Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2007 Teil 2, Wirtschaftliche Anwendungen, Aufgabe 1
Baden-Württemberg

1.1
Eine Feuerwerksfabrik stellt aus vier verschiedenen Pulversorten P_1, P_2, P_3 und P_4 Feuerwerksartikel (Feuerwerksrakete Z_1, Sprühfeuer Z_2 und Knallfrosch Z_3) her. Diese wurden in zwei verschiedenen Sortimenten (E_1 und E_2) verkauft.
Die folgenden Tabellen geben an, wie viele ME der einzelnen Pulversorten für jeweils einen Feuerwerksartikel bzw. wie viele Feuerwerksartikel für je ein Sortiment bzw. wie viele ME der einzelnen Pulver für je ein Sortiment benötigt werden.

	Z_1	Z_2	Z_3
P_1	a	20	b
P_2	8	11	7
P_3	15	0	13
P_4	18	c	0

	E_1	E_2
Z_1	7	3
Z_2	2	6
Z_3	10	15

	E_1	E_2
P_1	110	150
P_2	148	195
P_3	235	240
P_4	160	156

Die Kosten (in GE) für je eine ME der Pulversorten, für die Fertigung von je einem Feuerwerksartikel und für die Verpackung von je einem Sortiment sind durch folgende Vektoren gegeben:

$\vec{k}_P = (0{,}01 \quad 0{,}01 \quad 0{,}02 \quad 0{,}01)^T$ $\quad$ $\vec{k}_Z = (0{,}50 \quad 0{,}25 \quad 0{,}10)^T$ $\quad$ $\vec{k}_E = (0{,}25 \quad 0{,}20)^T$

1.1.1
Berechnen Sie die Variablen a, b und c. (4 Punkte)

1.1.2
Die Feuerwerksfabrik möchte ihr Lager räumen. Deshalb werden die Sortimente zu einem Preis, der die jeweiligen variablen Herstellkosten deckt, verkauft. Welche Preise ergeben sich hieraus für die Sortimente E_1 und E_2 ? (3 Punkte)

1.1.3
Ein weiteres Sortiment enthält 25 Feuerwerksartikel. Für dieses Sortiment werden genau 220 ME der Pulversorte P_1 verarbeitet. Die benötigten Mengen der Pulversorten P_2 und P_4 betragen höchstens 220 ME. Die benötigte Menge der Pulversorte P_3 unterliegt keinen Begrenzungen. Wie kann das neue Sortiment zusammengestellt werden ? (7 Punkte)

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2007 Teil 2, Wirtschaftliche Anwendungen, Lösungen Aufgabe 1
Baden-Württemberg

1.1.1
Aus den Tabellen können folgende Matrizen abgeleitet werden:

$$A = \begin{pmatrix} a & 20 & b \\ 8 & 11 & 7 \\ 15 & 0 & 13 \\ 18 & c & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 6 \\ 10 & 15 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 110 & 150 \\ 148 & 195 \\ 235 & 240 \\ 160 & 156 \end{pmatrix}$$

Es gilt die Formel: $A \cdot B = C$
Da von der Matrix B nicht die Inverse B^{-1} nicht ermittelt werden kann (sie ist nicht quadratisch), können die Werte der Matrix A nicht mit der Formel $A = C \cdot B^{-1}$ berechnet werden.

Es gilt: $$A \cdot B = \begin{pmatrix} 7a+40+10b & 3a+120+15b \\ 148 & 195 \\ 235 & 240 \\ 126+2c & 54+6c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 & 150 \\ 148 & 195 \\ 235 & 240 \\ 160 & 156 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich folgendes LGS:
$7a+40+10b = 110$ (1)
$3a+120+15b = 150$ (2)
$126+2c = 160$ (3)
$54+6c = 156$ (4)

Aus (3) und (4) folgt c = 17 und aus den Gleichungen (1) und (2) folgt a = 10 und b = 0.

Daraus folgt $$A = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 0 \\ 8 & 11 & 7 \\ 15 & 0 & 13 \\ 18 & 17 & 0 \end{pmatrix}$$

1.1.2

Zu berechnen ist der variable Stückkostenvektor $\overrightarrow{k_V}^T$ mit der Formel:
$\overrightarrow{k_V} = \overrightarrow{k_P}^T \cdot C + \overrightarrow{k_Z}^T \cdot B + \overrightarrow{k_E}^T$

$$\overrightarrow{k_V} = \begin{pmatrix}0{,}01 & 0{,}01 & 0{,}02 & 0{,}01\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}110 & 150\\148 & 195\\235 & 240\\160 & 156\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0{,}50 & 0{,}25 & 0{,}10\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}7 & 3\\2 & 6\\10 & 15\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0{,}25 & 0{,}20\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}8{,}88 & 9{,}81\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5 & 4{,}5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0{,}25 & 0{,}20\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14{,}13 & 14{,}51\end{pmatrix}$$

Der Preis für E_1 beträgt 14,13 GE, der Preis für E_2 beträgt 14,51 GE.

1.1.3

Der Zwischenproduktvektor der Feuerwerksartikel lautet $\vec{z} = \begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}$ und es gilt:

$z_1 + z_2 + z_3 = 25 \quad (1)$

Der Vektor der Pulvermengen lautet $\vec{r} = \begin{pmatrix}220\\r_2\\r_3\\r_4\end{pmatrix}$ mit $r_2, r_4 \leq 220$.

Es gilt: $A \cdot \vec{z} = \vec{r} \Rightarrow \begin{pmatrix}10 & 20 & 0\\8 & 11 & 7\\15 & 0 & 13\\18 & 17 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}220\\r_2\\r_3\\r_4\end{pmatrix}$ mit $r_2, r_4 \leq 220 \qquad (2)$

Aus der 1.Zeile von (2) ergibt sich folgende Gleichung:

$10z_1 + 20z_2 = 220 \Rightarrow z_1 = 22 - 2z_2 \quad (3)$
Aus (*) folgt $z_3 = 25 - z_1 - z_2$ und mit (3) folgt $z_3 = 25 - (22 - 2z_2) - z_2 = 3 + z_2 \quad (4)$

Setzt man (3) und (4) in die 2.Zeile von (2) ein folgt:
$8(22 - 2z_2) + 11z_2 + 7(3 + z_2) \leq 220$
$\Rightarrow 176 - 16z_2 + 11z_2 + 21 + 7z_2 \leq 220 \Rightarrow 2z_2 \leq 23 \Rightarrow z_2 \leq 11{,}5$

Setzt man (3) und (4) in die 4.Zeile von (2) ein folgt:
$18(22 - 2z_2) + 17z_2 \leq 220$
$\Rightarrow 396 - 36z_2 + 17z_2 \leq 220 \Rightarrow -19z_2 \leq -176 \Rightarrow z_2 \geq 9{,}26$

Da z_2 nur ganzzahlige Werte annehmen kann, folgt $z_2 = 10$ oder $z_2 = 11$.

Das neue Sortiment kann somit auf zwei verschiedene Weisen zusammengestellt werden.

1.Möglichkeit:

$z_2 = 10$ und damit $z_1 = 2$ und $z_3 = 13$ und folglich $\vec{r} = \begin{pmatrix} 220 \\ 217 \\ 199 \\ 206 \end{pmatrix}$

2.Möglichkeit:

$z_2 = 11$ und damit $z_1 = 0$ und $z_3 = 14$ und folglich $\vec{r} = \begin{pmatrix} 220 \\ 219 \\ 182 \\ 187 \end{pmatrix}$