeichnen Sie K_3 und kennzeichnen Sie diese Flächen.
Berechnen Sie das Verhältnis der Inhalte der beiden Teilflächen.

1.3 (6 Punkte)
Die Gerade g hat die Gleichung $y = m \cdot x$.
Zeigen Sie, dass es nur ein positives m gibt, so dass g und K_3 genau zwei gemeinsame Punkte besitzen. Geben Sie deren Koordinaten an.

1.4 (5 Punkte)
Bestimmen Sie den Punkt auf K_3, der von Q(2/3) den kleinsten Abstand hat. Berechnen Sie diesen kleinsten Abstand.

1.5 (6 Punkte)
Bestimmen Sie die Ortskurve der Wendepunkte aller K_t.

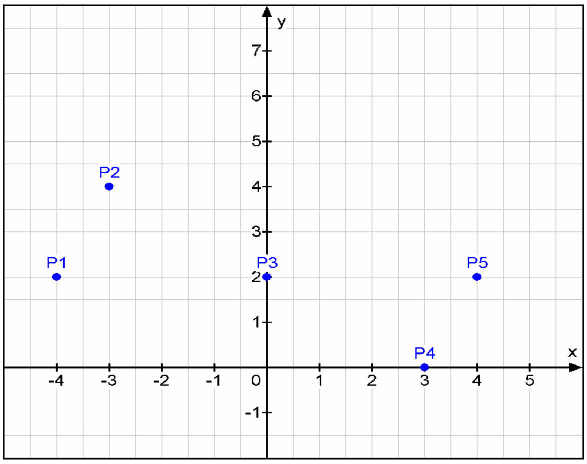
2
Die Funktion h ist gegeben durch $h(x) = x + e^{2-x}$; $x \in R$.

2.1 (3 Punkte)
Skizzieren Sie das Schaubild von h. Geben Sie die Gleichung der Asymptote an.

2.2 (9 Punkte)
Das Schaubild von h, die y-Achse, die Gerade mit der Gleichung y = x und die Gerade mit der Gleichung x = a mit a > 0 begrenzen eine Fläche.
Wie groß ist der Inhalt der Fläche für a = 6 ?
Weisen sie nach, dass es keinen Wert für a gibt, für den die Fläche den Inhalt 8 hat.

Abiturprüfung Mathematik 2008 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien ohne TG – Analysis, Aufgabe 2

2.1 (6 Punkte)
Die in der Abbildung dargestellten Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 und P_5 haben ganzzahlige Koordinaten.
Begründen Sie, dass man durch die Punkte sowohl das Schaubild einer Polynomfunktion dritten Grades als auch das Schaubild einer trigonometrischen Funktion legen kann.



2.2
Gegeben sind für $t \in \mathbb{R}_+^*$ die Funktionen f_t und g_t durch

$$f_t(x) = \frac{t}{8}x^3 - \frac{3t}{2}x^2 + 4tx + 2 \ ; \quad x \in [0\,;\,8]$$

$$g_t(x) = 2 + 3t \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) ; \quad x \in [0\,;\,8]$$

Der Graph von f_t heißt K_t, der Graph von g_t heißt G_t.

2.2.1 (11 Punkte)
Zeichnen Sie K_1.
Zeigen Sie, dass alle K_t genau drei gemeinsame Punkte haben.
Geben Sie deren Koordinaten an. Ermitteln Sie die Extremstellen von f_t.

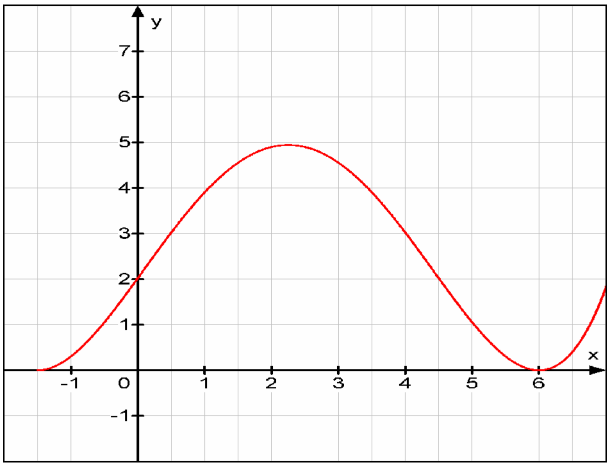
2.2.2 (6 Punkte)
Zeichnen Sie G_1 in das Koordinatensystem aus 2.2.1 ein.
Berechnen Sie den Inhalt A_1 der Fläche, die von K_1 und G_1 für $0 \le x \le 2$ eingeschlossen wird.

2.2.3 (6 Punkte)
$x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ sind die einzigen Schnittstellen von K_t und G_t in [0 ;2].
Begründen Sie, dass K_t für $0 < x < 2$ oberhalb von G_t verläuft.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von K_t und G_t für $0 \le x \le 2$ eingeschlossen wird.
Wie lässt sich der Inhalt dieser Fläche mit Hilfe von A_1 aus Teilaufgabe 2.2.2 bestimmen ?

2.2.4 (6 Punkte)
Die Gerade mit der Gleichung x = u (0 < u < 2) schneidet K_1 im Punkt A und G_1 im Punkt B.
Die Punkte A, B und C(4/2) sind die Eckpunkte eines Dreiecks.
Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt dieses Dreiecks für alle u kleiner als 1 ist.

2.2.5 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass für $x \in [0\,;\,8]$ der Mittelwert von $f_1(x)$ genau so groß ist wie der Mittelwert von $g_1(x)$.

2.3 (6 Punkte)
Die Abbildung zeigt den Graph der Ableitungsfunktion h' einer Funktion h.



Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Entscheidungen.

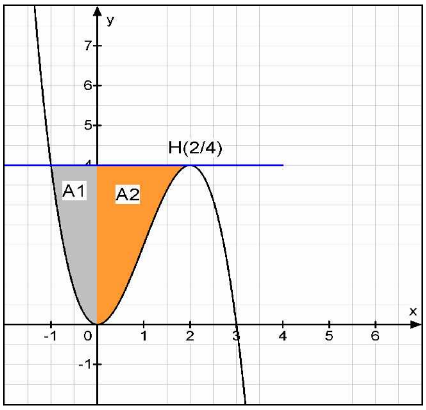
- Die Funktion h hat bei x = 6 eine Extremstelle.
- Die Tangente an den Graphen von h im Schnittpunkt mit der y-Achse ist parallel zur ersten Winkelhalbierenden.
- Der Graph der Stammfunktion von h ist für alle $x \in [-1\,;\,8]$ linksgekrümmt.

Abiturprüfung Mathematik 2008 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien ohne TG – Analysis, Lösung Aufgabe 1

1.1
Es gilt $f_3(x) = -x^3 + 3x^2$ und $f_3'(x) = -3x^2 + 6x = 3x \cdot (-x + 2)$
Für $0 \le x \le 2$ gilt $f_3'(x) \ge 0$ und daraus folgt, dass f_3 monoton wächst.

Das Schaubild von K_3 ist linksgekrümmt, wenn $f_3''(x) > 0$ ist.
$f_3''(x) = -6x + 6 > 0 \Rightarrow x < 1$
Für x < 1 ist das Schaubild von K_3 linksgekrümmt.

1.2



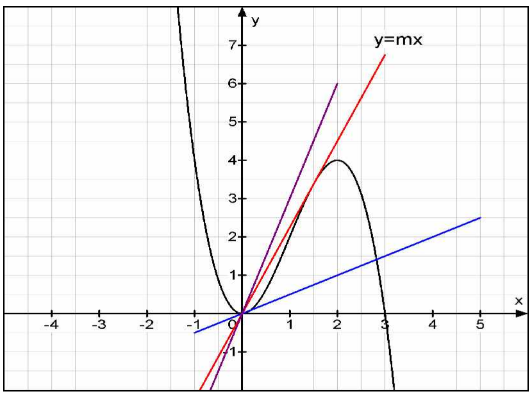
Mit dem GTR ergibt sich als Hochpunkt H(2/4).
Die Parallele zur x-Achse durch H besitzt die Gleichung y = 4.

$$A1 = \int_{-1}^{0} (4 - (-x^3 + 3x^2))dx = \int_{-1}^{0} (4 + x^3 - 3x^2)dx = \left[4x + \frac{1}{4}x^4 - x^3\right]_{-1}^{0} = 0 - (-4 + \frac{1}{4} + 1) = \frac{11}{4}$$

$$A2 = \left[4x + \frac{1}{4}x^4 - x^3\right]_0^2 = 8 + 4 - 8 = 4$$

Flächenverhältnis: $A1 : A2 = \frac{11}{4} : 4 = 11 : 16$

1.3



Die Geraden $y = mx$ verlaufen alle durch den Ursprung.
Die gesuchte Gerade muss gemäß der Zeichnung eine Tangente an das Schaubild von f_3 sein.

Gesucht ist somit eine Tangente an das Schaubild von f_3, die durch den Ursprung verläuft.

Der Berührpunkt der Tangente habe die Koordinaten $B(u/f_3(u))$.
Die Tangentensteigung beträgt $m_{tang} = f_3'(u) = -3u^2 + 6u$.

Allgemeine Tangentengleichung in $B(u/f_3(u))$ mit der Punkt-Steigungs-Form:

$$y - f_3(u) = f_3'(u) \cdot (x-u) \Rightarrow y - (-u^3 + 3u^2) = (-3u^2 + 6u)(x-u)$$

Nun wird u so gewählt, dass der gegebene Tangentenpunkt O(0/0) auf der Gerade liegt.
Einsetzen von O(0/0) ergibt

$$0 - (-u^3 + 3u^2) = (-3u^2 + 6u)(0-u) \Rightarrow u^3 - 3u^2 = 3u^3 - 6u^2 \Rightarrow -2u^3 + 3u^2 = 0$$

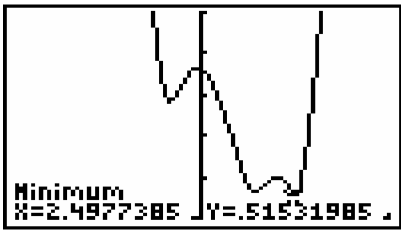
$$u^2(-2u+3) = 0 \Rightarrow u_1 = 0\ ,\ u_2 = 1{,}5$$

Aus u = 0 ergibt sich als Berührpunkt B(0/f(0)) = B(0/0) mit der Tangentengleichung y = 0.
Aus u = 1,5 ergibt sich als Berührpunkt $B(1{,}5/f(1{,}5)) = B(1{,}5/\frac{27}{8})$ mit $m = f_3'(1{,}5) = \frac{9}{4}$.

1.4
Gesucht ist der Punkt $P(u/f_3(u))$ auf dem Schaubild, der von Q(2/3) den kleinsten Abstand hat.
Der Abstand zweier Punkte kann mit Hilfe der Punktkoordinaten und dem Satz des Pythagoras berechnet werden:

$$\overline{PQ} = d(u) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} = \sqrt{(u-2)^2 + (-u^3 + 3u^2 - 3)^2}$$

Mit dem GTR ergibt sich als Minimum für u = 2,5 einen minimalen Abstand von 0,515.
Der Punkt auf dem Schaubild hat die Koordinaten $P(2{,}5/f_3(2{,}5)) = P(2{,}5/3{,}125)$



1.5
Berechnung der Wendepunkte von K_t:

$$f_t(x) = -x^3 + tx^2 \Rightarrow f_t'(x) = -3x^2 + 2tx \Rightarrow f_t''(x) = -6x + 2t \Rightarrow f_t'''(x) = -6$$

Bedingung für Wendepunkt: $f_t''(x) = 0 \Rightarrow -6x + 2t = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}t$

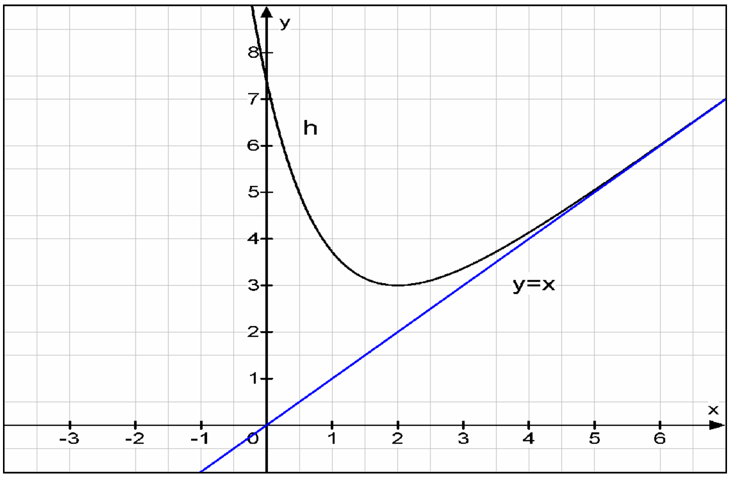
$$f_t'''(\frac{1}{3}t) = -6 \neq 0\text{, also } WP(\frac{1}{3}t / \frac{2}{27}t^3)$$

Ortskurve: $x = \frac{1}{3}t \Rightarrow t = 3x$

$$y = \frac{2}{27}t^3 = \frac{2}{27}(3x)^3 = 2x^3$$

Die Ortskurve der Wendepunkte lautet $y = 2x^3$.

2.1

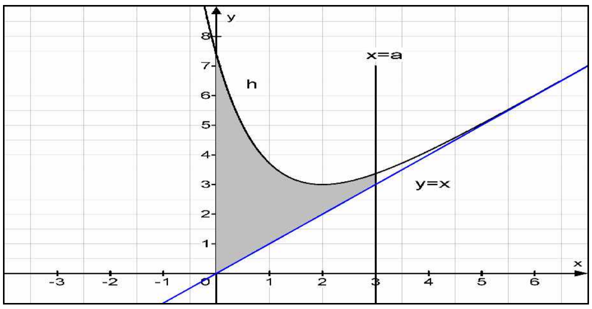


Asymptote von $h(x) = x + e^{2-x}$

Für $x \to \infty$ strebt $e^{2-x} \to 0$ und damit ist y = x die schiefe Asymptote.

Für $x \to -\infty$ existiert keine Asymptote, da $e^{2-x} \to \infty$ strebt.

2.2



Inhalt für a = 6: $A(6) = \int_0^6 (x + e^{2-x} - x)dx = \left[-e^{2-x}\right]_0^6 = -e^{-4} + e^2 = 7{,}37$ FE

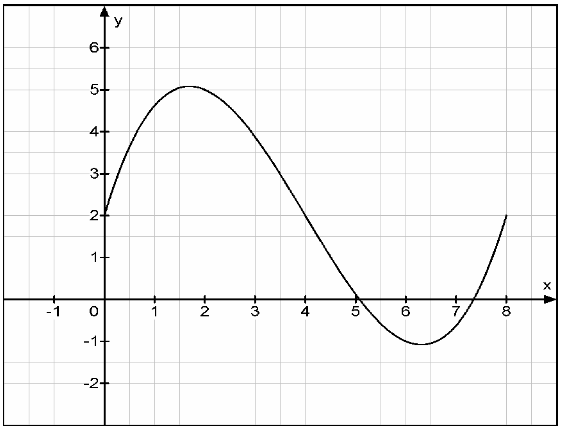
Für allgemeines a: $A(a) = \int_0^a (x + e^{2-x} - x)dx = \left[-e^{2-x}\right]_0^a = -e^{2-a} + e^2$

Da $e^2 = 7{,}39 < 8$ ist und der Termin e^{2-a} immer positiv ist, gilt A(a) < 8 für alle Werte von a.

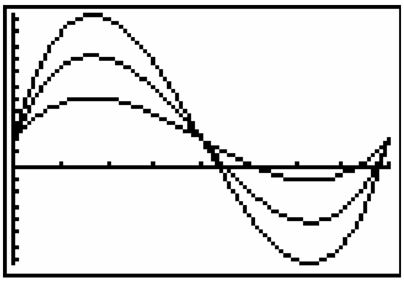
Abiturprüfung Mathematik 2008 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien ohne TG – Analysis, Lösung Aufgabe 2

2.1
Sowohl die Punkte P_1 und P_5 als auch die Punkte P_2 und P_4 liegen symmetrisch bezüglich des Punktes P_3.
Sowohl eine ganzrationale Funktion 3.Grades als auch eine Sinus- oder Kosinusfunktion haben punktsymmetrische Schaubilder, also können beide Kurven durch die gegebenen 5 Punkte laufen.

2.2.1



Gemeinsame Punkte der Scharkurven:



Das GTR-Schaubild lässt vermuten, dass sich die Scharkurven alle in den folgenden Punkten schneiden: P(0/2), Q(4/2) und R(8/2).

Um dies zu beweisen, werden die Punktkoordinaten in die Funktionsgleichung eingesetzt:

$f_t(0) = 2 \Rightarrow P(0/2)$ liegt auf allen Scharkurven

$f_t(4) = \frac{t}{8} \cdot 64 - \frac{3t}{2} \cdot 16 + 16t + 2 = 2 \Rightarrow Q(4/2)$ liegt auf allen Scharkurven

$f_t(8) = \frac{t}{8} \cdot 512 - \frac{3t}{2} \cdot 64 + 32t + 2 = 2 \Rightarrow R(8/2)$ liegt auf allen Scharkurven

Extremstellen:

$f_t'(x) = \frac{3}{8}tx^2 - 3tx + 4t = t \cdot (\frac{3}{8}x^2 - 3x + 4) = 0$

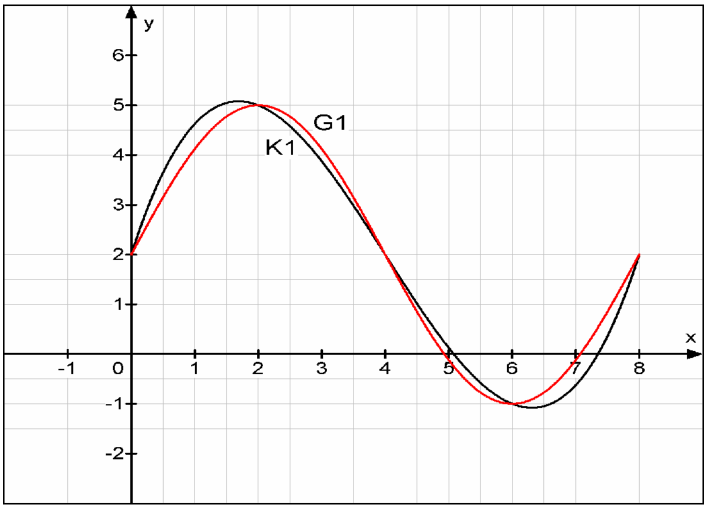
$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-6}}{3/4} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3/4} \Rightarrow x_1 = 6{,}309 \text{ und } x_2 = 1{,}691$$

$$f_t''(x) = \frac{3}{4}tx - 3t$$

$$f_t''(6{,}309) = \frac{3}{4}t \cdot 6{,}309 - 3t > 0 \Rightarrow TP$$

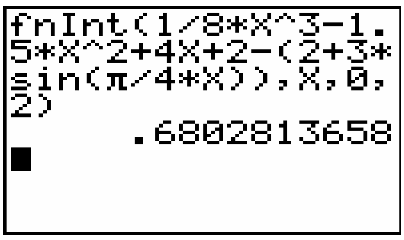
$$f_t''(1{,}691) = \frac{3}{4}t \cdot 1{,}691 - 3t < 0 \Rightarrow HP$$ also handelt es sich bei beiden Stellen um Extremstellen

2.2.2



Flächenberechnung mit dem GTR:

$$A = \int_0^2 (f_1(x) - g_1(x))dx = \int_0^2 (\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x + 2 - (2 + 3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right))dx = 0{,}68 \text{ FE}$$



2.2.3

Es sei bekannt das x = 0 und x = 2 die einzigen Schnittstellen von K_t und G_t im Intervall [0;2] sind.

Es muss also nur gezeigt werden, dass für irgendeinen x-Wert aus diesem Intervall $f_t(x) > g_t(x)$ ist.

Wähle z.B. x = 1: $f_t(1) = \frac{t}{8} - \frac{3t}{2} + 4t + 2 = \frac{21}{8}t + 2 = 2{,}625t + 2$ und $g_t(1) = 2 + 2{,}121t$

Man erkennt nun, dass $f_t(1) > g_t(1)$ für t > 0 gilt, was aber laut Aufgabe vorausgesetzt wird.

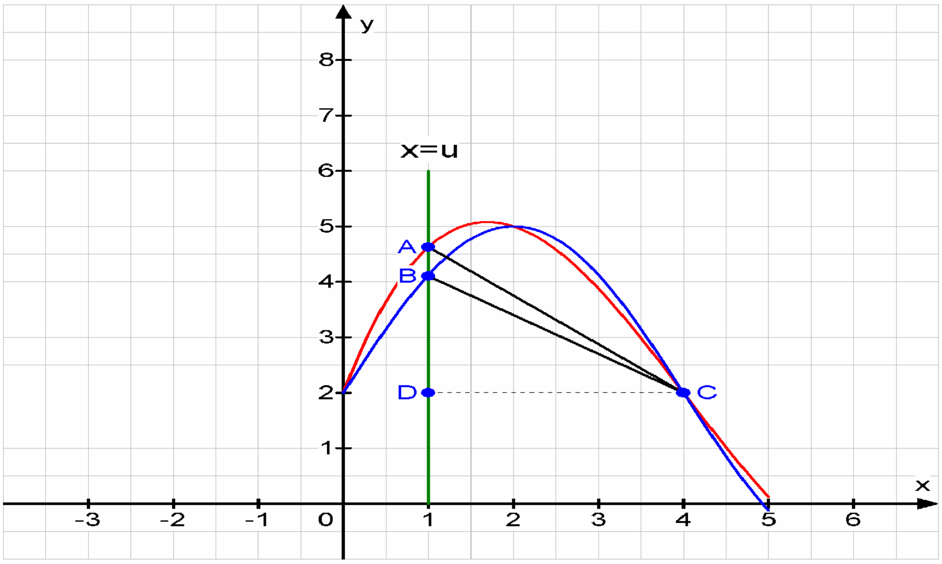
$$A = \int_0^2 (f_t(x) - g_t(x))dx = \int_0^2 (\frac{t}{8}x^3 - \frac{3}{2}tx^2 + 4tx + 2 - (2 + 3t \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right))dx$$

$$= \int_0^2 (\frac{t}{8}x^3 - \frac{3}{2}tx^2 + 4tx - 3t \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right))dx = \left[\frac{t}{32}x^4 - \frac{1}{2}tx^3 + 2tx^2 + \frac{12}{\pi}t \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{2}t - 4t + 8t + 0 - \frac{12}{\pi}t = 4{,}5t - \frac{12}{\pi}t = 0{,}68t \text{ FE}$$

Es gilt $A_t = t \cdot A_1$.

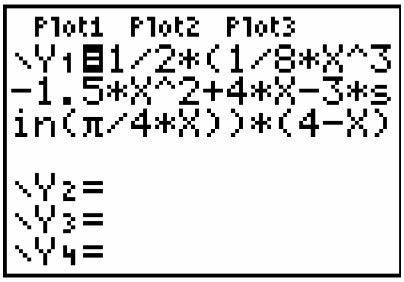
2.2.4

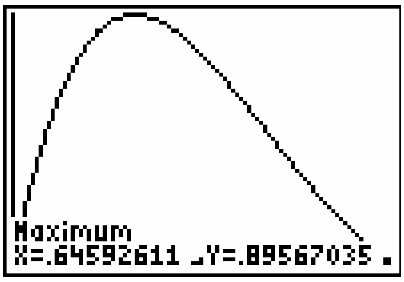


Dreiecksfläche = $\frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{CD} = \frac{1}{2} \cdot (f_1(u) - g_1(u)) \cdot (4 - u)$

$$A(u) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{8}u^3 - \frac{3}{2}u^2 + 4u - 3\sin\left(\frac{\pi}{4}u\right)\right) \cdot (4 - u) \quad \text{für } 0 \le u \le 2$$

Das Maximum der Funktion A(u) liefert der GTR:





Die Fläche wird maximal für u = 0,6459 und die maximale Dreiecksfläche beträgt 0,896.
Diese Fläche ist kleiner als 1.

2.2.5

Mittelwert von f_1: $m_f = \frac{1}{8-0} \cdot \int_0^8 f_1(x)dx = \frac{1}{8} \cdot 16 = 2$

Mittelwert von g_1: $m_g = \frac{1}{8-0} \cdot \int_0^8 g_1(x)dx = \frac{1}{8} \cdot 16 = 2$

2.3

- An der Stelle x = 6 besitzt die Ableitungsfunktion eine doppelte Nullstelle.
  D.h. das Schaubild von h besitzt an der Stelle x = 6 eine waagrechte Tangente, allerdings ist die Steigung links und rechts von x = 6 positiv.
  Das heißt an der Stelle x = 6 hat das Schaubild von h einen Sattelpunkt und keine Extremstelle. Die Aussage ist falsch.

- Im Schnittpunkt mit der y-Achse (an der Stelle x = 0) gilt $h'(0) = 2$. Die Tangente an der Stelle x = 0 an das Schaubild von h besitzt die Steigung 2. Da die erste Winkelhalbierende die Steigung 1 besitzt, liegt keine Parallelität vor.
  Die Aussage ist falsch.

- Die Stammfunktion H von h ist linksgekrümmt, wenn gilt: $H''(x) \geq 0$.
  Da $H''(x) = h'(x)$ gilt und das Schaubild von h' gemäß der Zeichnung immer oberhalb der x-Achse verläuft, gilt $h'(x) \geq 0$.
  Damit ist die Aussage wahr.