Abiturprüfung Mathematik 2006 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien ohne TG – Analysis, Aufgabe 1

1.1
Die folgende Wertetabelle gehört zu einer Funktion g:

X	-1	0	1	2	3	4	5
g(x)	-5/4	0	3/4	4	27/4	0	-125/4
g'(x)	4	0	2	4	0	-16	-50
g''(x)	-9	0	3	0	-9	-24	-45

1.1.1 (7 Punkte)
Welche Aussagen kann man mit Hilfe der Tabelle über Achsenschnittpunkte, sowie über Hoch-, Tief- und Wendepunkte des Schaubildes von g machen ?

1.1.2 (4 Punkte)
Die Wertetabelle gehört zu einer Polynomfunktion 4.Grades. Bestimmen den Funktionsterm.

1.1.3 (6 Punkte)
Gegeben ist die allgemeine Polynomfunktion h dritten Grades mit
$h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $x \in R$
Welchen Einfluss haben die Koeffizienten c und d auf die Wendestelle von h ?
Welche Beziehung muss zwischen den Koeffizienten a und b bestehen, damit x = -3 eine Wendestelle ist ?

1.2
Gegeben ist die Funktion f durch

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x, \; x \in R$$

Das Schaubild von f ist K.

1.2.1 (5 Punkte)
Skizziere und beschreibe den Verlauf von K.

1.2.2 (5 Punkte)
Berechne die exakten Koordinaten des Schnittpunktes von K mit der x-Achse.
Ermittle die durchschnittliche Steigung von K auf dem Intervall [1;2].

1.2.3 (6 Punkte)
Zeige, dass K genau eine Tangente hat, die orthogonal zur Geraden mit der Gleichung 6y+x = 0 verläuft.
Gib den zugehörigen Berührpunkt an.

1.2.4 (3 Punkte)
Die Gerade mit der Gleichung x = -2, das Schaubild von K und die x-Achse begrenzen eine Fläche. Durch Drehung dieser Fläche um die x-Achse entsteht ein Rotationskörper. Berechne dessen Volumen.

1.2.5 (9 Punkte)
Die Punkte A(0/-0,5) und B(0/0) sowie die Punkte C(u/0) und D(u/f(u)) bilden für u<0 ein Viereck. Das Viereck hat den Flächeninhalt A_1.
Das Schaubild K, die Koordinatenachsen und die Gerade mit der Gleichung x = u mit u < 0 begrenzen eine Fläche mit dem Inhalt A_2.
Für welches u ist $A_1 = A_2$?

Abiturprüfung Mathematik 2006 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien ohne TG – Analysis, Aufgabe 2

2
Für jedes $t \in R^*$ ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = \frac{1}{t}x^3 - 2x^2 + tx\,,\quad x \in R$$

Das Schaubild von f_t ist K_t.

2.1 (10 Punkte)
Die Normale im Wendepunkt von K_6 schließt mit K_6 zwei Flächenstücke ein.
Berechnen Sie den Inhalt eines dieser Flächenstücke.

2.2 (8 Punkte)
Betrachten Sie Schaubilder für positive und negative Werte von t.
Wie unterscheiden sich die Schaubilder für negative Werte von t von denen für positive Werte von t ?
Geben Sie gemeinsame Eigenschaften der Schaubilder an.
Skizzieren Sie zwei Schaubilder.

2.3 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass alle Schaubilder K_t einen Tiefpunkt auf der x-Achse haben.

2.4 (7 Punkte)
Für $u \in [0;6]$ ist g_u die Gerade mit der Gleichung x = u.
K_6, die x-Achse und g_u begrenzen eine Fläche. Berechne ihren Inhalt.
Für welchen Wert von u halbiert g_u die Fläche, die von K_6 und der x-Achse eingeschlossen wird ?

2.5 (8 Punkte)
Untersuchen Sie für jede der folgenden Abbildungen, ob es ein $t \in R^*$ gibt, so dass das Schaubild einer Stammfunktion von f_t dargestellt ist.
Bestimme gegebenenfalls den Funktionsterm der zugehörigen Stammfunktion.

Bild 1

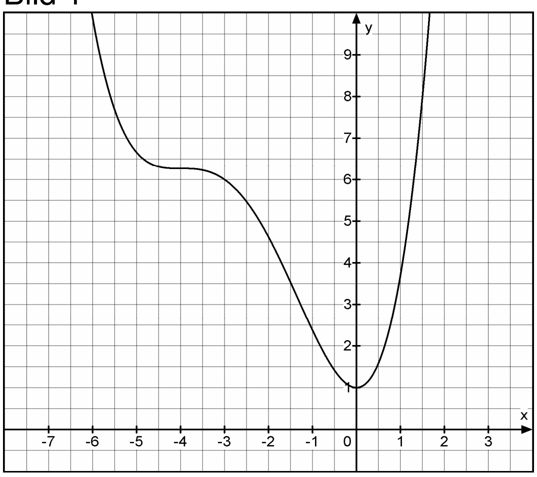
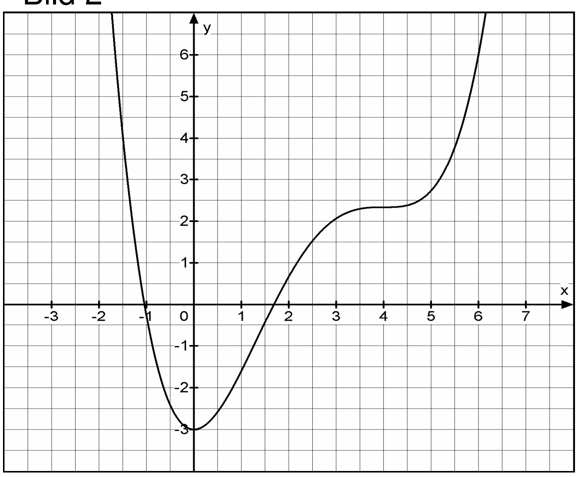


Bild 2



2.6 (8 Punkte)
Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = a \cdot \sin(kx)$; $x \in R$.
Welche Bedeutung haben die Parameter a und k für das Schaubild von h ?
Bestimmen Sie a und k so, dass die Nullstellen der Funktion h im Intervall $0 \leq x \leq 6$ mit den Nullstellen von f_6 übereinstimmen und dass die Schaubilder von h und f_6 im Ursprung eine gemeinsame Tangente haben.

Abiturprüfung Mathematik 2006 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien ohne TG – Analysis, Aufgabe 1

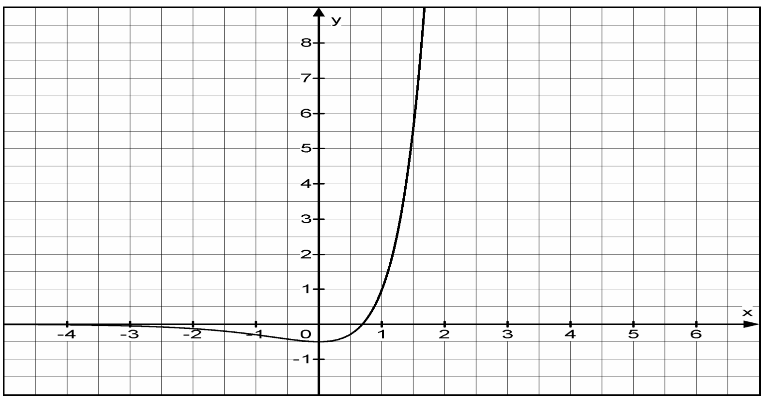
1.1.1
Achsenschnittpunkte: Schnittpunkte mit der x-Achse bei $N_1(4/0)$ und $N_2(0/0)$
Hochpunkt:
$H(3/\frac{27}{4})$, da $g'(3)=0$ und $g''(3)<0$
Wendepunkt:
W(2/4), da $g''(2)=0$ und g'' an der Stelle x = 2 laut Wertetabelle das Vorzeichen wechselt.
W(0/0), da $g''(0)=0$ und g'' an der Stelle x = 0 laut Wertetabelle das Vorzeichen wechselt.
W(0/0) ist sogar ein Sattelpunkt, da $g'(0)=0$ ist.

1.1.2
Ansatz:
$g(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e \Rightarrow g'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d \Rightarrow g''(x)=12ax^2+6bx+2c$
Bedingungen: $g(0)=0 \Rightarrow e=0$
$g'(0)=0 \Rightarrow d=0$
$g''(0)=0 \Rightarrow c=0$
$g(1)=0{,}75 \Rightarrow a+b=0{,}75$ (*)
$g(-1)=-\frac{5}{4} \Rightarrow a-b=-\frac{5}{4}$ (**)

(*) + (**): $2a=-\frac{1}{2} \Rightarrow a=-\frac{1}{4}$
(*) $\Rightarrow b=1$
Funktionsterm: $g(x)=-\frac{1}{4}x^4+x^3$

1.1.3
$h(x)=ax^3+bx^2+cx+d \Rightarrow h'(x)=3ax^2+2bx+c \Rightarrow h''(x)=6ax+2b$
Da in der Wendestellenbedingung $h''(x)=0$ die Koeffizienten c und d nicht enthalten sind, haben diese gar keinen Einfluss auf die Wendestelle (also auf den x-Wert des Wendpunktes). Lediglich der y-Wert des Wendepunktes wird von c und d beeinflusst.

Es soll gelten: $h''(-3)=0 \Rightarrow -18a+2b=0 \Rightarrow b=9a$

1.2.1


Verlauf von K: Es gilt $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \to \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \to 0$, d.h. die negative x-Achse ist eine waagrechte Asymptote.
Das Schaubild besitzt auf der y-Achse einen Tiefpunkt, schneidet die x-Achse etwas bei $x \approx 0{,}7$ und besitzt außerdem bei $x \approx -0{,}7$ einen Wendepunkt.

1.2.2

Schnittpunkt mit x-Achse: $f(x) = 0 \Rightarrow e^x \cdot \left(\frac{1}{2}e^x - 1\right) = 0 \Rightarrow x = \ln 2 \Rightarrow N(\ln 2 / 0)$

Durchschnittliche Steigung: $m = \frac{1}{2-1} \cdot \int\limits_1^2 f'(x)dx = [f(x)]_1^2 = f(2) - f(1) = 19{,}910 - 0{,}9762 = 18{,}93$

1.2.3

Geradengleichung: $6y + x = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{6}x$

Die Tangente soll orthogonal zu der Geraden sein, daraus folgt $m_{Tangente} = 6$

$f'(x) = e^{2x} - e^x = 6 \Rightarrow e^{2x} - e^x - 6 = 0$

Lösung durch Substitution: $u = e^x \Rightarrow u^2 - u - 6 = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$

$\Rightarrow u_1 = 3$ und $u_2 = -2$

Rücksubstitution: $e^x = 3 \Rightarrow x = \ln 3$

$e^x = -2$ liefert keine Lösung

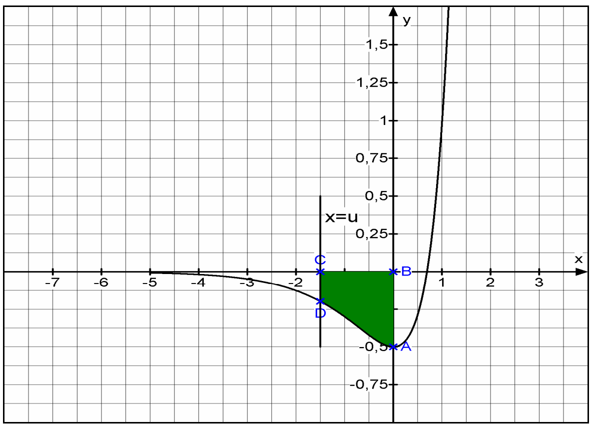
$f(\ln 3) = \frac{1}{2}e^{2\cdot\ln 3} - e^{\ln 3} = \frac{1}{2}\cdot 9 - 3 = 1{,}5$

Damit gibt es nur eine Tangente mit Berührpunkt $B(\ln 3 / 1{,}5)$.

1.2.4

$V = \pi \cdot \int\limits_{-2}^{\ln 2} \left(\frac{1}{2}e^{2x} - e^x\right)^2 dx = 1{,}021$ (mit GTR)

1.2.5



Das Viereck ist ein Trapez:

$$A_1 = \frac{1}{2}(a+c)\cdot h = \frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{CD})\cdot\overline{BC} = \frac{1}{2}(0{,}5+(-f(u)))\cdot(-u) = -\frac{1}{2}u\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{2u}+e^{u}\right)$$

$$A_2 = \int_u^0 -\left(\frac{1}{2}e^{2x}-e^{x}\right)dx = \left[-\frac{1}{4}e^{2x}+e^{x}\right]_u^0 = -\frac{1}{4}+1+\frac{1}{4}e^{2u}-e^{u} = \frac{3}{4}+\frac{1}{4}e^{2u}-e^{u}$$

Setze $A_1 = A_2 \Rightarrow -\frac{1}{2}u\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{2u}+e^{u}\right) = \frac{3}{4}+\frac{1}{4}e^{2u}-e^{u}$

Als Lösung mit dem GTR ergibt sich u = -1,8926 oder u = 0.
Da u < 0 vorausgesetzt ist, gilt u = -1,8926.

Abiturprüfung Mathematik 2006 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien ohne TG – Analysis, Lösung Aufgabe 2

2.1

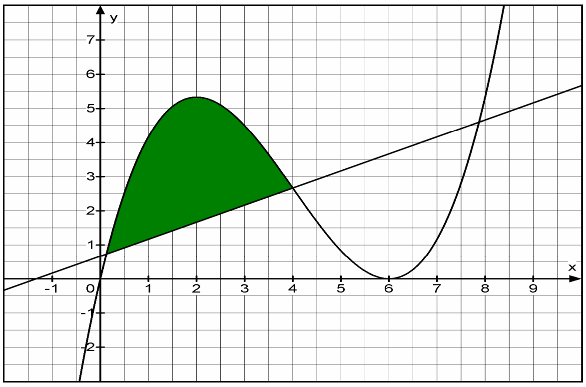
$f_6(x) = \frac{1}{6}x^3 - 2x^2 + 6x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6 \Rightarrow f''(x) = x - 4 \Rightarrow f'''(x) = 1$

Wendepunktbedingung: $f''(x) = x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$ und $f'''(4) \neq 0$, also $WP(4/\frac{8}{3})$

Tangentensteigung im Wendepunkt: $f'(4) = -2$

Normalensteigung im Wendepunkt: $m_{Normale} = \frac{1}{2}$

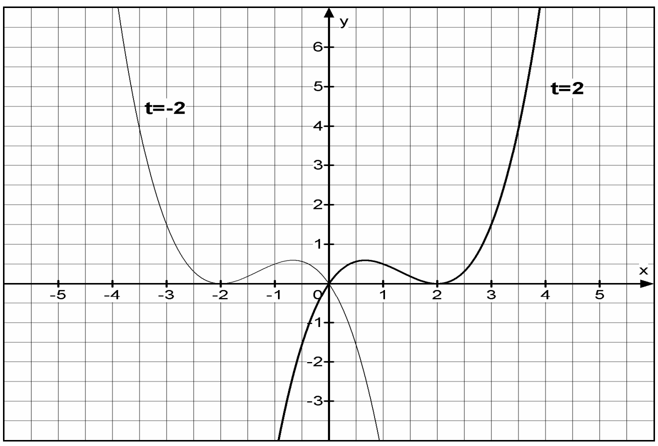
Gleichung der Normalen: $y - \frac{8}{3} = \frac{1}{2}(x-4) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}$



Die Schnittstellen des Schaubildes von f mit der Normalen ergeben sich mit dem GTR:
$x_1 = 0{,}127$ und $x_2 = 4$ und $x_3 = 7{,}873$

Berechnung der markierten Fläche: $A = \int_{0{,}127}^{4} (f_6(x) - (\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}))dx = 9{,}375$ (FE)

2.2



Negative t-Werte:
- Schaubild verläuft vom 2. in den 4. Quadranten
- Extrempunkte liegen links von der y-Achse

Positive t-Werte:
- Schaubild verläuft vom 3. in den 1.Quadranten
- Extrempunkte liegen rechts von der y-Achse

Gemeinsame Eigenschaften:
- Schaubilder verlaufen durch den Ursprung
- Tiefpunkte liegen auf der x-Achse
- Hochpunkte liegen oberhalb der x-Achse

2.3

$f_t(x) = \frac{1}{t}x^3 - 2x^2 + tx \Rightarrow f_t'(x) = \frac{3}{t}x^2 - 4x + t \Rightarrow f_t''(x) = \frac{6}{t}x - 4$

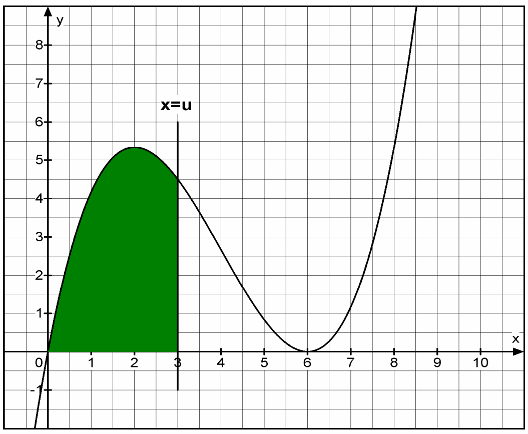
Berechnung des Tiefpunktes: $f_t'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3}{t}x^2 - 4x + t = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{\frac{6}{t}} = \frac{4 \pm 2}{\frac{6}{t}}$

$$\Rightarrow x_1 = t \text{ und } x_2 = \frac{1}{3}t$$

$f_t''(t) = 2 > 0 \Rightarrow TP(t/0)$ was zu zeigen war.

$f_t''(\frac{1}{3}t) = -2 < 0 \Rightarrow HP$

2.4



Fläche = $\int_0^u (\frac{1}{6}x^3 - 2x^2 + 6x)dx = \left[\frac{1}{24}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 3x^2\right]_0^u = \frac{1}{24}u^4 - \frac{2}{3}u^3 + 3u^2$

Fläche, die K_6 mit x-Achse einschließt: $\int_0^6 f(x)dx = \frac{1}{24} \cdot 6^4 - \frac{2}{3} \cdot 6^3 + 3 \cdot 6^2 = 18$

Halbierung der Fläche, wenn gilt: $\frac{1}{24}u^4 - \frac{2}{3}u^3 + 3u^2 = 9$

Lösung der Gleichung mit GTR: $u = 2{,}314$ (die andere Lösung ist negativ).

2.5

Bild 1: Die Wendpunkte der Stammfunktion führen bei f_t zu einem Extrempunkt. An der Stelle x = -4 ergibt sich ein Hochpunkt bei f_t mit den Koordinaten HP(-4/0) (da waagrechte Tangente beim Schaubild der Stammfunktion an der Stelle x = -4). Ungefähr an der Stelle

x = -1,25 liegt ein weiterer Wendepunkt, der bei f_t zu einem Tiefpunkt wird.
Da die Steigung an der Stelle x = -1,25 jedoch nicht Null ist, liegt der Tiefpunkt von f_t nicht auf der x-Achse. Da diese Eigenschaft jedoch in Aufgabe 2.2 festgestellt wurde, kann Bild 1 keine Stammfunktion darstellen.

Bild 2:

Stammfunktion: $F_t(x) = \frac{1}{4t}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{t}{2}x^2 + C$

Mit $F_t(0) = -3 \Rightarrow C = -3$, also $F_t(x) = \frac{1}{4t}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{t}{2}x^2 - 3$

$F_t'(x) = \frac{1}{t}x^3 - 2x^2 + tx \Rightarrow F_t''(x) = \frac{3}{t}x^2 - 4x + t$

An der Stelle x = 4 befindet sich ein Wendepunkt:

$F_t''(4) = 0 \Rightarrow \frac{48}{t} - 16 + t = 0 \Rightarrow 48 - 16t + t^2 = 0$ ergibt als Lösung t = 4 oder t = 12.

Für t = 12 zeichnet der GTR ein anderes Schaubild als wie in Bild 2 dargestellt.
Für t = 4 entsteht dasselbe Schaubild, also ist t = 4 der gesuchte Wert.

2.6

Der Parameter a stellt die Amplitude der Sinusfunktion dar, die Wertemenge der Funktion h(x) lautet W = [-a ; a].

Der Parameter k ist für die Periode p verantwortlich: $p = \frac{2\pi}{k}$.

Nullstellen von f_6: $N_1(0/0)$ und $N_2(6/0)$

$h(0) = 0$: dies ist für alle Parameter a und k erfüllt

$h(6) = 0 \Rightarrow a \cdot \sin(6k) = 0$ (*)

Gemeinsame Tangente bei x = 0: $f_6'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6 \Rightarrow f_6'(0) = 6$

$h'(x) = a \cdot \cos(kx) \cdot k \Rightarrow h'(0) = a \cdot k = 6$ (**)

Aus (*) folgt: $6k = \pi \Rightarrow k = \frac{\pi}{6}$

Aus (**): $a \cdot \frac{\pi}{6} = 6 \Rightarrow a = \frac{36}{\pi}$

$h(x) = \frac{36}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot x\right)$