Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2006 Teil 2, Vektorgeometrie, Aufgabe 1
Baden-Württemberg

1.1
Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{llll} -4x_1 & +x_2 & -tx_3 & = 0 \\ -2x_1 & +(t^2+0{,}5t+0{,}5)x_2 & -0{,}5tx_3 & = 0 \\ -x_1 & +0{,}25x_2 & & = 0 \end{array} \right| \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}$$

1.1.1
Bestimmen Sie für t = 0 und t = -0,5 die Lösungsvektoren dieses linearen Gleichungssystems. (4 Punkte)

1.1.2
Jede Gleichung des Gleichungssystems beschreibt eine Ebene im Anschauungsraum. Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der drei Ebenen in Abhängigkeit von t. Beschreiben Sie die besondere Lage der Schnittmengen im Koordinatensystem. (7 Punkte)

1.1.3
Die Punkte A(3/3/0), B(-3/3/0) und $C_k(0/k-1/k)$, $k \in \mathbb{R}$ sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Bestimmen Sie k so, dass der Umfang des Dreiecks minimal ist.
(4 Punkte)

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2006 Teil 2, Vektorgeometrie, Lösung zu Aufgabe 1
Baden-Württemberg

1.1.1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 1 & -t & 0 \\ -2 & t^2+0{,}5t+0{,}5 & -0{,}5t & 0 \\ -1 & 0{,}25 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |\cdot(-2) \\ |\cdot(-4) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 1 & -t & 0 \\ 0 & -2t^2-t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 1 & -t & 0 \\ 0 & t(2t+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \end{array}\right)$$

Lösung für t = 0:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Mit $x_3 = t$ und $x_2 = r$ ergibt sich aus der 1.Zeile $x_1 = \frac{1}{4}r$.

Die Lösung lautet $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}25r \\ r \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (*)

Lösung für t = -0,5:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 1 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}5 & 0 \end{array}\right)$$

Aus der 3.Zeile: $x_3 = 0$
Aus der 1.Zeile folgt mit $x_1 = t$, dass $x_2 = 4t$ ist.

Die Lösung lautet $\vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ 4t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ (**)

1.1.2

Für t = 0 ergibt sich die Lösung (*).
Diese Lösung stellt die Parametergleichung einer Ebene dar. Sie ist die Schnittebene der drei Ebenen.
Das bedeutet, dass sich anschaulich alle drei Ebenen des Gleichungssystems in einer gemeinsamen Schnittebene schneiden. Somit stellt jede der drei Ebenen des Gleichungssystems dieselbe Ebene dar.

Da einer der Richtungsvektoren der Schnittebene $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist und aufgrund des Ortsvektors der Ursprung O(0/0/0) in der Schnittebene liegt, liegt die x_3-Achse in der Schnittebene.

Für t = -0,5 ergibt sich die Lösung (**).
Diese Lösung stellt die Parametergleichung einer Gerade dar. Sie ist die Schnittgerade der drei Ebenen.
Aufgrund des Richtungsvektors und weil die Gerade aufgrund des Ortsvektors den Ursprung O(0/0/0) enthält, liegt die Gerade in der $x_1 - x_2$-Ebene.

Für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\,;\,-0{,}5\}$ ergibt sich als Lösung für das Gleichungssystem eindeutig $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Das heißt der Ursprung O(0/0/0) ist der gemeinsame Schnittpunkt aller drei Ebenen.

1.1.3
Die Länge der Dreiecksseiten ergeben sich aus der folgenden Formel:
Der Abstand zweier Punkte $A(a_1/a_2/a_3)$ und $B(b_1/b_2/b_3)$ entspricht

$$\overline{AB} = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + (a_3-b_3)^2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(3+3)^2 + (3-3)^2 + (0-0)^2} = 6$$

$$\overline{AC_k} = \sqrt{(3-0)^2 + (3-(k-1))^2 + (0-k)^2} = \sqrt{9 + (16 - 8k + k^2) + k^2} = \sqrt{2k^2 - 8k + 25}$$

$$\overline{BC_k} = \sqrt{(-3-0)^2 + (3-(k-1))^2 + (0-k)^2} = \sqrt{9 + (16 - 8k + k^2) + k^2} = \sqrt{2k^2 - 8k + 25}$$

Umfang $U = 6 + 2 \cdot \sqrt{2k^2 - 8k + 25}$

Laut GTR ergibt sich ein Minimum für k = 2 mit einem minimalen Umfang von U(2) = 14,25.