

Hauptprüfung Abiturprüfung 2015 (ohne CAS)

Baden-Württemberg

Lineare Optimierung

Hilfsmittel: GTR, Formelsammlung

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

April 2015

1.1

Eine Kantine soll aus Gemüse und Fleisch, welche Magnesium, Eisen und die Vitamine C und B₁₂ enthalten, Mahlzeiten herstellen, die möglichst kostengünstig sind.

Gleichzeitig müssen Mineralstoffe und Vitamine in bestimmten Mindestmengen in den Mahlzeiten vorhanden sein.

Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über die Inhaltsstoffe:

	Menge der Mineralstoffe und Vitamine in mg je 100 g		Mindestmengen in den Mahlzeiten in mg
	Gemüse	Fleisch	
Magnesium	50	25	175
Eisen	1	2	8
Vitamin C	50	0	75
Vitamin B ₁₂	0	0,001	0,002

Die Kosten für 100 g Gemüse betragen 1 €, für 100 g Fleisch 1,50 €.

Ermitteln Sie grafisch die kostenminimale Zusammensetzung einer Mahlzeit aus Fleisch und Gemüse, welche die geforderten Mindestmengen erfüllt.

Was kostet dann eine Mahlzeit ?

(8 Punkte)

1.2

Fleisch und Gemüse sollen auch jeweils einzeln in Packungen zum Mitnehmen angeboten werden. Das Bearbeiten der Lebensmittel erfolgt durch Automaten:

Automat 1: Vorbereiten der Lebensmittel

Automat 2: Zubereiten

Automat 3: Verpacken.

Die folgende Tabelle gibt an, wie lange die Automaten für die Bearbeitung je einer Packung Gemüse bzw. Fleisch benötigen und wie lange die Automaten maximal zur Verfügung stehen:

	Bearbeitungszeit in Minuten		Maximale Nutzungszeit in Minuten
	Gemüse	Fleisch	
Automat 1	2	4	316
Automat 2	2,5	3	343
Automat 3	2,5	3	436

Der Gewinn pro Packung beträgt 0,90 € bei Gemüse und 1,50 € bei Fleisch.

1.2.1

Erstellen Sie das Anfangstableau für das Simplexverfahren, mit dem der maximale Gewinn ermittelt werden kann.

(3 Punkte)

1.2.2

Bei der Berechnung des maximalen Gewinns erhält der Kantinenleiter folgendes Tableau:

x	y	u	v	w	b_i
0,5	1	0,25	0	0	79
1	0	- 0,75	1	0	106
1	0	- 0,75	0	1	199
0,15	0	- 0,375	0	0	G - 118,5

x ist die Anzahl der Gemüsepackungen.

y ist die Anzahl der Fleischpackungen.

Die Schlupfvariablen für die Nichtauslastungszeiten der drei Automaten werden mit u, v und w bezeichnet.

Berechnen Sie hieraus das Endtableau und geben Sie den maximalen Gewinn an.

Wie viele Einzelpackungen Gemüse bzw. Fleisch werden insgesamt hergestellt ?

Welcher Automat ist am wenigsten ausgelastet ?

(4 Punkte)

15 Punkte

Lösungen

1.1

x = Anzahl der Gemüseeinheiten pro Mahlzeit

y = Anzahl der Fleischeinheiten pro Mahlzeit

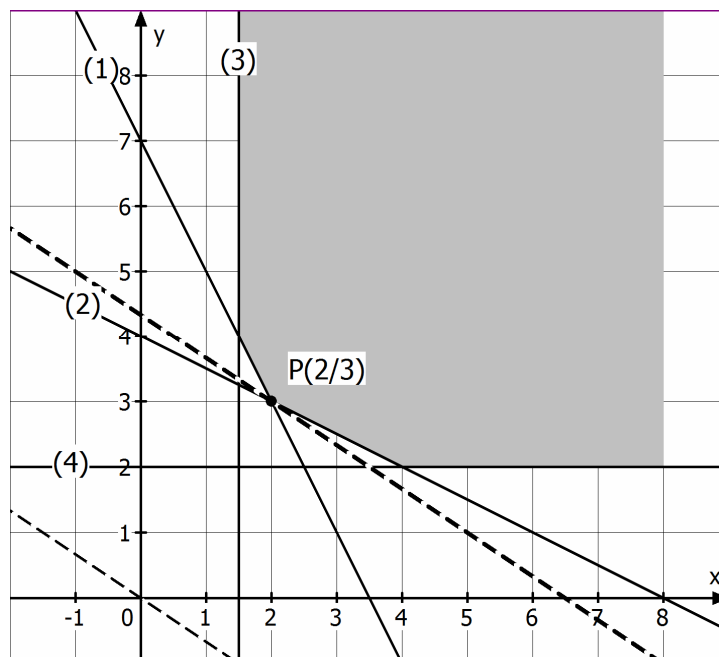
Die Angaben sind in Einheiten von 100g.

Es gelten die Nichtnegativitätsbedingungen: $x, y \geq 0$

Aus der Tabelle ergeben sich die Bedingungen:

- (1) Magnesium: $50x + 25y \geq 175 \Rightarrow y \geq -2x + 7$
- (2) Eisen: $x + 2y \geq 8 \Rightarrow y \geq -0,5x + 4$
- (3) Vitamin C: $50x \geq 75 \Rightarrow x \geq 1,5$
- (4) Vitamin B₁₂: $0,001y \geq 0,002 \Rightarrow y \geq 2$
- (5) Zielfunktion (Kosten K): $K = x + 1,5y$ minimieren
 $\Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}K$

Grafische Darstellung:



Die Kosten sind minimal, wenn die gestrichelte Zielgerade durch den Punkt $P(2/3)$ verläuft. Somit gilt $x = 2$ und $y = 3$.

Die kostenminimale Zusammensetzung besteht aus 200 g Gemüse und 300 g Fleisch.

Die minimalen Kosten betragen $K = 2 + 1,5 \cdot 3 = 6,50$ €.

1.2.1

x ist die Anzahl der Gemüsepackungen.

y ist die Anzahl der Fleischpackungen.

Die Schlupfvariablen für die Nichtauslastungszeiten der drei Automaten werden mit u, v und w bezeichnet.

Es gelten die Nichtnegativitätsbedingungen $x, y, u, v, w \geq 0$

Es gilt:

Automat 1: $2x + 4y + u = 316$

Automat 2: $2,5x + 3y + v = 343$

Automat 3: $2,5x + 3y + w = 436$

Gewinn: $G = 0,9x + 1,5y$

Anfangstableau:

x	y	u	v	w	b_i
2	4	1	0	0	316
2,5	3	0	1	0	343
2,5	3	0	0	1	436
0,9	1,5	0	0	0	G

1.2.2

Vorgegebenes Tableau:

x	y	u	v	w	b_i	Quotient
0,5	1	0,25	0	0	79	158
1	0	-0,75	1	0	106	106
1	0	-0,75	0	1	199	199
0,15	0	-0,375	0	0	G-118,5	

Die 1.Spalte ist die Pivotspalte.

Da die 2.Zeile den geringsten Quotient darstellt, ist die 2.Zeile die Pivotzeile.

Nummer	x	y	u	v	w	b_i	Umformung
(1)	0,5	1	0,25	0	0	79	(1) - 0,5 · (2)
(2)	1	0	-0,75	1	0	106	
(3)	1	0	-0,75	0	1	199	(3) - (2)
(4)	0,15	0	-0,375	0	0	G-118,5	(4) - 0,15 · (2)

Endtableau:

x	y	u	v	w	b_i
0	1	0,625	-0,5	0	26
1	0	-0,75	1	0	106
0	0	0	-1	1	93
0	0	-0,2625	-0,15	0	G-134,4

Der maximale Gewinn beträgt 134,40 €.

Dieser wird erreicht mit $x = 106$ Gemüsepackungen und $y = 26$ Fleischpackungen.

Da $u = v = 0$ ist, sind die Automaten 1 und 2 komplett ausgelastet.

Der Automat 3 ist $w = 93$ Minuten lang nicht ausgelastet.