Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2009 Teil 4, Vektorgeometrie, Aufgabe 1
Baden-Württemberg

1
Gegeben sind die Punkte A(-1/8/4), B(2/-7/-2) und für alle $t \in \mathbb{R}$ die Punkte $C_t(t-2/t+1/t)$ und $D_t(t/1-t/2t+5)$.

1.1
Die Gerade g verläuft durch die Punkte A und B.
Bestimmen Sie den Punkt von g, der in der x_2-x_3-Ebene liegt.
Für welchen Wert von t legen die Punkte A, B und C_t kein Dreieck fest ?

(6 Punkte)

1.2
Die Punkte A, B und C_0 legen eine Ebene fest.
Prüfen Sie, ob es ein t gibt, so dass D_t in dieser Ebene liegt.

(4 Punkte)

1.3
Untersuchen Sie, wie groß der Abstand zwischen den Punkten C_t und D_t mindestens ist.

(5 Punkte)
----
15 Punkte

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2009 Teil 4, Vektorgeometrie, Lösung zu Aufgabe 1
Baden-Württemberg

1.1

Aufstellen der Geradengleichung durch die Punkte A und B: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -15 \\ -6 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt der Gerade g mit der $x_2 - x_3$ -Ebene:
Jeder Punkt auf der $x_2 - x_3$ -Ebene besitzt als x_1-Wert $x_1 = 0$.

In die Gerade eingesetzt folgt daraus (1.Zeile der Gleichung): $0 = -1 + 3r \Rightarrow r = \frac{1}{3}$

Einsetzen von $r = \frac{1}{3}$ in die Geradengleichung liefert als Schnittpunkt S(0/3/2).

Die Punkte A, B und C_t legen kein Dreieck fest, wenn der Punkt C_t auf der Gerade g liegt.

Die Punktprobe liefert $\begin{pmatrix} t-2 \\ t+1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -15 \\ -6 \end{pmatrix}$

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrcr} 3r & -t & = & -1 \\ -15r & -t & = & -7 \\ -6r & -t & = & -4 \end{array}$$

Mit dem GTR folgt daraus $r = \frac{1}{3}$, t = 2.
Somit legen die Punkte A, B und C_2 kein Dreieck fest.

1.2

Aufstellen der Ebenengleichung, die die Punkte A, B und $C_0(-2/1/0)$ enthält:

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -15 \\ -6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}$

Mit Hilfe einer Punktprobe wird geprüft, für welchen t-Wert D_t in E liegt:

$$\begin{pmatrix} t \\ 1-t \\ 2t+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -15 \\ -6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrcr} 3r & -s & -t & = & 1 \\ -15r & -7s & +t & = & -7 \\ -6r & -4s & -2t & = & 1 \end{array}$$

Mit dem GTR ergibt sich als Lösung $r = -\frac{1}{18}$, $s = \frac{5}{6}$ und t = -2.

Somit liegt der Punkt D_{-2} in der Ebene E.

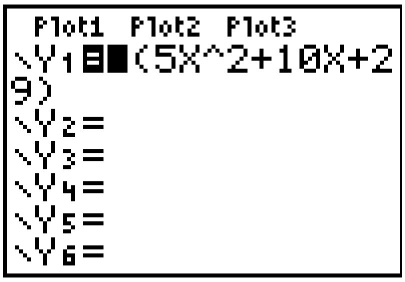
1.3

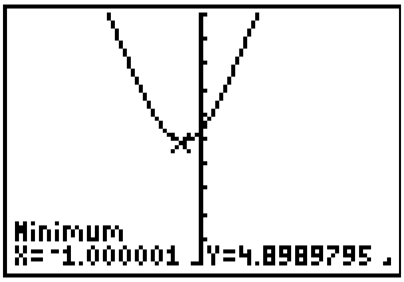
Der Abstand zwischen den Punkten C_t und D_t wird folgendermaßen berechnet:

$\overrightarrow{C_tD_t} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2t \\ t+5 \end{pmatrix}$ und die Länge des Vektors beträgt

$$\left|\overrightarrow{C_tD_t}\right| = \sqrt{2^2 + (-2t)^2 + (t+5)^2} = \sqrt{4 + 4t^2 + t^2 + 10t + 25} = \sqrt{5t^2 + 10t + 29}$$

Nun wird mit Hilfe des GTR ermittelt, für welchen Wert von t der Term ein Minimum besitzt.





Dies ist für t = -1 der Fall und der kleinste Abstand beträgt $\sqrt{24} = 4{,}9$ LE.