Abiturprüfung Mathematik 2013 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien – Analysis, Aufgabe 1

1.1
Die Funktion f ist gegeben durch

$$f(x) = 2 + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\ ;\ x \in \mathbb{R}.$$

Das Schaubild von f ist K.

1.1.1 (8 Punkte)
Beschreiben Sie, die K aus dem Schaubild mit der Gleichung $y = \sin(x)$ hervorgeht.
Geben sie die Periode und die Wertemenge von f an.
Zeichnen Sie K für $-3 \le x \le 5$.

1.1.2 (5 Punkte)
Bestimmen Sie den Schnittwinkel der Tangenten an K in zwei benachbarten Wendepunkten von K.

1.1.3 (8 Punkte)
Zwischen zwei benachbarten Tiefpunkten von K schließen K und die x-Achse eine Fläche ein. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.
Ermitteln Sie die Stammfunktion F von f, deren Schaubild durch den Punkt P(-1/0) verläuft. Dem Funktionswert F(4) entspricht der Inhalt einer Fläche in Ihrer Zeichnung aus 1.1.1. Schraffieren Sie diese Fläche.

1.1.4 (5 Punkte)
Im 2.Quadranten schließt K mit den Koordinatenachsen eine Fläche ein. In diese Fläche werden Rechtecke so einbeschrieben, dass zwei Seiten auf den Koordinatenachsen liegen.
Bestimmen Sie die Seitenlängen des Rechtecks mit dem größten Flächeninhalt.

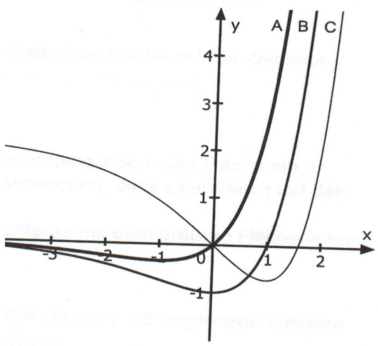
1.1.5 (5 Punkte)
Das Schaubild K und die Gerade mit der Gleichung y = 2 begrenzen mehrere Flächenstücke.
Diese rotieren um die x-Achse.
Berechnen Sie für eines der Flächenstücke das Volumen des von ihm erzeugten Rotationskörpers.

1.2
Für a > 0 ist die Funktion g_a gegeben durch
$g_a(x) = ax + e^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$
Das Schaubild von g_a ist G_a.

1.2.1 (4 Punkte)
Die Gerade n ist die Normale von $G_{0,5}$ im Schnittpunkt von $G_{0,5}$ mit der y-Achse.
Weisen Sie nach, dass es keine Tangente an $G_{0,5}$ gibt, die parallel zu n verläuft.

1.2.2 (6 Punkte)
Bestimmen Sie a so, dass das Schaubild G_a die x-Achse berührt.
Geben Sie den Berührpunkt an.

1.3 (4 Punkte)
In der Abbildung sind die Schaubilder der Funktion h, ihrer Ableitungsfunktion h' und einer Stammfunktion H von h eingezeichnet.
Ordnen Sie die Schaubilder den Funktionen h, h' und H zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.



Abiturprüfung Mathematik 2013 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien – Analysis, Aufgabe 2

2.1
Gegeben ist für jedes t < 0 die Funktion f_t mit

$f_t(x) = \frac{t}{4}x^2 + \frac{1+4t}{t}$; $x \in \mathbb{R}$

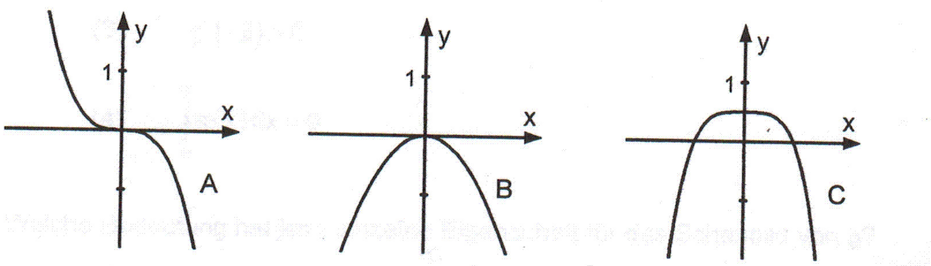
Das Schaubild von f_t ist K_t.

2.1.1 (9 Punkte)
Zeichnen Sie K_{-1} sowie die Gerade g mit der Gleichung $y = \frac{3}{2}x + 6$ in ein gemeinsames Koordinatensystem.
Die Orthogonale zur Geraden g durch den Punkt Q(0/6) bildet zusammen mit g und der x-Achse ein Dreieck.
K_{-1} begrenzt mit der x-Achse eine Fläche, die aus dem Dreieck ausgeschnitten wird.
Berechnen Sie den Inhalt der verbleibenden Fläche.

2.1.2 (4 Punkte)
Weisen sie nach, dass die Gerade mit der Gleichung y = x + 4 Tangente an $K_{-0,1}$ ist, und ermitteln Sie den zugehörigen Berührpunkt.
Bestimmen Sie die Gleichung der Normalen von $K_{-0,1}$ in diesem Punkt.

2.1.3 (3 Punkte)
Zeigen Sie, dass es keinen Punkt gibt, der auf allen Schaubildern K_t liegt.

2.1.4 (5 Punkte)
A ist das Schaubild einer Funktion, B das Schaubild ihrer Ableitungsfunktion und C das einer ihrer Stammfunktionen.



Es gibt einen Wert von t, für das K_t eines der Schaubilder A, B, C ist.
Bestimmen Sie diesen Wert von t.
Bestimmen Sie damit die Funktionsterme der zu A, B und C gehörenden Funktionen.

2.2
Für jedes a > 0 ist C_a das Schaubild der Funktion h_a mit
$h_a(x) = (x-4a) \cdot e^{-a \cdot x}$; $x \in \mathbb{R}$.

2.2.1 (3 Punkte)
Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte von C_a.

2.2.2 (6 Punkte)
Zeichnen Sie $C_{\frac{1}{4}}$.
Die Koordinatenachsen und das Schaubild $C_{\frac{1}{4}}$ schließen eine Fläche ein.
Diese Fläche rotiert um die x-Achse.
Bestimmen Sie das Volumen des dabei entstehenden Rotationskörpers.

2.2.3 (7 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Gerade mit der Gleichung $y = (4a^2+1) \cdot x - 4a$ mit a > 0 das Schaubild C_a
auf der y-Achse berührt.
Berechnen Sie den Wert von a, für den der Schnittpunkt dieser Geraden mit der x-Achse am weitesten rechts liegt.

2.3 (8 Punkte)
Die Funktion g hat folgende Eigenschaften:

(1) $g(1) = -1$ und $g'(1) = 0$
(2) $g'(0) > 0$
(3) $g''(-2) > 0$
(4) $\int_0^6 g(x)dx = 0$

Welche Bedeutung hat jede einzelne Eigenschaft für das Schaubild von g ?
Skizzieren Sie ein mögliches Schaubild von g.

Abiturprüfung Mathematik 2013 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien – Analysis, Lösung Aufgabe 1

1.1.1

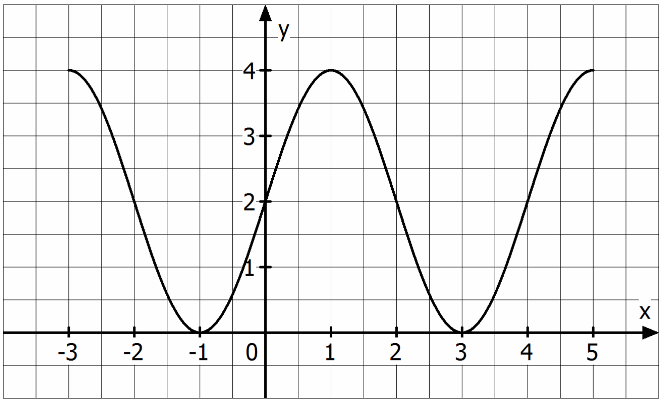
Das Schaubild K geht in folgenden Schritten aus $y = \sin(x)$ hervor:

1.) Streckung mit Faktor 2 in y-Richtung: $y = 2 \cdot \sin(x)$

2.) Streckung mit Faktor $\frac{2}{\pi}$ in x-Richtung (Kehrwert !): $y = 2 \cdot \sin(\frac{\pi}{2}x)$

3.) Verschiebung um 2 nach oben: $y = 2 \cdot \sin(\frac{\pi}{2}x) + 2$

Zeichnung des Schaubildes K:



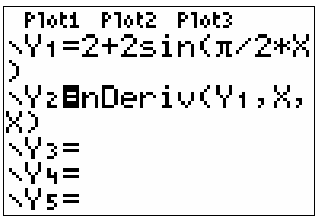
Die Periode von f beträgt $p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$ (was man auch aus der Zeichnung ablesen kann)

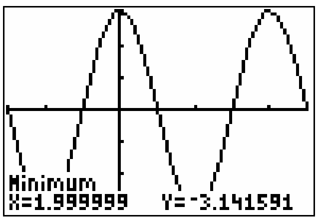
Die Wertemenge von f ist W = [0 ; 4].

1.1.2

Berechnung der Wendepunkte von f(x):
Hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$.

Mit dem GTR ergibt sich die Wendestelle als Extremstelle der Ableitungsfunktion $f'(x)$





Die Ableitungsfunktion hat zwei benachbarte Extremstellen bei x = 0 und x = 2.
Somit besitzt f zwei benachbarten Wendestellen bei x = 0 und x = 2.

Für die Schnittwinkel der Tangenten werden die Tangentensteigungen benötigt.

Es gilt $f'(x) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot \frac{\pi}{2} = \pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

Tangentensteigung bei x = 0: $f'(0) = \pi$

Tangentensteigung bei x= 2: $f'(2) = -\pi$

Schnittwinkel der Tangenten:

$\tan\alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right| \Rightarrow \tan\alpha = \left|\frac{\pi - (-\pi)}{1 - \pi^2}\right| \Rightarrow \tan\alpha \approx 0{,}708 \Rightarrow \alpha = 35{,}3°$

1.1.3

Anhand des Schaubildes K erkennt man, dass an den Stellen x = -1 und x = 3 zwei benachbarte Tiefpunkte existieren.

Fläche zwischen K und der x-Achse = $\int_{-1}^{3} f(x)dx = 8$ (GTR)

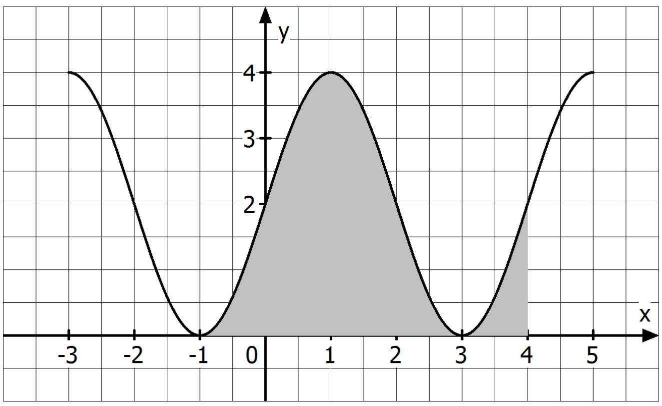
Stammfunktion F von f: $F(x) = 2x - 2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot \frac{2}{\pi} + C = 2x - \frac{4}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + C$

P(-1/0) liegt auf F(x): $0 = 2 \cdot (-1) - \frac{4}{\pi}\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + C \Rightarrow C = 2$

Die gesuchte Stammfunktion lautet $F(x) = 2x - \frac{4}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 2$

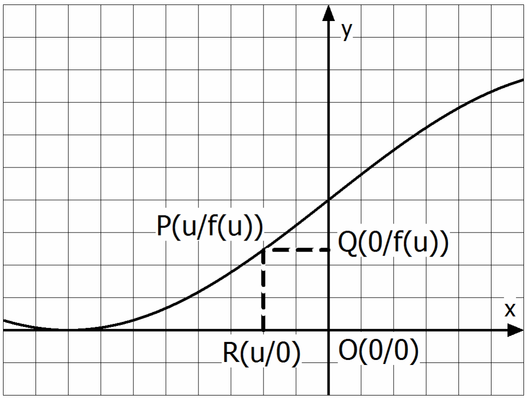
Es gilt $F(4) = 8 - \frac{4}{\pi}\cos(2\pi) + 2 = 10 - \frac{4}{\pi} \approx 8{,}73$

Da F(-1) = 0 ist, entspricht F(4) der Fläche im Intervall x = -1 bis x = 4 zwischen f(x) und der x-Achse:



1.1.4

Skizze des Rechtecks im 2.Quadrant:



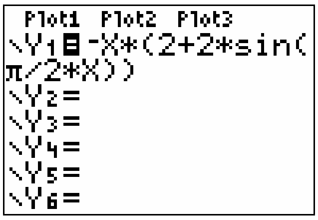
Gesucht ist der Wert von u mit u < 0, so dass das Rechteck RPQO einen maximalen Flächeninhalt besitzt.

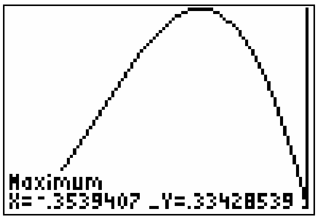
Aufstellen der Zielfunktion, die die Fläche des Rechtecks darstellt:
$A = \overline{PR} \cdot \overline{OR}$ mit $\overline{PR} = f(u) - 0 = f(u)$ und $\overline{OR} = (0 - u) = -u$

Daraus folgt $A(u) = -u \cdot f(u) = -u \cdot \left(2 + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}u\right)\right)$

Gesucht ist das absolute Maximum von A(u) im Intervall $-1 \le u \le 0$:
Hinreichende Bedingung für lokales Maximum: $A'(u) = 0$ und $A''(u) < 0$.

Lösung mit dem GTR:

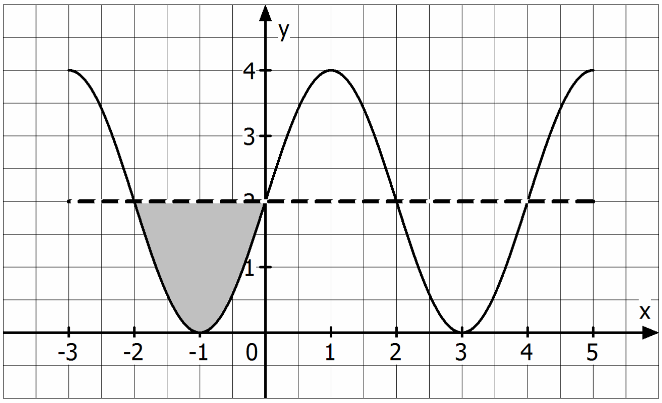




A(u) besitzt bei u = -0,354 ein lokales Maximum.
Da an den Rändern A(-1) = 0 und A(0) = 0 gilt, liegt bei u = -0,354 sogar ein absolutes Maximum vor.
Die maximale Fläche des Rechtecks ist A(-0,354) = 0,334 Flächeneinheiten.
Die Seitenlängen des Rechtecks betragen $\overline{OR} = 0{,}354$ und $\overline{PR} = f(-0{,}354) = 0{,}944$

1.1.5

Das Volumen soll für die Rotation der grauen Fläche bestimmt werden:



Für das Rotationsvolumen gilt: $V = \pi \cdot \int_{-2}^{0} (2^2 - f(x)^2)dx \approx 19,43$ Volumeneinheiten (GTR)

1.2.1

Es ist $g_{0,5}(x) = 0,5x + e^{-x}$ mit $g'_{0,5}(x) = 0,5 - e^{-x}$
Der Schnittpunkt mit der y-Achse lautet $S_y(0 / g_{0,5}(0)) = S_y(0 / 1)$

Die Steigung der Tangente an der Stelle x = 0 lautet $g'_{0,5}(0) = -0,5$.
Die Steigung der Normalen an der Stelle x = 0 lautet $m_{Normale} = -\frac{1}{m_{Tangente}} = -\frac{1}{-0,5} = 2$.

Nachweis, dass es keine Tangente mit der Steigung m = 2 existiert:
$g'_{0,5}(x) = 2 \Rightarrow 0,5 - e^{-x} = 2 \Rightarrow e^{-x} = -1,5$ diese Gleichung ist nicht lösbar
Damit gibt es keine Tangente, die parallel zur Normalen n ist.

1.2.2
Es gilt $g_a(x) = ax + e^{-x}$ mit $g'_a(x) = a - e^{-x}$

Bedingung, dass das Schaubild G_a die x-Achse berührt:
1.) gemeinsame Steigung: $g'_a(x) = 0$, also $a - e^{-x} = 0$ (*)
2.) gemeinsamer Punkt: $g_a(x) = 0$, also $ax + e^{-x} = 0$ (**)

Aus (*) folgt: $a = e^{-x}$.
Einsetzen in (**): $e^{-x} \cdot x + e^{-x} = 0 \Rightarrow e^{-x}(x+1) = 0$
Mit dem Satz vom Nullprodukt folgt als einzige Lösung x = -1.
Daraus folgt aus (*): $a = e^1$.

Für a = e berührt das Schaubild G_a die x-Achse.
Der Berührpunkt hat die Koordinaten B(-1/0).

1.3

Die Zuordnung der Schaubilder A, B, C auf die Funktionen H, h und h' kann man am einfachsten am Verhalten an der Stelle x = 0 durchführen:

Bei x = 0 besitzt das Schaubild C eine Wendestelle.
Bei x = 0 besitzt das Schaubild B eine Extremstelle (relatives Minimum).
Bei x = 0 besitzt das Schaubild A eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von - nach +.

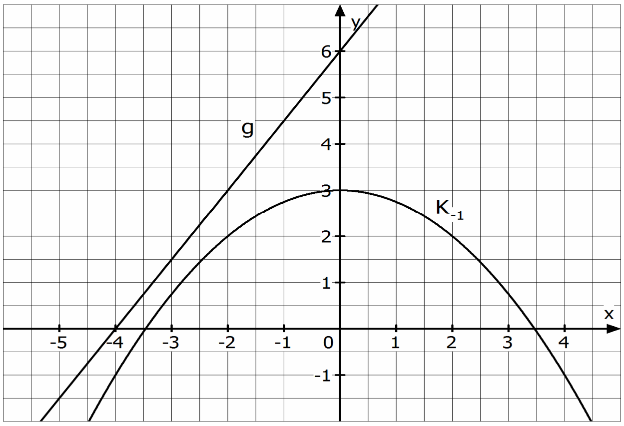
Somit gehört Schaubild C zur Stammfunktion H.
Schaubild B gehört zur Funktion h
Schaubild A gehört zur Ableitungsfunktion h'.

Abiturprüfung Mathematik 2013 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien – Analysis, Lösung Aufgabe 2

2.1.1

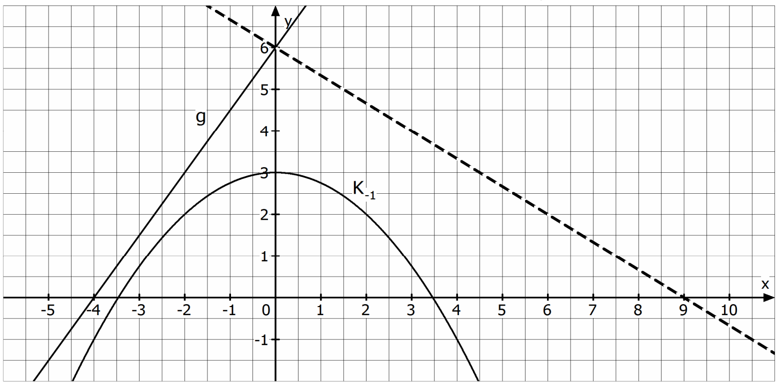
Zeichnung von K_{-1} sowie der Geraden g: $y = \frac{3}{2}x + 6$

Es ist $f_{-1}(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3$



Die Orthogonale zu g besitzt die Steigung $m = -\frac{1}{m_g} = -\frac{1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$.

Die Orthogonale durch Q(0/6) besitzt die Gleichung $y = -\frac{2}{3}x + 6$



Schnittstelle der Orthogonalen (gestrichelt) mit der x-Achse: $-\frac{2}{3}x + 6 = 0 \Rightarrow x = 9$

Die Grundseite des Dreiecks hat die Länge 13, die Dreieckshöhe ist 6.

Die Dreiecksfläche beträgt $A_1 = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 6 = 39$ FE

Schnittpunkt von K_{-1} mit der x-Achse: $-\frac{1}{4}x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{12}$

Fläche, die K_{-1} mit der x-Achse begrenzt: $A_2 = \int_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}} f_{-1}(x)dx \approx 13{,}856$ FE

Der Inhalt der verbleibenden Fläche beträgt $A = A_1 - A_2 = 25{,}144$ FE

2.1.2

Es ist $f_{-0,1}(x) = -0,025x^2 - 6$ mit $f'_{-0,1}(x) = -0,05x$.
Die Tangente besitzt die Steigung m = 1.

Berechnung der Berührstelle der Tangente: $f'_{-0,1}(x) = 1 \Rightarrow -0,05x = 1 \Rightarrow x = -20$
y-Wert des Berührpunktes: $f_{-0,1}(-20) = -16$, also B(-20/-16)

Die Gerade y = x + 4 ist dann die Tangente, wenn B auf der Gerade liegt.
Punktprobe: $-16 = -20 + 4$ ergibt eine wahre Aussage.

Damit ist y = x + 4 eine Tangente an das Schaubild mit dem Berührpunkt B(-20/-16).

Gleichung der Normalen im Punkt B(-20/-16):
Die Normalensteigung beträgt $m_{Normale} = -\frac{1}{m_{Tangente}} = -\frac{1}{1} = -1$.
Ansatz für die Normale: $y = -1 \cdot x + b$
Einsetzen von B(-20/-16): $-20 = 16 + b \Rightarrow b = -36$.
Die Gleichung der Normalen lautet $y = -x - 36$.

2.1.3
Nachweis, dass es keinen Punkt gibt, der auf allen Schaubildern der Schar liegt:

Zunächst werden zwei (beliebige) konkrete Parameterwerte gewählt: t = -0,1 und t = -1

Berechnung der Schnittpunkte der Schaubilder $K_{-0,1}$ und K_{-1}:
Mit $f_{-0,1}(x) = -0,025x^2 - 6$ und $f_{-1}(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3$ folgt:

$$-0,025x^2 - 6 = -\frac{1}{4}x^2 + 3 \quad \Rightarrow 0,225x^2 = 9 \Rightarrow x^2 = 40 \Rightarrow x = \pm\sqrt{40}$$

Mit $f_{-1}(\pm\sqrt{40}) = -\frac{1}{4} \cdot 40 + 3 = -7$ lauten die Schnittpunkte $S_{1,2}(\pm\sqrt{40} / -7)$.
Nun wird geprüft, ob diese Schnittpunkte auch auf allen anderen Schaubildern der Schar liegt.

Punktprobe von $S_{1,2}(\pm\sqrt{40} / -7)$ für die Funktionenschar:

$$-7 = \frac{t}{4} \cdot 40 + \frac{1+4t}{t} \Rightarrow -7 = 10t + \frac{1}{t} + 4$$

Da diese Gleichung nicht für alle Werte von t gültig ist (dies wäre nur der Fall, wenn sich die Parameterwerte auflösen würden), liegen die beiden Punkte nicht auf allen Schaubildern der Schar.

Somit gibt es keinen Punkt, der auf allen Schaubildern der Schar liegt.

2.1.4

Das Schaubild A ist eine ganzrationale Funktion 3.Grades, B ist eine ganzrationale Funktion 2.Grades und C eine ganzrationale Funktion 4.Grades.

Somit kann K_t nur zu Schaubild B gehören.
Das Schaubild B verläuft durch O(0/0).

Es muss also gelten: $f_t(0) = 0 \Rightarrow \frac{t}{4} \cdot 0^2 + \frac{1+4t}{t} = 0 \Rightarrow 1 + 4t = 0 \Rightarrow t = -0,25$

Die Funktion $f_{-0,25}(x) = -\frac{1}{16}x^2$ gehört zum Schaubild B.

Die Funktion $g(x) = -\frac{1}{48}x^3$ gehört als Stammfunktion von $f_{-0,25}$ zum Schaubild A.

Die Funktion $h(x) = -\frac{1}{192}x^4 + 0,5$ gehört als Stammfunktion von g zum Schaubild C.

(Der Summand "+0,5" ist erforderlich, da das Schaubild C durch den Punkt P(0/0,5) verläuft.

2.2.1

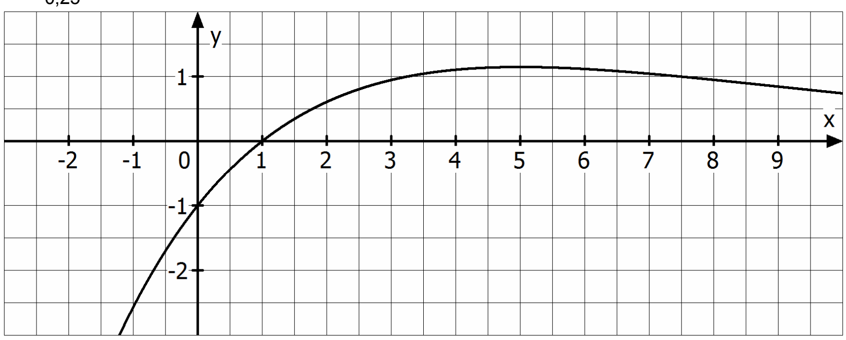
Schnittpunkt von C_a mit der y-Achse: $h_a(0) = (0 - 4a) \cdot e^0 = -4a$, also $S_y(0 / -4a)$.

Schnittpunkt von C_a mit der x-Achse: $h_a(x) = 0 \Rightarrow (x - 4a) \cdot e^{-ax} = 0$
Mit dem Satz vom Nullprodukt folgt x = 4a.
Der Schnittpunkt mit der x-Achse lautet $N(4a / 0)$.

2.2.2

Es ist $h_{0,25}(x) = (x-1) \cdot e^{-0,25x}$

Zeichnung von $C_{0,25}$:



Die Funktion $h_{\frac{1}{4}}(x) = (x-1) \cdot e^{-0,25x}$ schneidet die x-Achse an der Stelle x = 1.

Berechnung des Volumens des Rotationskörpers: $V = \pi \cdot \int_0^1 h_{0,25}(x)^2 dx \approx 0,928$ VE (GTR)

2.2.3

Die Gerade wird bezeichnet mit $g_a(x) = (4a^2 + 1) \cdot x - 4a$
Nachweis, dass die Gerade das Schaubild C_a auf der y-Achse berührt:

1. Bedingung: gemeinsamer Punkt der Gerade und des Schaubildes bei x = 0:

$h_a(0) = -4a$ und $g_a(0) = -4a$

Die beiden Schaubilder haben den gemeinsamen Punkt B(0/4a).

2. Bedingung: gemeinsame Steigung an der Stelle x = 0:

Es ist $g_a'(x) = 4a^2 + 1$ und daher $g_a'(0) = 4a^2 + 1$.
Es ist $h_a'(x) = 1 \cdot e^{-ax} + (x - 4a) \cdot e^{-ax} \cdot (-a)$ und daher
$h_a'(0) = 1 \cdot e^0 + (-4a) \cdot e_0 \cdot (-a) = 1 + 4a^2$

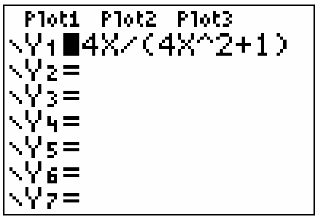
Die beiden Schaubilder besitzen bei x = 0 dieselbe Steigung.

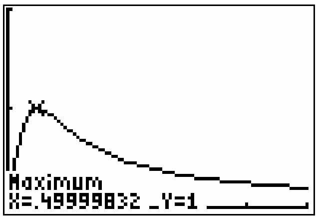
Damit ist gezeigt, dass sich die beiden Schaubilder auf der y-Achse berühren.

Schnittstelle der Geraden mit der x-Achse:
$(4a^2 + 1) \cdot x - 4a = 0 \Rightarrow x = \dfrac{4a}{4a^2 + 1}$

Gesucht ist der Wert von a, für den der Term $\dfrac{4a}{4a^2 + 1}$ für a > 0 ein absolutes Maximum annimmt.

Lösung mit dem GTR:





Der Term besitzt ein absolutes Maximum für a = 0,5.

2.3

(1) g(1) = -1 und $g'(1) = 0$: Der Punkt P(1/-1) liegt auf dem Schaubild von g und besitzt eine waagrechte Tangente.

(2) $g'(0) > 0$: An der Stelle x = 0 ist die Steigung der Tangente an das Schaubild von g positiv.

(3) $g''(-2) > 0$: An der Stelle x = -2 ist das Schaubild von g linksgekrümmt.

(4) $\int_0^6 g(x)dx = 0$: Zwischen x = 0 und x = 6 sind die Flächen, die das Schaubild von g(x) oberhalb und unterhalb mit der x-Achse einschließen, gleich groß.

Ein mögliches Schaubild von g könnte so aussehen: