Hauptprüfung Abiturprüfung 2016 (ohne CAS)

Baden-Württemberg

Lineare Optimierung

Hilfsmittel: GTR, Formelsammlung

berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Mai 2016

1

Eine Fahrradmanufaktur stellt zwei Typen F1 und F2 von Fahrrädern aus Spezialstahl her. Für F1 werden 11 kg Spezialstahl je Stück, für F2 10 kg je Stück benötigt. Monatlich können höchstens 1200 Stück von F1 und 1600 Stück von F2 produziert werden. Der Stückpreis beträgt 900 € bei F1 und 600 € bei F2.

1.1

Aus absatztechnischen Gründen darf die Stückzahl von F1 40 % der Stückzahl von F2 nicht überschreiten. Der Zulieferer für Spezialstahl kann pro Monat bis zu
18000 kg liefern.
Ermitteln Sie graphisch die Stückzahlen von F1 und F2, für die der Umsatz maximal wird.
Geben Sie das Umsatzmaximum an.

(7 Punkte)

1.2

Die Manufaktur hat einen weiteren Zulieferer für Stahl gefunden und will ein drittes Fahrrad anbieten, für das 15 kg Stahl je Stück benötigt werden. Mit Hilfe des Simplexverfahrens möchte das Unternehmen die für den Umsatz optimalen Produktionszahlen ermitteln. Die folgende Tabelle zeigt das Anfangstableau für das Rechenverfahren.

x	y	z	t	u	v	w	b_i
1	0	0	1	0	0	0	1200
0	1	0	0	1	0	0	1600
0	0	1	0	0	1	0	2000
11	10	15	0	0	0	1	45000
900	600	1200	0	0	0	0	U

x ist die Anzahl der Fahrräder F1, y die Anzahl der Fahrräder F2 und z die Anzahl der Fahrräder F3. Die Schlupfvariablen heißen t, u, v und w.

1.2.1

Beschreiben Sie die Nebenbedingungen, welche bei der Produktion der drei Fahrradtypen F1, F2 und F3 jeden Monat eingehalten werden müssen.
Interpretieren Sie die letzte Zeile dieses Tableaus.
Ermitteln Sie das nächste Tableau mit Hilfe des Simplexverfahrens.

(5 Punkte)

1.2.2

Bei der Berechnung des maximalen Umsatzes erhält man folgendes Tableau:

x	y	z	t	u	v	w	b_i
1	0	0	1	0	0	0	1200
0	0	0	1,1	1	1,5	-0,1	1420
0	0	1	0	0	1	0	2000
0	1	0	-1,1	0	-1,5	0,1	180
0	0	0	-240	0	-300	-60	U - a

Woran erkennt man, dass es sich hier um ein mögliches Endtableau handelt ?
Geben Sie die Stückzahlen für F1, F2 und F3 an, die zu einem maximalen Umsatz führen.

Wie groß ist dieser Umsatz ?

(3 Punkte)

Lösungen

1.1

x = Anzahl der Fahrräder F1
y = Anzahl der Fahrräder F2

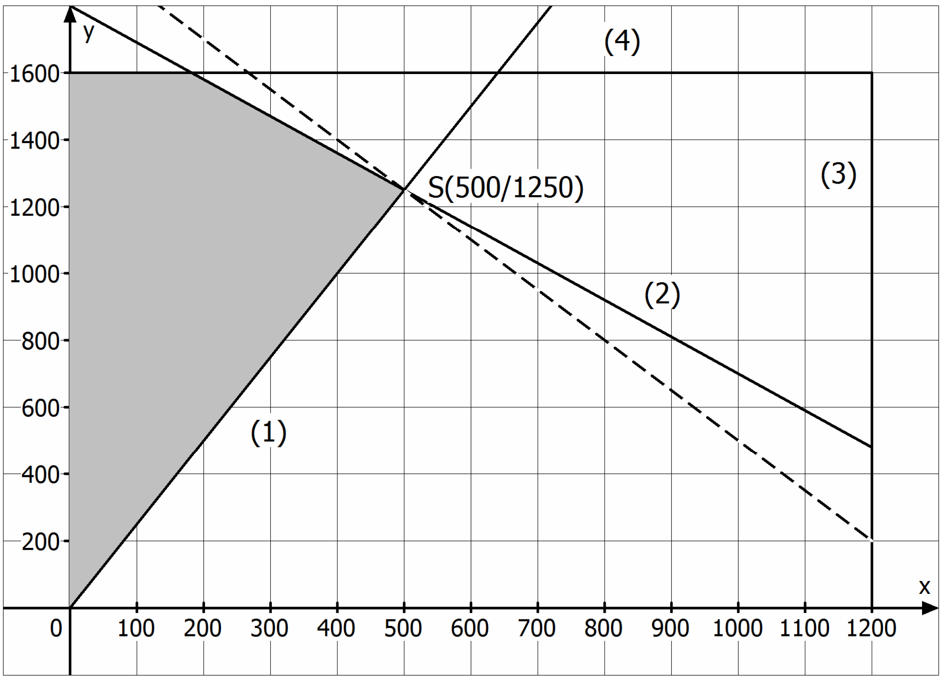
Es gelten die Nichtnegativitätsbedingungen: $x, y \geq 0$

Es ergeben sich die Bedingungen:

(1) absatztechnische Gründe: $x \leq 0{,}4 \cdot y \Rightarrow y \geq 2{,}5x$
(2) pro Monat 18.000 kg Stahl: $11x + 10y \leq 18000 \Rightarrow y \leq -1{,}1x + 1800$
(3) $x \leq 1200$
(4) $y \leq 1600$
(5) Zielfunktion (Umsatz): $U = 900x + 600y$ minimieren

$$\Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{600}U$$

Grafische Darstellung:



Die Umsatz ist maximal, wenn die gestrichelte Zielgerade durch den Punkt S(500/1250) verläuft.
Somit gilt x = 500 und y = 1250.
Die umsatzmaximale Zusammensetzung besteht aus 500 Fahrrädern vom Typ F1 und 1250 Fahrrädern vom Typ F2.
Der maximale Umsatz beträgt $U = 900 \cdot 500 + 600 \cdot 1250 = 1.200.000€$

1.2.1

Folgende Nebenbedingungen ergeben sich aus dem gegebenen Tableau:

Zeile 1: $x \le 1200$ (von F1 können maximal 1200 Stück produziert werden)
Zeile 2: $y \le 1600$ (von F2 können maximal 1600 Stück produziert werden)
Zeile 3: $z \le 2000$ (von F3 können maximal 2000 Stück produziert werden)
Zeile 4: $11x + 10y + 15z \le 45000$
(von F1 werden 11 kg Spezialstahl je Stück, von F2 10 kg und von F3 15 kg benötigt.
Pro Monat stehen 45000 kg Spezialstahl zur Verfügung)

Letzte Zeile des Tableaus:
Der Stückpreis für F1 beträgt 900€, für F2 600 € und für F3 1200€.
Der Umsatz soll maximiert werden.

Vorgegebenes Tableau:

x	y	z	t	u	v	w	b_i	Quotient
1	0	0	1	0	0	0	1200	-
0	1	0	0	1	0	0	1600	-
0	0	1	0	0	1	0	2000	2000
11	10	15	0	0	0	1	45000	3000
900	600	1200	0	0	0	0	U	

Die 1.Spalte ist die Pivotspalte.
Da die 3.Zeile den geringsten Quotient darstellt, ist die 3.Zeile die Pivotzeile.

Nummer	x	y	z	t	u	v	w	b_i	Umformung
(1)	1	0	0	1	0	0	0	1200	
(2)	0	1	0	0	1	0	0	1600	
(3)	0	0	**1**	0	0	1	0	2000	
(4)	11	10	15	0	0	0	1	45000	$(4) - 15 \cdot (3)$
(5)	900	600	1200	0	0	0	0	U	$(5) - 1200 \cdot (3)$

Nächstes Tableau:

Nummer	x	y	z	t	u	v	w	b_i
(1)	1	0	0	1	0	0	0	1200
(2)	0	1	0	0	1	0	0	1600
(3)	0	0	**1**	0	0	1	0	2000
(4)	11	10	0	0	0	-15	1	15000
(5)	900	600	0	0	0	-1200	0	U-2400000

1.2.2

Es handelt sich um ein mögliches Endtableau, da in der letzten Zeile keine positiven Zahlen mehr stehen.

Der maximale Umsatz wird erreicht für
x = 1200 Stück (Typ F1)
y = 180 Stück (Typ F2)
z = 2000 Stück (Typ F3)

Der maximale Umsatz ist $U = 900 \cdot 1200 + 600 \cdot 180 + 1200 \cdot 2000 = 3.588.000€$