Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2011 Teil 4, Lineare Optimierung, Aufgabe 2
Baden-Württemberg

2.1
Auf den Malediven soll eine neue Hotelanlage entstehen. Die Investoren wollen eine Fläche von 6400 m² mit maximal 90 Bungalows bebauen. Zur Auswahl stehen folgende Bungalow-Typen:

	Bungalow für 2 Personen	Bungalow für 4 Personen	Bungalow für 6 Personen
Größe	60 m²	80 m²	90 m²
Einnahmen pro Tag	45 €	60 €	90 €

Das geplante hoteleigene Restaurant fasst 300 Personen, so dass Bungalows für eine Gästezahl von maximal 300 Personen gebaut werden sollen.

2.1.1
Die Investoren planen in einem ersten Szenario nur Bungalows für 2 und für 4 Personen.
Zeichnen Sie das Planungsvieleck.
Wie viele Bungalows für 2 Personen können gebaut werden, wenn die Einnahmen maximiert werden sollen ? (6 Punkte)

2.1.2
In einem zweiten Szenario sind neben den 2- und 4-Personen-Bungalows noch 6-Personen-Bungalows zugelassen. Alle anderen Bedingungen bleiben gleich.
Bestimmen Sie mittels des Simplexverfahrens, wie viele Bungalows der verschiedenen Größen gebaut werden müssen, um möglichst hohe Einnahmen zu erzielen. (4 Punkte)

2.2
Für $k \in \mathbb{R}$ ist das folgende lineare Gleichungssystem gegeben:

$$\begin{array}{rrrcl} 4x_1 & +2x_2 & +(2k-4)x_3 & = & 2 \\ 12x_1 & -6x_2 & +(3k-3)x_3 & = & 3k \\ & & (k^2-k-6)x_3 & = & k^2-4 \end{array}$$

Untersuchen Sie, für welche Werte von k das lineare Gleichungssystem unlösbar, mehrdeutig lösbar bzw. eindeutig lösbar ist. (5 Punkte)

----
15 Punkte

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2011 Teil 4, Lineare Optimierung, Lösung zu Aufgabe 2
Baden-Württemberg

2.1.1

x = Anzahl der 2-Personen-Bungalows
y = Anzahl der 4-Personen-Bungalows

Es gelten folgende Einschränkungen:

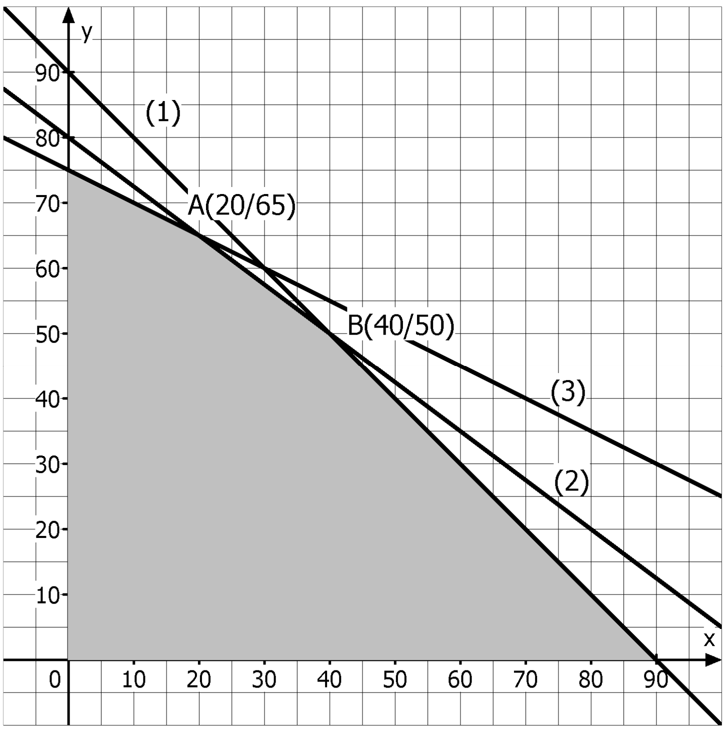
$$\begin{array}{rrcr} x & +y & \leq & 90 \\ 60x & +80y & \leq & 6400 \\ 2x & +4y & \leq & 300 \end{array}$$

Zu maximieren sind die Einnahmen E = 45x + 60y

Um das Planungsvieleck zu zeichnen, müssen die Ungleichungen jeweils nach y aufgelöst werden:

$$\begin{array}{llll} (1) & y & \leq & 90 - x \\ (2) & y & \leq & 80 - \frac{3}{4}x \\ (3) & y & \leq & 75 - 0{,}5x \end{array}$$

Planungsvieleck:



Um die maximalen Einnahmen zu bestimmen, werden die einzelnen Eckpunkte des Planungsvielecks in die Erlösformel eingesetzt.

Punkt P(0/75): $E = 45 \cdot 0 + 60 \cdot 75 = 4500$ Euro
Punkt A(20/65): $E = 45 \cdot 20 + 60 \cdot 65 = 4800$ Euro
Punkt B(40/50): $E = 45 \cdot 40 + 60 \cdot 50 = 4800$ Euro
Punkt D(90/0): $E = 45 \cdot 90 + 60 \cdot 0 = 4050$ Euro

Die maximalen Einnahmen betragen 4800 Euro.
Hierfür gibt es mehrere Möglichkeiten.
Zum Beispiel den Bau von 20 2-Personen- Bungalows und 65 4-Personen-Bungalows.
Oder den Bau von 40 2-Personen-Bungalows und 50 4-Personen-Bungalows.

2.1.2

x = Anzahl der 2-Personen-Bungalows
y = Anzahl der 4-Personen-Bungalows
z = Anzahl der 6-Personen-Bungalows

Es gelten folgende Einschränkungen:

$$\begin{array}{cccccc} x & +y & +z & \leq & 90 \\ 60x & +80y & +90z & \leq & 6400 \\ 2x & +4y & +6z & \leq & 300 \end{array}$$

Zu maximieren sind die Einnahmen $45x + 60y + 90z = E$

Einführung von Schlupfvariablen ergibt folgendes Gleichungssytem

$$\begin{array}{cccccccc} x & +y & +z & +u_1 & & & = & 90 \\ 60x & +80y & +90z & & +u_2 & & = & 6400 \\ 2x & +4y & +6z & & & +u_3 & = & 300 \end{array}$$

Aufstellen des Simplex-Tableaus:

	x	y	z	u_1	u_2	u_3	Ergebnis	Quotient
(1)	1	1	1	1	0	0	90	90
(2)	60	80	90	0	1	0	6400	640/9
(3)	2	4	**6**	0	0	1	300	50
Zielfkt.	45	60	90	0	0	0	E	

Die größte positive Zahl in der Zielfunktion ist in der 3.Spalte.
Der kleinste Quotient ist in der 3.Zeile. Daher ist 6 das Pivotelement

Division der 3.Zeile durch 6:

	x	y	z	u_1	u_2	u_3	Ergebnis	Umformung
(1)	1	1	1	1	0	0	90	(1) – (3)
(2)	60	80	90	0	1	0	6400	$(2)-90\cdot(3)$
(3)	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	**1**	0	0	$\frac{1}{6}$	50	
Zielfkt.	45	60	90	0	0	0	E	$\text{Zielfkt}-90\cdot(3)$

	x	y	z	u_1	u_2	u_3	Ergebnis	Quotient
(1)	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	0	$-\frac{1}{6}$	40	60
(2)	30	20	0	0	1	-15	1900	190/3
(3)	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{6}$	50	150
Zielfkt.	15	0	0	0	0	-15	E-4500	

Die größte positive Zahl in der Zielfunktion ist in der 1.Spalte.

Der kleinste Quotient ist in der 1.Zeile. Daher ist $\frac{2}{3}$ das Pivotelement.

Division der 1.Zeile durch $\frac{2}{3}$:

	x	y	z	u_1	u_2	u_3	Ergebnis	Umformung
(1)	1	0,5	0	1,5	0	-0,25	60	
(2)	30	20	0	0	1	-15	1900	$(2)-30\cdot(1)$
(3)	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{6}$	50	$3\cdot(3)-(1)$
Zielfkt.	15	0	0	0	0	-15	E-4500	$\text{Zielfkt}-15\cdot(1)$

	x	y	z	u_1	u_2	u_3	Ergebnis
(1)	1	0,5	0	1,5	0	-0,25	60
(2)	0	5	0	-45	1	-7,5	100
(3)	0	1,5	3	-1,5	0	0,75	90
Zielfkt.	0	-7,5	0	-22,5	0	-11,25	E-5400

Ein weiterer Schritt ist nicht erforderlich, da in der Zielfunktionszeile alle Zahlen negativ sind.

Die maximalen Einnahmen betragen 5400 Euro.
Es gilt x = 60 , y = 0, z = 30, $u_1 = u_3 = 0$ und $u_2 = 100$.

Es müssen 60 2-Personen-Bungalows, und 30 6-Personen-Bungalows sowie keine 4-Personen-Bungalows gebaut werden. Hierbei werden $u_2 = 100$ m² der Fläche nicht ausgeschöpft.

2.2

Zunächst wird das LGS auf Stufenform gebracht.
Hierzu muss der Ausdruck $12x_1$ auf Null gebracht werden.

$$\begin{array}{rrrcl} 4x_1 & +2x_2 & +(2k-4)x_3 & = & 2 \quad |\cdot(-3) \\ 12x_1 & -6x_2 & +(3k-3)x_3 & = & 3k \\ & & (k^2-k-6)x_3 & = & k^2-4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrcl} 4x_1 & +2x_2 & +(2k-4)x_3 & = & 2 \\ & -12x_2 & +(-3k+9)x_3 & = & -6+3k \\ & & (k^2-k-6)x_3 & = & k^2-4 \end{array}$$

Wenn $k^2-k-6 = 0$ ergibt, liegt ein Sonderfall (das heißt unlösbar oder mehrdeutig lösbar) vor.

$k^2-k-6=0 \Rightarrow k_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2} = \frac{1\pm 5}{2}$ und damit k = 3 oder k = -2.

Für k = 3 lautet die letzte Zeile: $0x_3 = 5$, was zu einem Widerspruch führt.
Daher besitzt das LGS für k = 3 keine Lösung.

Für k = -2 lautet die letzte Zeile $0x_3 = 0$, was zu einer wahren Aussage 0 = 0 führt.
Daher besitzt das LGS für k = -2 unendlich viele Lösungen.

Für alle anderen Werte von k besitzt das LGS eine eindeutige Lösung.