Abiturprüfung Mathematik 2009 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien ohne TG – Anwendungsorientierte Aufgabe
Teil 3, Aufgabe 1

1
Nach einem Unfall auf einer Autobahn wird die Überholspur gesperrt. Der Verkehr rollt auf der anderen Fahrspur mit verminderter Geschwindigkeit an der Unfallstelle vorbei. Infolge des hohen Verkehrsaufkommens bildet sich ein Stau mit zunächst zunehmender Länge. Nachdem die Unfallstelle geräumt ist, löst sich der Stau allmählich wieder auf.

Die Anzahl der Fahrzeuge, die pro Minute in den Staubereich hineinfahren, ist q_1.
Die Anzahl der pro Minute aus dem Staubereich herausfahrenden Fahrzeuge ist q_2.
Die folgende Tabelle zeigt den Fahrzeugfluss $q = q_1 - q_2$ in Abhängigkeit von der Zeit t. In einer vereinfachten Betrachtung gibt q die Zahl der Fahrzeuge pro Minute an, um die sich die Staulänge verändert.

t (Minuten)	0	5	10	15	20	30	40	50	60
q (Anzahl der Fahrzeuge pro Minute)	13,5	9,6	5	0	-5	-13,5	-17,5	-14	0

Zu Beginn der Messung stehen 405 Fahrzeuge im Stau, 60 Minuten später hat sich der Stau aufgelöst.

1.1
Stellen Sie q in Abhängigkeit von t grafisch dar.

Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Staulänge ihr Maximum erreicht, und den Zeitpunkt, zu dem sich der Stau am schnellsten abbaut.
Skizzieren Sie in einem Koordinatensystem die Anzahl der Fahrzeuge im Stau in Abhängigkeit von der Messzeit. Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise.
(8 Punkte)

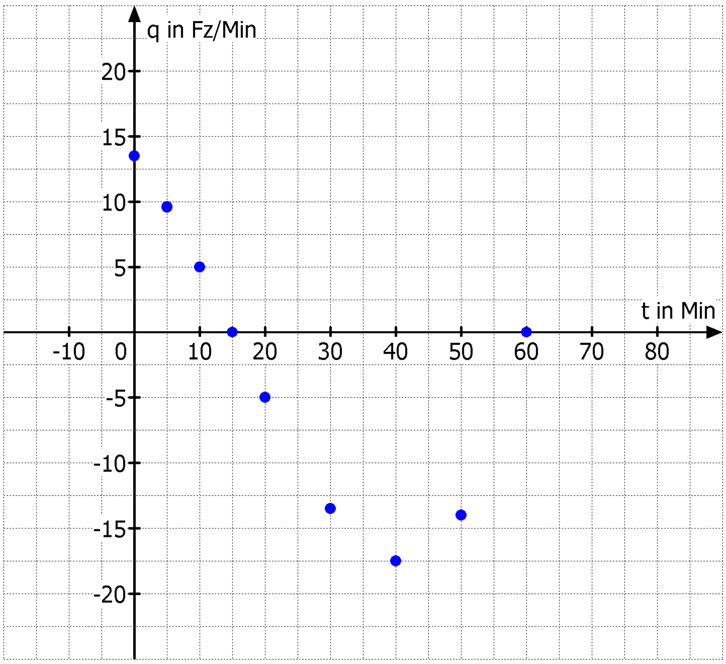
1.2
Die zeitliche Entwicklung des Fahrzeugflusses während der Messzeit kann durch folgende Funktion q beschrieben werden:
$q(t) = a \cdot (t+30)(t-b)(t-c)$ mit $t \in [0\ ;\ 60]$.
Bestimmen Sie die Konstanten a, b und c anhand der obigen Tabelle.
(3 Punkte)

1.3
Die zeitliche Entwicklung des Fahrzeugflusses wird durch die Funktion q mit
$q(t) = 0{,}0005t^3 - 0{,}0225t^2 - 0{,}675t + 13{,}5$; $t \in [0\ ;\ 60]$ beschrieben.
Wie viele Fahrzeuge stehen 40 Minuten nach Messbeginn im Stau ?
(4 Punkte)
----
15 Punkte

Abiturprüfung Mathematik 2009 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien ohne TG – Anwendungsorientierte Aufgabe
Gruppe III, Lösung Aufgabe 1

1.1

Grafische Darstellung von q:



Die Funktion q(t) gibt die Veränderung der Staulänge an.
Wenn Q(t) die Anzahl der Fahrzeuge im Stau angibt, dann gilt $Q'(t) = q(t)$.

Die Staulänge ist maximal, wenn Q(t) einen Hochpunkt besitzt.
Dies ist genau dann der Fall, wenn q(t) eine Nullstelle besitzt mit einem Vorzeichenwechsel von + nach - .
Dies ist laut Schaubild zum Zeitpunkt t = 15 Minuten der Fall.

Der Stau wird am schnellsten abgebaut, wenn die Änderungsrate q möglichst klein ist, also zum Zeitpunkt t = 40 Minuten, bei dem pro Minute der Stau um 17,5 Fahrzeuge verkürzt wird.

Die Anzahl der Fahrzeuge im Stau zum Zeitpunkt t werde beschrieben durch die Funktion Q(t).

Um die Funktionsgleichung von Q(t) zu erhalten, muss zunächst die Funktionsgleichung von q(t) bestimmt werden.

Dies erfolgt mit Hilfe der Regressionsrechnung.
Anhand des Punktdiagramms kann man vermuten, dass sich q(t) als Funktionsgleichung 3.Grades darstellen lässt. Daher wird die kubische Regression verwendet.
Diese wird mit dem GTR durchgeführt.

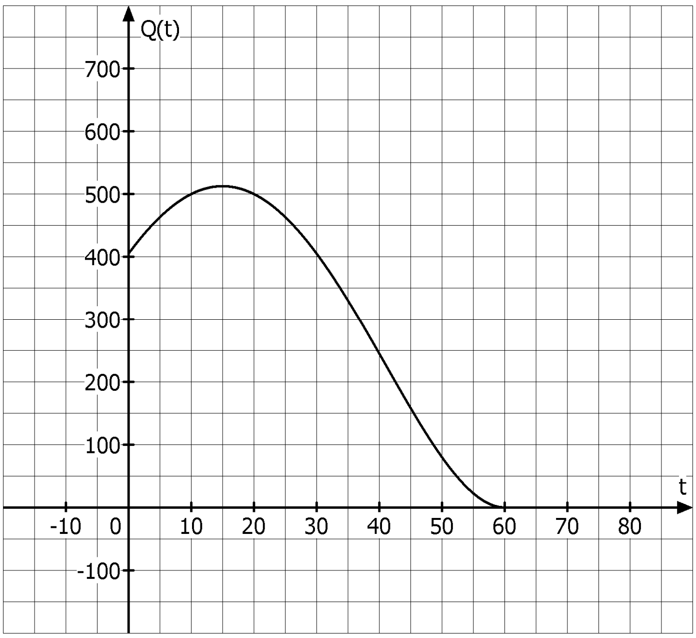
Das Ergebnis der kubischen Regression ergibt die Funktionsgleichung lautet
$q(t) = 0{,}0005t^3 - 0{,}0225t^2 - 0{,}6746t + 13{,}49$

Die Stammfunktion von q(t) lautet
$Q(t) = \frac{0{,}0005}{4}t^4 - \frac{0{,}0225}{3}t^3 - \frac{0{,}6746}{2}t^2 + 13{,}49t + C$ wobei C eine beliebige Zahl darstellt.
Da Q(0) = 405 Fahrzeuge entspricht folgt Q(0) = C = 405.

Damit lautet die Funktionsgleichung $Q(t) = \frac{0{,}0005}{4}t^4 - \frac{0{,}0225}{3}t^3 - \frac{0{,}6746}{2}t^2 + 13{,}49t + 405$

Wertetabelle:

t	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Q(t)	405,0	463,2	499,9	512,5	499,9	463,1	404,9	330,0	244,9	158,2	80,00	22,63	0,12



1.2

Es gilt $q(t) = a \cdot (t+30)(t-b)(t-c)$
Die Funktionsgleichung ist als Linearfaktorzerlegung vorgegeben.
Daraus ergibt sich, dass das Schaubild von q(t) die Nullstellen t = b und t = c besitzt.
Da anhand der Tabelle die Nullstellen von q(t) bei t = 15 und t = 60 sind, folgt daraus b = 15 und c = 60.

Daraus folgt $q(t) = a \cdot (t+30)(t-15)(t-60)$
Aus der Tabelle folgt $q(0) = 13{,}5 \Rightarrow 13{,}5 = a \cdot 30 \cdot (-15) \cdot (-60) \Rightarrow a = 0{,}0005$

Die Funktionsgleichung lautet $q(t) = 0{,}0005 \cdot (t+30)(t-15)(t-60)$

1.3

Die Anzahl der hinzukommenden Fahrzeuge in den ersten 40 Minuten ergibt sich mit Hilfe des Integrals $\int_0^{40} q(t)dt = -160$ (GTR).

Das heißt, die Anzahl der Fahrzeuge nimmt in den ersten 40 Minuten um 160 ab.

Die Anzahl der Fahrzeuge nach 40 Minuten beträgt daher 405 – 160 = 245.