Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2007 Teil 2, Lineare Optimierung, Aufgabe 1
Baden-Württemberg

1.1
Aus den drei Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 werden in einem Betrieb die zwei Erzeugnisse E_1 und E_2 hergestellt.
Der Verbrauch an Rohstoffen in Mengeneinheiten (ME) je Erzeugnis ist in folgender Tabelle dargestellt:

	Benötigte Menge an Rohstoffeinheiten für E_1	E_2
R_1	11	10
R_2	4	8
R_3	3	12

Zur Zeit stehen dem Betrieb 180 ME von R_1, 96 ME von R_2 und 126 ME von R_3 zur Verfügung.

1.1.1
Der Gewinn beim Verkauf von E_1 und E_2 ist gleich groß.
Daher ist der Betrieb bestrebt, eine möglichst große Gesamtstückzahl an Erzeugnissen E_1 und E_2 zu produzieren. Bestimmen Sie die zugehörigen Stückzahlen.
Wie groß ist die maximale Gesamtstückzahl, wenn die produzierte Stückzahl von E_1 viermal so groß ist wie die von E_2 ? (8 Punkte)

1.1.2
Der Gewinn beim Verkauf der Erzeugnisse beträgt 3 € für E_1 und 4 € für E_2.
Bestimmen Sie mithilfe des Simplexverfahrens den maximalen Gesamtgewinn.
(6 Punkte)

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2007 Teil 2, Lineare Optimierung, Lösung zu Aufgabe 1
Baden-Württemberg

1.1.1

Es werden x Stück von E_1 hergestellt und y Stück von E_2.
Es ergeben sich folgende Ungleichungen aufgrund der begrenzten Rohstoffmenge:

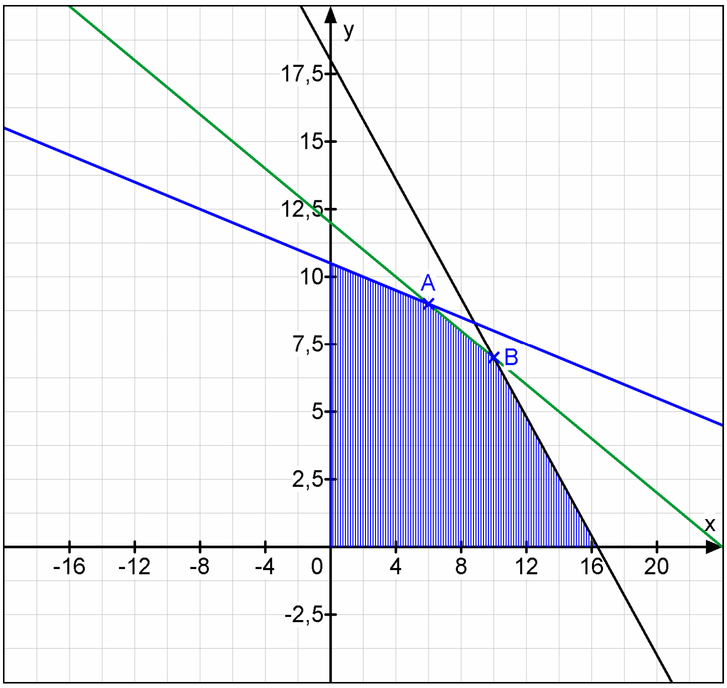
(1) $11x + 10y \leq 180$
(2) $4x + 8y \leq 96$
(3) $3x + 12y \leq 126$

Weiter gilt: $x, y \geq 0$.

Die zu maximierende Zielfunktion lautet
(4) $S = x + y$ (Gesamtstückzahl)

Die (Un-)gleichungen (1) bis (3) werden nach y aufgelöst und danach graphisch in einem Koordinatensystem veranschaulicht.

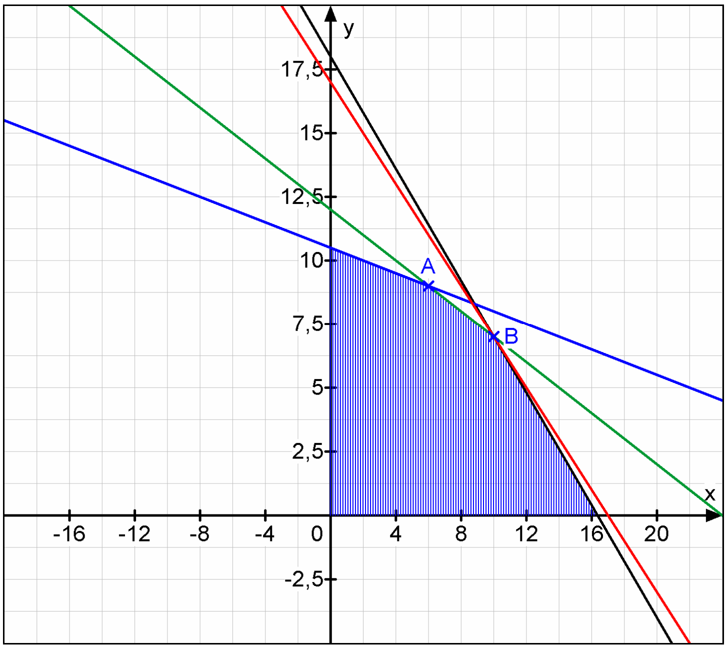
(1) $y \leq 18 - \frac{11}{10}x$
(2) $y \leq 12 - 0{,}5x$
(3) $y \leq 10{,}5 - \frac{1}{4}x$



Die Schnittpunkte der Geraden haben die Koordinaten A(6/9) und B(10/7).

Gesucht ist die Gerade aus (4) $y = -x + S$, die einen maximalen y-Achsenabschnitt besitzt und durch einen Flächenpunkt verläuft.
Wenn die Gerade durch B(10/7) verläuft, wird der y-Achsenabschnitt maximal.

Einsetzen von B in (4): $7 = -10 + S \Rightarrow S = 17$
Die Geradengleichung lautet $y = -x + 17$



Die maximale Produktion beträgt somit 10 Stück von E_1 und 7 Stück von E_2.

Falls x viermal so groß wie y sein soll – und weil x und y nur ganzzahlig sein können – kommen nur folgende Punkte in Frage:
C(4/1), D(8/2), E(12/3)
Von diesen Punkten ist die maximale Gesamtstückzahl bei E: 12 + 3 = 15.

1.1.2
Es werden x Stück von E_1 hergestellt und y Stück von E_2.
Außerdem werden die Schlupfvariablen u, v, w eingeführt.

Aus den Ungleichungen (1) – (3) ergeben sich nun folgende Gleichungen:

$$11x + 10y + u = 180$$
$$4x + 8y + v = 96$$
$$3x + 12y + w = 126$$

Die Zielfunktion lautet G = 3x + 4y

Das Simplextableau hat nun folgende Gestalt:

x	y	u	v	w		Einschränkung
11	10	1	0	0	180	18
4	8	0	1	0	96	12
3	12	0	0	1	126	10,5
3	4	0	0	0	G	

Die Spalte mit der größten Zahl bei der Zielfunktionszeile ist die Pivotspalte (hier die 2.Spalte y).
Die Werte der Spalte „Einschränkung“ ergeben sich aus der Division der Spalte 6 durch die Elemente der Pivotspalte (180:10 ; 96 : 8 ; 126 : 12).

Die Zeile, in der die kleinste Zahl bei „Einschränkung“ steht, ist die Pivotzeile.
Dies ist in diesem Fall mit 10,5 die 3.Zeile.

Das Element, das sowohl in der Pivotspalte als auch in der Pivotzeile steht, ist das so genannte Pivotelement – hier 12.

Nun werden alle Elemente der Pivotspalte durch übliche Zeilenumformungen zu Null gemacht, außer das Pivotelement selbst.

Damit ergibt sich:

x	y	u	v	w		Einschränkung
51	0	6	0	-5	450	8,82
6	0	0	3	-2	36	6
3	12	0	0	1	126	42
6	0	0	0	-1	3G-126	

Nun ist die 1.Spalte (x) die Pivotspalte und die 2.Zeile die Pivotzeile.

x	y	u	v	w		Einschränkung
0	0	12	-51	24	288	12
6	0	0	3	-2	36	(-18)
0	24	0	-3	4	216	54
0	0	0	-3	1	3G-162	

Nun ist die 5.Spalte (w) die Pivotspalte und die 1.Zeile die Pivotzeile.

x	y	u	v	w	
0	0	12	-51	24	288
72	0	12	-15	0	720
0	144	-12	33	0	1008
0	0	-12	-21	0	72G-4176

Division der 2.Zeile durch 72 und der 3.Zeile durch 144:

x	y				
0	0				
1	0				10
0	1				7
0	0				72G-4176

Für x = 10 und y = 7 ergibt sich der maximale Gewinn.
Der Gewinn beträgt $G = 3 \cdot 10 + 4 \cdot 7 = 58$ Euro.