Hauptprüfung Abiturprüfung 2014 (ohne CAS)

Baden-Württemberg

Vektorgeometrie

Hilfsmittel: GTR, Formelsammlung

berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

März 2014

1

Gegeben sind die Geraden

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix};\quad r \in \mathbb{R}$$

und

$$h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix};\quad s \in \mathbb{R}$$

sowie die Punkte A(1/3/-5), B(5/-5/7), C(7/-9/14) und D(3/-1/2).

1.1
Zeigen Sie, dass die Geraden g und h parallel, aber nicht identisch sind.
Geben Sie eine Gleichung der Ebene an, die g und h enthält.

(4 Punkte)

1.2
Untersuchen Sie, ob die Punkte A, B, C und D in einer gemeinsamen Ebene liegen.

(2 Punkte)

1.3
Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm, aber kein Rechteck ist.

(4 Punkte)

1.4
Untersuchen Sie, ob die Gerade

$$k:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix};\quad t \in \mathbb{R}$$

die Fläche des Parallelogramms ABCD durchstößt.

(5 Punkte)

Lösungen

1.1

Zeigen Sie, dass die Geraden g und h parallel, aber nicht identisch sind.

Die Richtungsvektoren der beiden Geraden sind Vielfache: $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Daraus folgt, dass die Geraden g und h parallel sind.

Die Geraden wären identisch, wenn der Punkt G(1/3/-5), der auf g liegt, auch auf der Geraden h liegen würde.

Die Punktprobe ergibt: $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

1.Zeile: $1 = 3 - s \Leftrightarrow s = 2$
2.Zeile: $3 = -1 + 2s \Leftrightarrow s = 2$
3.Zeile: $-5 = 2 - 3s \Leftrightarrow s = \frac{7}{3}$
Da nicht in der jeder Zeile derselbe Wert für s entsteht, liegt G(1/3/-5) nicht auf der Geraden h. Somit sind die Geraden zwar parallel, aber nicht identisch.

Geben Sie eine Gleichung der Ebene an, die g und h enthält.

Da g in der Ebene liegt, können für die Ebenengleichung der Orts- und Richtungsvektor von g übernommen werden.
Der zweite Richtungsvektor der Ebene ist der Verbindungsvektor der beiden Geradenpunkte G(1/3/-5) und H(3/-1/2), also $\overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}; \quad r,s \in \mathbb{R}$

1.2

Untersuchen Sie, ob die Punkte A, B, C und D in einer gemeinsamen Ebene liegen.

Zunächst wird die Gleichung der Ebene F aufgestellt, die die Punkte A, B, C enthält.

$$F:\quad \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 19 \end{pmatrix} \quad ; \quad r,s \in \mathbb{R}$$

Nun wird geprüft, ob der Punkt D(3/-1/2) ebenfalls in der Ebene F liegt.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 19 \end{pmatrix}$$

Zu lösen ist folgendes Gleichungssystem:
$$\begin{array}{rrcr} 4r & +6s & = & 2 \\ -8r & -12s & = & -4 \\ 12r & +19s & = & 7 \end{array}$$

Mit dem GTR ergibt sich die Lösung r = -1 , s = 1

Daraus folgt, dass D ebenfalls auf der Ebene F liegt.

Ergebnis: Die Punkte A, B, C und D liegen in einer gemeinsamen Ebene.

1.3

Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm, aber kein Rechteck ist.

Das Viereck ABCD ist ein Parallelogramm, wenn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ gilt.

Es ist $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}$

Damit ist gezeigt, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.

Das Parallelogramm ist nur dann ein Rechteck, wenn die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ senkrecht aufeinander stehen. Dies wird mit Hilfe des Skalarproduktes geprüft.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} = 8 + 32 + 84 \neq 0$$

Damit stehen die Vektoren nicht aufeinander senkrecht und es handelt sich somit auch um kein Rechteck.

1.4

Untersuchen Sie, ob die Gerade k die Fläche des Parallelogramms ABCD durchstößt.

Die Fläche des Parallelogramms ABCD liegt in der Ebene F aus Teilaufgabe 1.2

Zunächst wird der Schnittpunkt der Gerade k und der Ebene F berechnet:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 19 \end{pmatrix}$$

Das zugehörige Gleichungssytem lautet:
$$\begin{array}{rrrcr} 4t & -4r & -6s & = & 0 \\ 8t & +8r & +12s & = & 4 \\ 2t & -12r & -19s & = & -2 \end{array}$$

Lösung mit dem GTR: t = 0,25 ; r = 1 ; s = -0,5

Einsetzen von t = 0,25 in k liefert den Schnittpunkt S(2/1/-2,5).

Damit die Gerade k die Fläche des Parallelogramms durchstößt, müsste der Punkt S innerhalb des Parallelogramms liegen.

Setzt man die Werte r = 1 und s = -0,5 in den Ansatz der Ebene F aus Teilaufgabe 1.2 ein, ergibt sich $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + 1 \cdot \overrightarrow{AB} - 0{,}5 \cdot \overrightarrow{AC}$

Damit der Punkt S innerhalb des Parallelogramms liegt, muss folgende Bedingung gelten:
$0 \le r, s \le 1$.
Diese Bedingung ist jedoch nicht erfüllt.

Ergebnis: Die Gerade k durchstößt nicht die Fläche des Parallelogramms ABCD.