Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG, BTG)
Hauptprüfung 2013 Teil 4, Lineare Optimierung, Aufgabe 1
Baden-Württemberg

1
Ein Unternehmen fertigt zwei Arten von Ledergürteln, das Modell "Texas" und das Modell "Arizona".

1.1
Zur Herstellung eines Gürtels "Texas" werden zwei Zeiteinheiten (ZE) benötigt, die Herstellung eines Gürtels "Arizona" erfordert eine ZE. Für die Fertigung beider Modelle stehen insgesamt 1000 ZE pro Tag zur Verfügung.
Die Lagerkapazität erlaubt die Herstellung von höchstens 800 Ledergürteln pro Tag.
Modell "Texas" wird mit einer besonderen Schnalle versehen, von der pro Tag höchstens 400 zur Verfügung stehen. Für Modell "Arizona" stehen täglich maximal 700 Schnallen zur Verfügung.
Der Gewinn je Gürtel beträgt bei Modell "Texas" 4 € und bei Modell "Arizona" 3 €.

1.1.1 (6 Punkte)
Ermitteln Sie grafisch, wie viele Gürtel "Texas" und wie viele Gürtel "Arizona" hergestellt werden müssen, um den Gewinn zu maximieren.

1.1.2 (3 Punkte)
Eine Analyse hat ergeben, dass pro Gürtel "Texas" ein Gewinn von mindestens 1 € und höchstens 5 € veranschlagt werden kann.
Bestimmen Sie den Gewinn für einen Gürtel "Texas", bei dem das Unternehmen mehrere Möglichkeiten hat, den maximalen Gewinn zu erzielen.

1.2 (6 Punkte)
Die Produktpalette des Unternehmens soll um das Gürtel-Modell "New-Mexico" erweitert werden. Mit Hilfe des Simplexalgorithmus soll das gewinnmaximale Produktionsprogramm ermittelt werden. Es ergibt sich folgendes Starttableau:

x	y	z	u	v	w	b_i
3	1	2	1	0	0	1800
1	1	1	0	1	0	1200
1	0	1	0	0	1	800
4	3	3,5	0	0	0	G

x: Anzahl Modell "Texas" y: Anzahl Modell "Arizona"
z: Anzahl Modell "New-Mexico" u,v,w sind Schlupfvariable

Berechnen Sie das nächste Tableau und erläutern Sie die ökonomischen Überlegungen zur Wahl des Pivotelements.

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG, BTG)
Hauptprüfung 20131 Teil 4, Lineare Optimierung, Lösung zu Aufgabe 1
Baden-Württemberg

1.1.1

Es werden folgende Variablen festgelegt:

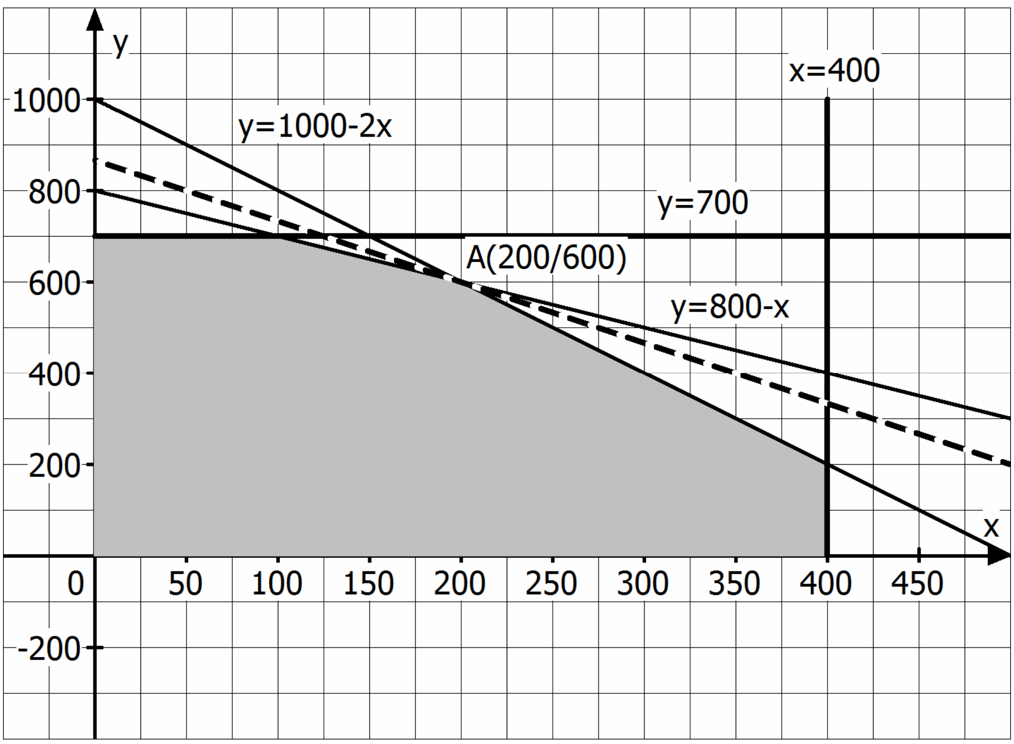
x = Anzahl der Gürtel "Texas", die pro Tag hergestellt und verkauft werden
y = Anzahl der Gürtel "Arizona" die pro Tag hergestellt und verkauft werden

Folgende Ungleichungen sind aufgrund der Vorgaben gegeben:

$x \geq 0$ und $y \geq 0$ (Nichtnegativitätsbedingung)
$2x + y \leq 1000 \Leftrightarrow y \leq 1000 - 2x$ (maximal 1000 ZE pro Tag)
$x + y \leq 800 \Leftrightarrow y \leq 800 - x$ (Lagerkapazität maximal 800)
$x \leq 400$ (maximal 400 Schnallen von Modell "Texas")
$y \leq 700$ (maximal 700 Schnallen von Modell "Arizona")

Die Zielfunktion lautet $G = 4x + 3y$ (Gewinn)

$$\Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{G}{3}$$ (gestrichelte Gerade)



Die gestrichelte Gerade kann soweit nach oben verschoben werden, dass sie mit der grauen Fläche noch den Eckpunkt A(200/600) gemeinsam hat.
Es müssen somit x = 200 Gürtel von Texas und y = 600 Gürtel von Arizona hergestellt werden. Der maximale Gewinn beträgt dann $G = 4 \cdot 200 + 3 \cdot 600 = 2600$ Euro

1.1.2

Der Gewinn des Gürtels "Texas" sei a.

Die Zielfunktion lautet nun $G = ax + 3y \quad \Leftrightarrow y = -\frac{a}{3}x + \frac{G}{3}$

Das Unternehmen hat dann mehrere Möglichkeiten, wenn die gestrichelte Gerade auf einer Randgeraden der schraffierten Fläche liegt, das heißt, wenn die gestrichelte Gerade dieselbe Steigung wie eine Randgerade besitzt.

Eine Randgerade lautet $y = 800 - x$, also Steigung m = -1.

Wenn $-\frac{a}{3} = -1 \Leftrightarrow a = 3$ ist, ist die gestrichelte Gerade parallel.

Eine weitere Randgerade lautet $y = 1000 - 2x$, also Steigung m = -2.

Wenn $-\frac{a}{3} = -2 \Leftrightarrow a = 6$ ist, ist die gestrichelte Gerade parallel.

Bei einem Gewinn von 3 Euro oder 6 Euro für den Gürtel "Texas" gibt es mehrere Möglichkeiten, den maximalen Gewinn zu erzielen.
Da der Gewinn laut Vorgabe maximal 5 Euro sein kann, bleibt als möglicher Gewinn nur noch 3 Euro übrig.

1.2

x	y	z	u	v	w	b_i	Quotient
3	1	2	1	0	0	1800	1800/3=600
1	1	1	0	1	0	1200	1200/1=1200
1	0	1	0	0	1	800	800/1=800
4	3	3,5	0	0	0	G	

Die Lösung des Ausgangstableaus würde lauten:
u = 1800, v = 1200, w = 800 , x = y = z = 0 und Gewinn G = 0.

Der Gewinn G kann noch weiter gesteigert werden.

An der letzten Zielfunktionszeile der Simplextabelle erkennt man folgendes:
Wenn x um 1 ansteigt, steigt G um 4 €.
Wenn y um 1 ansteigt, steigt G um 3 €.
Wenn z um 1 ansteigt, steigt G um 3,50 €.
Der Wert von G kann **am stärksten gesteigert** werden, wenn sich x ändert.
Daher ist die x-Spalte die Pivot-Spalte.

Die erste Zeile stellt mit $3x \leq 1800 \Leftrightarrow x \leq 600$ den größten Engpass hinsichtlich der Variable x dar. Daher ist die erste Zeile die Pivotzeile.
Das Pivotelement ist 3.

Division der 1.Zeile durch 3:

Nummer	x	y	z	u	v	w	b_i	Umformung
(1)	**1**	1/3	2/3	1/3	0	0	600	
(2)	1	1	1	0	1	0	1200	(2) - (1)
(3)	1	0	1	0	0	1	800	(3)- (1)
(4)	4	3	3,5	0	0	0	G	$(4) - 4 \cdot (1)$

Das nächste Tableau hat folgende Gestalt:

Nummer	x	y	z	u	v	w	b_i
(1)	**1**	1/3	2/3	1/3	0	0	600
(2)	0	2/3	1/3	-1/3	1	0	600
(3)	0	-1/3	1/3	-1/3	0	1	200
(4)	0	5/3	5/6	-4/3	0	0	G-2400

Die Lösung dieses (noch nicht optimalen) Tableaus lautet:
u = 0, v = 600, w = 200 , x = 600; y = z = 0 und Gewinn G = 2400 €.