Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2007 Teil 2, Vektorgeometrie, Aufgabe 1
Baden-Württemberg

1.1
Im Anschauungsraum sind die Punkte A(-1/-1/4), B(3/2/1) und die Gerade

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix},\ r \in \mathbb{R}$$

sowie für jedes $t \in \mathbb{R}$ der Punkt $C_t(-5/0/t)$ gegeben.

1.1.1
Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden g und der Geraden (AC_5).
(4 Punkte)

1.1.2
Zeigen Sie: Es gibt kein t, so dass die Gerade (AC_t) parallel zur Geraden g ist.
(2 Punkte)

1.1.3
Die Punkte A und C_t haben den Abstand 6. Bestimmen Sie das zugehörige t.
(3 Punkte)

1.1.4
Der Punkt P liegt in der von den Punkten A, B und C_5 festgelegten Ebene.
Eine Parallele zur x_3-Achse durch P schneidet die $x_1 - x_2$-Ebene im Punkt
$\overline{P}(-5/4/0)$. Berechnen Sie die Koordinaten von P. (5 Punkte)

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2007 Teil 2, Vektorgeometrie, Lösung zu Aufgabe 1
Baden-Württemberg

1.1.1

Gleichung der Gerade AC_5: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt der Geraden durch Gleichsetzen:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} &12r + 4t = -4 \\ &5r - t = -7 \\ &-7r - t = 5 \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem besitzt die Lösung r = -1 und t = 2 (GTR oder Additionsverfahren)
Einsetzen von r = -1 oder t = 2 in die Geradengleichungen ergibt als Schnittpunkt S(-9/1/6).

1.1.2
Damit die Gerade AC_t parallel zur Geraden g ist, müssen die Richtungsvektoren der beiden Geraden Vielfache zueinander sein.

Richtungsvektor von AC_t: $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ t-4 \end{pmatrix}$

Kontrolle: Gibt es einen Wert für k, so dass gilt: $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ t-4 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$?

Aus der 1.Zeile folgt $k = -\frac{1}{3}$, aus der 2.Zeile $k = \frac{1}{5}$. Aus diesem Widerspruch folgt, dass die Vektoren für keinen t-Wert Vielfache zueinander sind und die Geraden damit nie parallel sein können.

1.1.3

$$\overline{AC_t} = \left|\overrightarrow{AC_t}\right| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ t-4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+1+(t-4)^2} = \sqrt{t^2-8t+33}$$

Nun soll gelten: $\sqrt{t^2-8t+33} = 6 \Rightarrow t^2-8t+33 = 36 \Rightarrow t^2-8t-3 = 0$
Die Lösung der quadratischen Gleichung lautet
$t_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64+12}}{2} = \frac{8 \pm 2 \cdot \sqrt{19}}{2} = 4 \pm \sqrt{19}$
Für diese beiden t-Werte beträgt der Abstand von A zu C_t 6 Längeneinheiten.

1.1.4

Aufstellen der Ebenengleichung durch die Punkte A, B und C_5:

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Parallele zur x_3-Achse durch P besitzt die Gleichung h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Der Schnittpunkt der Ebene E und der Geraden h ergibt P:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich das Gleichungssystem:

$$4r - 4s = -4$$
$$3r + s = 5$$
$$-3r + s - t = -4$$

Mit Hilfe des GTR oder des Additionsverfahrens ergibt sich die Lösung r = 1, s = 2, t = 3.

Einsetzen von t = 3 in die Geradengleichung ergibt P(-5/4/3).