Hauptprüfung Abiturprüfung 2014 (ohne CAS)

Baden-Württemberg

Analysis

Hilfsmittel: GTR, Formelsammlung

berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

August 2014

1.1

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist die Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3tx^2 + 4(t^2 - 1)x + 10t^2 \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

Das Schaubild von f_t ist K_t -

1.1.1
Bestimmen Sie die Schnittpunkte von K_1 mit den Koordinatenachsen.
Berechnen Sie von Hand die Koordinaten der Extrempunkte von K_1.
Zeichnen Sie K_1.

(9 Punkte)

1.1.2
Betrachten Sie nun Geraden mit negativer Steigung, die den Hochpunkt von K_1 enthalten und mit K_1 zwei Flächenstücke einschließen.

1.1.2.1
Zeichnen Sie eine dieser Geraden in das Koordinatensystem von 1.1.1 ein und geben Sie die Gleichung dieser Geraden an.

(2 Punkte)

1.1.2.2
Bestimmen Sie alle Werte der Steigungen dieser Geraden, sodass diese drei Eigenschaften erfüllt sind.

(4 Punkte)

1.1.3
Zeigen Sie, dass für alle t das Schaubild K_t zwei Extrempunkte besitzt.
Berechnen Sie die Ortskurve der Wendepunkte von K_t.

(8 Punkte)

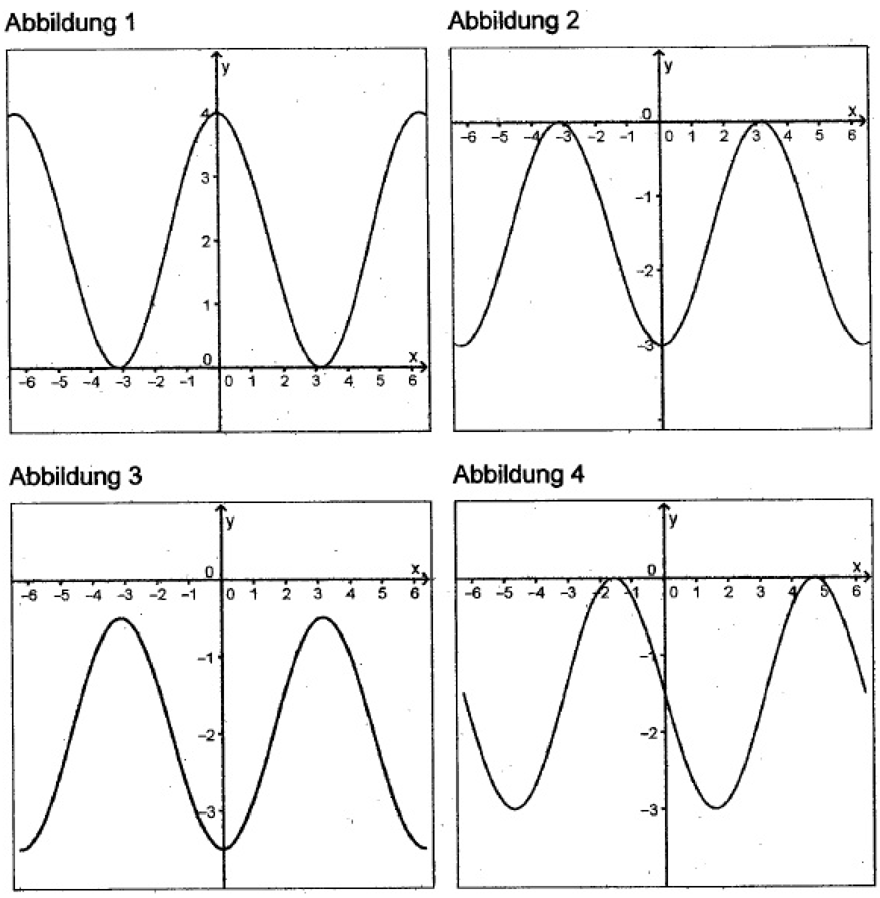
1.1.4
F_t ist eine Stammfunktion von f_t.
Untersuchen Sie, ob es einen Wert für t gibt, sodass F_t an der Stelle x = -4 eine Wendestelle besitzt und das Schaubild von F_t in S(0/20) die Steigung 10 hat.
Geben Sie gegebenenfalls diese Stammfunktion F_t an. (6 Punkte)

1.2

Für jedes $a \neq 0$ ist die Funktion g_a gegeben durch
$g_a(x) = a + a \cdot \cos(x)$ mit $x \in [-2\pi; 2\pi]$.

1.2.1
Prüfen Sie für jede der folgenden Abbildungen, ob die dort gezeigten Schaubilder zu einer Funktion g_a gehören können. Begründen Sie jeweils, und ermitteln Sie gegebenenfalls den zugehörigen Wert von a.

(6 Punkte)



1.2.2
Für $0 < u < \pi$ bilden die Punkte O(0/0), P(u/0), $Q(u / g_2(u))$ und R(0/1) ein Viereck.
Für welchen Wert von u wird der Flächeninhalt dieses Vierecks maximal ?

(5 Punkte)

1.2.3
Das Schaubild der Funktion g_a schließt mit der x-Achse eine Fläche ein. Diese Fläche rotiert um die x-Achse. Für welche Werte von a beträgt das Volumen des Drehkörpers 120 Volumeneinheiten ?

(5 Punkte)

Lösungen

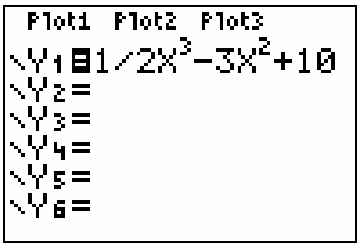
1.1.1

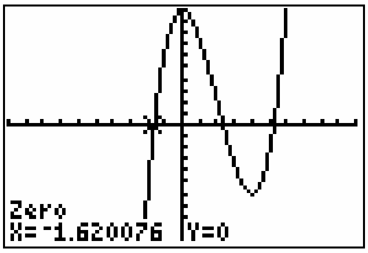
Es ist $f_1(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 10$

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen: $f_1(x) = 0$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_y(0/10)$

Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_1(-1{,}62/0)$ $N_2(2{,}34/0)$ $N_3(5{,}28/0)$





Extrempunkte von K_1:

Notwendige und hinreichende Bedingung: $f_1'(x) = 0$ und $f_1''(x) \neq 0$

Es ist $f_1'(x) = 1{,}5x^2 - 6x$ und $f_1''(x) = 3x - 6$

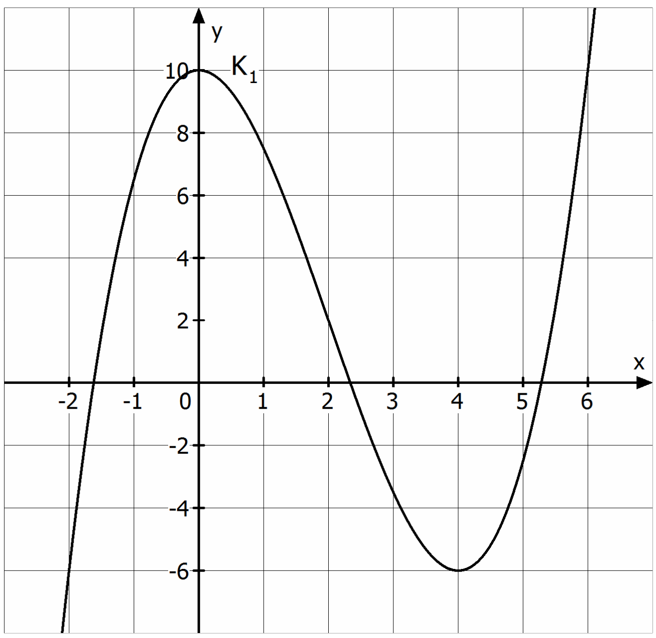
$f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow 1{,}5x^2 - 6x = 0 \quad \Leftrightarrow x \cdot (1{,}5x - 6) = 0$

Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt: x = 0 oder x = 4

$f_1''(0) = -6 < 0 \Rightarrow H(0/10)$

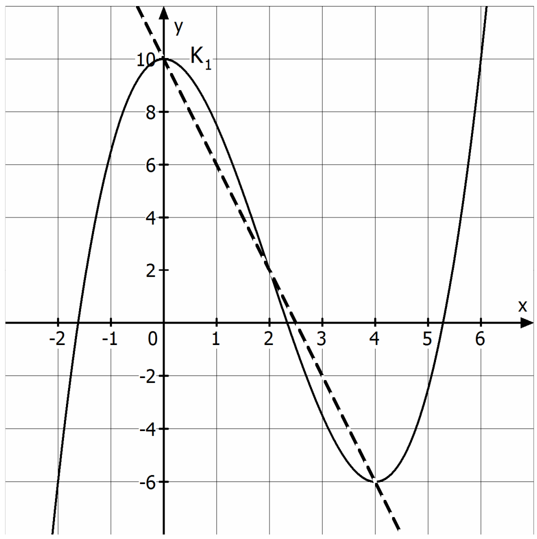
$f_1''(4) = 6 > 0 \Rightarrow T(4/f_1(4)) = T(4/-6)$

Zeichnung von K_1



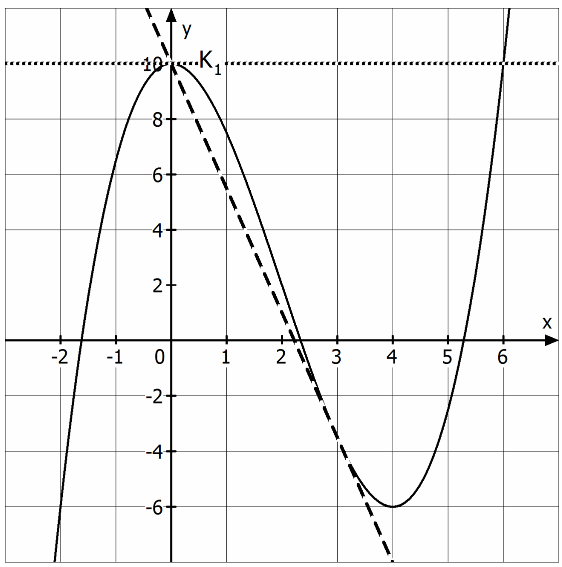
1.1.2.1

Die gestrichelte Gerade ist eine mögliche Gerade.



Gleichung der Gerade: $y = mx + c$
Es ist c = 10 (y-Achsenabschnitt) und m = -4 (Steigung).
Die Geradengleichung lautet $y = -4x + 10$

1.1.2.2



Die Steigungen der beiden eingezeichneten Geraden (gepunktete waagrechte Gerade im Hochpunkt und die gestrichelte Tangente an K_1) stellen die jeweiligen Grenzen des gesuchten Wertebereichs der Steigungen dar.

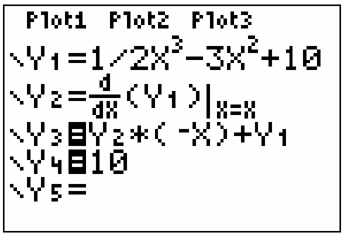
1.Bedingung: m < 0.

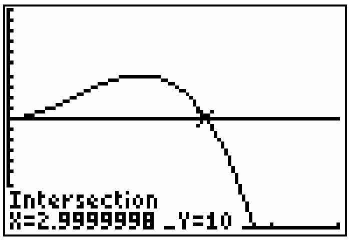
Für die 2.Bedingung muss von H(0/10) aus eine Tangente an das Schaubild K_1 gelegt werden.

Allgemeine Tangentenformel: $y = f'(u) \cdot (x-u) + f(u)$

Einsetzen des bekannten Tangentenpunktes H(0/10): $10 = f'(u) \cdot (-u) + f(u)$

Berechnung von u mit dem GTR:





Es ist u = 3.

Die Tangentensteigung ist $f'(3) = -4,5$

2.Bedingung: m > -4,5

Für die Steigung m der Geraden muss -4,5 < m < 0 gelten, damit alle drei Eigenschaften erfüllt sind.

1.1.3

$$f_t(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3tx^2 + 4(t^2-1)x + 10t^2$$

Ableitungsfunktionen: $f_t'(x) = 1{,}5x^2 - 6tx + 4(t^2-1)$ und $f_t''(x) = 3x - 6t$ und $f_t'''(x) = 3$

Nachweis, dass K_t zwei Extrempunkte besitzt:

Notwendige und hinreichende Bedingung: $f_t'(x) = 0$ und $f_t''(x) \neq 0$

$$f_t'(x) = 0 \Rightarrow 1{,}5x^2 - 6tx + 4(t^2-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{6t \pm \sqrt{36t^2 - 4 \cdot 1{,}5 \cdot 4(t^2-1)}}{3} = \frac{6t \pm \sqrt{12t^2+24}}{3}$$

Das Schaubild der Ableitungsfunktion stellt eine nach oben geöffnete Parabel dar.

Diese Parabel besitzt zwei Nullstellen, da die Diskriminante $12t^2 + 24$ positiv ist.

Da die Nullstellen der Parabel jeweils einen Vorzeichenwechsel besitzen, müssen an diesen beiden Stellen Extrempunkte existieren.

Berechung der Wendepunkte:

Notwendige und hinreichende Bedingung: $f_t''(x) = 0$ und $f_t'''(x) \neq 0$

$f_t''(x) = 0 \Rightarrow 3x - 6t = 0 \Leftrightarrow x = 2t$

$f_t'''(2t) = 3 \neq 0 \Rightarrow$ Wendestelle bei x = 2t

$$f_t(2t) = \frac{1}{2} \cdot 8t^3 - 3t \cdot 4t^2 + 4(t^2-1) \cdot 2t + 10t^2 = 4t^3 - 12t^3 + 8t^3 - 8t + 10t^2 = -8t + 10t^2$$

Koordinaten des Wendepunktes: $W(2t / -8t + 10t^2)$

Ortskurve der Wendepunkte:
$x = 2t$ (*) und $y = -8t + 10t^2$ (**)

Aus (*) folgt $t = 0,5x$
Einsetzen in (**): $y = -4x + 10 \cdot (0,5x)^2 \Rightarrow y = -4x + 2,5x^2$

1.1.4

Allgemeine Stammfunktion: $F_t(x) = \frac{1}{8}x^4 - tx^3 + 2(t^2-1)x^2 + 10t^2 \cdot x + C$
Folgende Bedingungen sollen erfüllt werden:
$F_t(0) = 20 \Rightarrow C = 20$
$F_t'(0) = f_t(0) = 10 \Rightarrow 10t^2 = 10 \Rightarrow t = \pm 1$
$F_t''(-4) = f_t'(-4) = 0 \Rightarrow 24 + 24t + 4 \cdot 0 = 0 \Rightarrow t = -1$

Die Bedingungen sind für t = -1 und C = 20 erfüllt:

Die gesuchte Stammfunktion lautet $F_{-1}(x) = \frac{1}{8}x^4 + x^3 + 10x + 20$

1.2.1

Die Funktion $g_a(x) = a + a \cdot \cos(x)$ ist eine Kosinusfunktion mit der Amplitude a, die um a Einheiten in y-Richtung verschoben ist.

Abbildung 1:
Das Schaubild hat die Amplitude 2 und ist um 2 Einheiten nach oben verschoben.
Für a = 2 gehört die Abbildung zu der Funktion g_a.

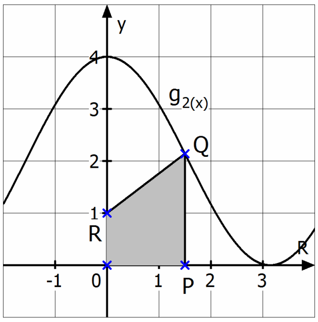
Abbildung 2:
Das Schaubild hat die Amplitude 1,5 und ist um 1,5 Einheiten nach unten verschoben.
Außerdem wurde die Kosinusfunktion an der x-Achse gespiegelt.
Für a = -1,5 gehört die Abbildung zu der Funktion g_a.

Abbildung 3:
Das Schaubild hat die Amplitude 1,5 und ist um 2 Einheiten nach unten verschoben.
Außerdem wurde die Kosinusfunktion an der x-Achse gespiegelt.
Die Funktionsgleichung lautet $y = -2 - 1,5 \cdot \cos(x)$ und gehört nicht zu der Funktion g_a.

Abbildung 4:
Das Schaubild hat die Amplitude 1,5 und ist um 1,5 Einheiten nach unten verschoben.
Allerdings handelt es sich um eine Sinusfunktion (Nullstelle im Ursprung nach Verschiebung um 1,5 Einheiten nach oben), so dass diese nicht zu der Funktion g_a gehört.

1.2.2

Es ist $g_2(x) = 2 + 2\cos(x)$ (entspricht Abbildung 2)

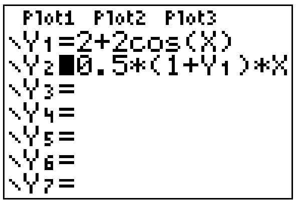


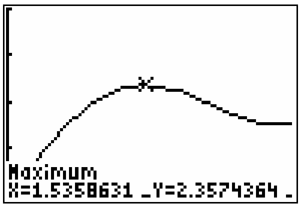
Das Viereck ist ein Trapez.

$A_{Trapez} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{OR} + \overline{PQ}) \cdot \overline{OP}$ mit $\overline{OR} = 1$ und $\overline{OP} = u - 0 = u$ und $\overline{PQ} = g_2(u) - 0 = g_2(u)$

$A(u) = \frac{1}{2} \cdot (1 + f(u)) \cdot u$ mit $0 < u < \pi$

Gesucht ist das absolute Maximum von A(u):





A(u) hat ein lokales Maximum bei u = 1,536 mit A(1,536) = 2,357.

Randuntersuchung: Es ist A(0) = 0 und $A(\pi) = 1{,}57 < 2{,}357$

Somit existiert bei u = 1,536 ein absolutes Maximum.

Die maximale Fläche beträgt 2,357FE.

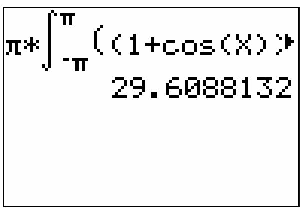
1.2.3

Zunächst benötigt man die Schnittpunkte von g_a mit der x-Achse:

$g_a(x) = 0 \Rightarrow a + a\cos(x) = 0 \Rightarrow \cos(x) = -1 \Rightarrow x = -\pi$ und $x = \pi$ im Lösungsintervall $[-2\pi; 2\pi]$

Volumen des Drehkörpers =

$$\pi \cdot \int_{-\pi}^{\pi} (a + a\cos(x))^2 dx = \pi \cdot \int_{-\pi}^{\pi} a^2 \cdot (1 + \cos(x))^2 dx = a^2 \cdot \pi \cdot \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos(x))^2 dx \approx a^2 \cdot 29{,}6$$



Es soll gelten: $a^2 \cdot 29{,}6 = 120 \Leftrightarrow a \approx \pm 2{,}01$