Abiturprüfung Mathematik 2007 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien ohne TG – Analysis, Aufgabe 1

1.1 (8 Punkte)
Das Schaubild einer Polynomfunktion 4. Grades geht durch den Punkt S(0/2) und hat den Wendepunkt $W(1/\frac{31}{12})$. Die Normale im Punkt $P(-3/\frac{5}{4})$ hat die Steigung $\frac{1}{5}$.
Bestimmen Sie den Funktionsterm

1.2
Für t > 0 ist die Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{t^2}{2}x^2 + x + 2 \; ; \; x \in \mathbb{R}.$$

Das Schaubild von f_t heißt K_t.

1.2.1 (9 Punkte)
Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte von K_1.
Zeigen Sie: Die Tangente an K_1 im Schnittpunkt mit der y-Achse ist parallel zu der Geraden durch die Wendepunkte. Zeichnen Sie K_1.

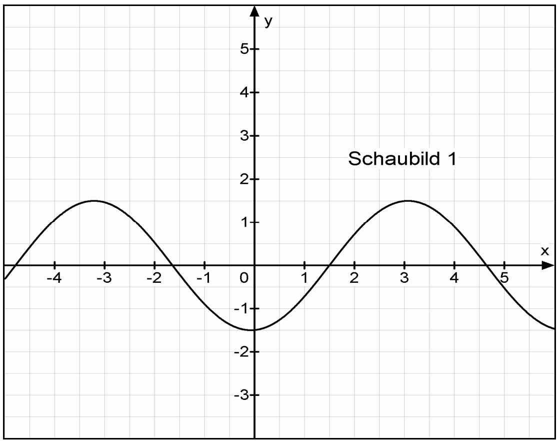
1.2.2 (7 Punkte)
Die Gerade mit der Gleichung $y = x + 2$ schließt mit K_1 zwei Flächenstücke ein.
Berechnen Sie den exakten Inhalt eines der beiden Flächenstücke.

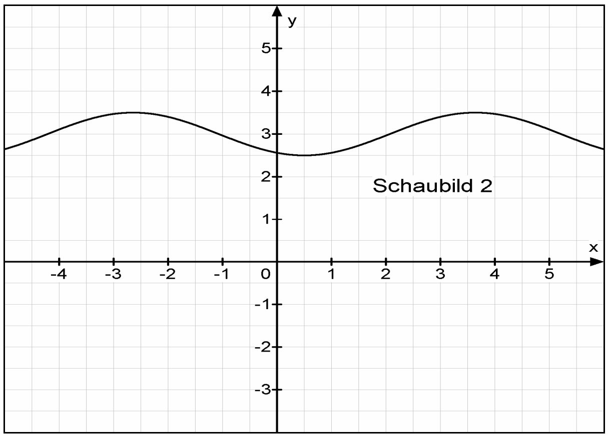
1.2.3 (7 Punkte)
Bestimmen Sie die Ortskurve der Wendepunkte von K_t, die links von der y-Achse liegen.

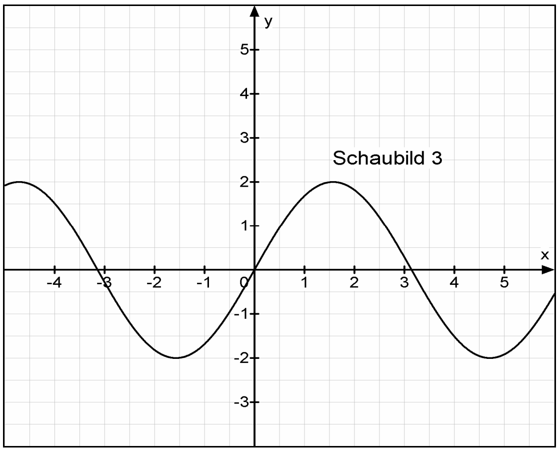
1.3
Für $0 < a < \frac{\pi}{2}$ ist die Funktion h_a gegeben durch
$h_a(x) = a \cdot \sin(x - a)$, $x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von h_a heißt C_a.

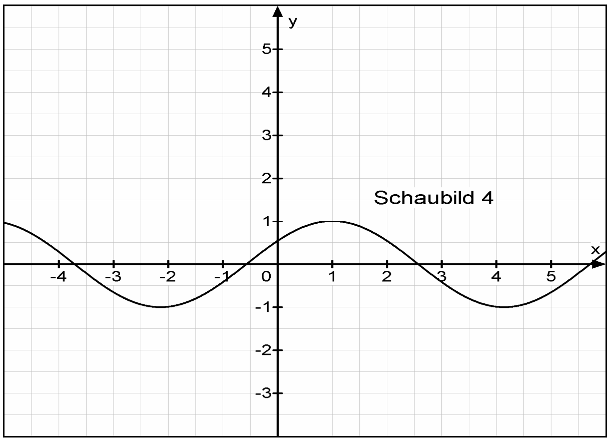
1.3.1 (6 Punkte)
Wie entsteht das Schaubild C_a aus dem Schaubild der Funktion k mit $k(x) = \sin(x)$?
Geben Sie zwei Schnittpunkte mit der x-Achse, einen Hoch- und einen Tiefpunkt von C_a an.

1.3.2 (8 Punkte)
Die folgenden Abbildungen zeigen Schaubilder einer Funktion h_{a_1}, einer Ableitungsfunktion h'_{a_2}, einer Stammfunktion H_{a_3} von h_{a_3} und einer weiteren Funktion.
Ordnen Sie die Schaubilder den Funktionen zu und begründen Sie diese Zuordnung.
Geben Sie a_1, a_2 und a_3 an.









Abiturprüfung Mathematik 2007 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien ohne TG – Analysis, Aufgabe 2

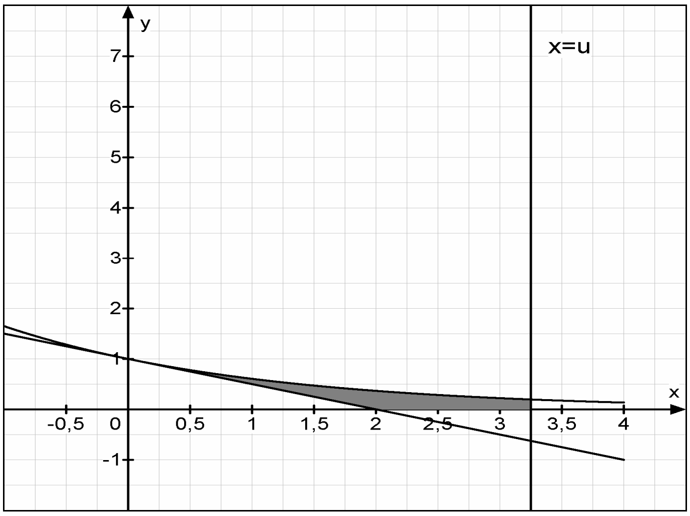
2.1
Gegeben ist für jedes a > 0 die Funktion f_a durch
$f_a(x) = e^{-ax}$; $x \in \mathbb{R}$

K_a ist das Schaubild von f_a.

2.1.1 (6 Punkte)
Betrachten Sie K_a für verschiedene Werte von a und geben Sie drei gemeinsame Eigenschaften an.
Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von K_a.

2.1.2 (6 Punkte)
Die Tangente und die Normale von K_1 im Punkt S(0/1) begrenzen zusammen mit der x-Achse ein Dreieck.
Begründen Sie, dass das Dreieck gleichschenklig ist und berechnen Sie seinen Umfang.

2.1.3 (11 Punkte)
Die folgende Abbildung zeigt ein Schaubild K_a mit der zugehörigen Tangente im Punkt S(0/1) sowie die Gerade mit der Gleichung x = u.



Begründen Sie, dass das Schaubild zum Wert a = 0,5 gehört.
Berechnen Sie für u = 3 den Inhalt der grau unterlegten Fläche.
Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt für u > 3 den Wert 1 nicht überschreitet.

2.1.4 (6 Punkte)
Für a > 0 und c > 0 ist eine Funktion g gegeben durch
$g(x) = f_a(x - c)$; $x \in \mathbb{R}$
Wie entsteht das Schaubild von g aus K_a ?
g(x) beschreibt den Wert eines PKW in € nach x Jahren.
Beim Kauf (x = 0) hat der PKW einen Wert von 20.000 €.
Der jährliche Wertverlust beträgt 16%. Wie müssen a und c gewählt werden, damit g diesen Sachverhalt beschreibt ?

2.2
Gegeben ist die Funktion h mit
$h(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$; $x \in [-1 ; 3]$
C ist das Schaubild von h.

2.2.1 (4 Punkte)
Bestimmen Sie die Nullstelle und den Wertebereich von h. Zeichnen Sie C.

2.2.2 (4 Punkte)
Durch die Achsenschnittpunkte von C ist eine Gerade festgelegt.
Es gibt eine Tangente an C, die parallel zu dieser Gerade verläuft.
Berechnen Sie die Koordinaten des Berührpunktes.

2.2.3 (8 Punkte)
In die Fläche, die C mit den Koordinatenachsen einschließt, soll ein Viereck mit möglichst großem Flächeninhalt einbeschrieben werden. Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Vierecks.

Abiturprüfung Mathematik 2007 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien ohne TG – Analysis, Lösung Aufgabe 1

1.1

Der Funktionsansatz lautet $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$\Rightarrow f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \Rightarrow f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$

Da im Ansatz 5 Parameter enthalten sind, werden 5 Bedingungen benötigt, um eine eindeutige Funktionsgleichung aufzustellen.

S(0/2) liegt auf dem Schaubild: $f(0) = 2 \Rightarrow e = 2$

$W(1/\frac{31}{12})$ liegt auf dem Schaubild: $f(1) = \frac{31}{12} \Rightarrow a + b + c + d + e = \frac{31}{12}$

$P(-3/\frac{5}{4})$ liegt auf dem Schaubild: $f(-3) = \frac{5}{4} \Rightarrow 81a - 27b + 9c - 3d + e = \frac{5}{4}$

Bei x = 1 existiert eine Wendestelle: $f''(1) = 0 \Rightarrow 12a + 6b + 2c = 0$

Bei x = -3 gilt $m_{Norm} = \frac{1}{5} \Rightarrow m_{tan\,g} = -5 \Rightarrow f'(-3) = -5 \Rightarrow -108a + 27b - 6c + d = -5$

Mit dem GTR kann das Gleichungssystem gelöst werden:

$a = \frac{1}{12}$, b = 0 , $c = -\frac{1}{2}$, d = 1 , e = 2 $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x + 2$

1.2.1

K_1 ist das Schaubild der Funktion, die bereits in 1.1 berechnet wurde.

$f_1(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x + 2 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1 \Rightarrow f''(x) = x^2 - 1 \Rightarrow f'''(x) = 2x$

Bedingung für Wendepunkte: $f''(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

Es gilt $f'''(\pm 1) \neq 0$, damit existieren an diesen beiden Stellen Wendepunkte.

$W_1(1/\frac{31}{12})$ und $W_2(-1/\frac{7}{12})$

Man hätte die Wendepunkte bei dieser Aufgabenstellung auch direkt mit dem GTR ermitteln können.

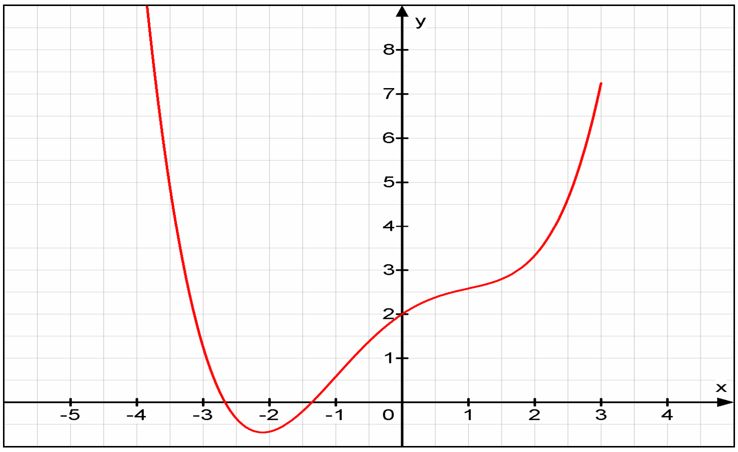
Die Gerade, die durch die beiden Wendepunkte verläuft, besitzt die Steigung

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{31}{12} - \frac{7}{12}}{1 - (-1)} = 1$$

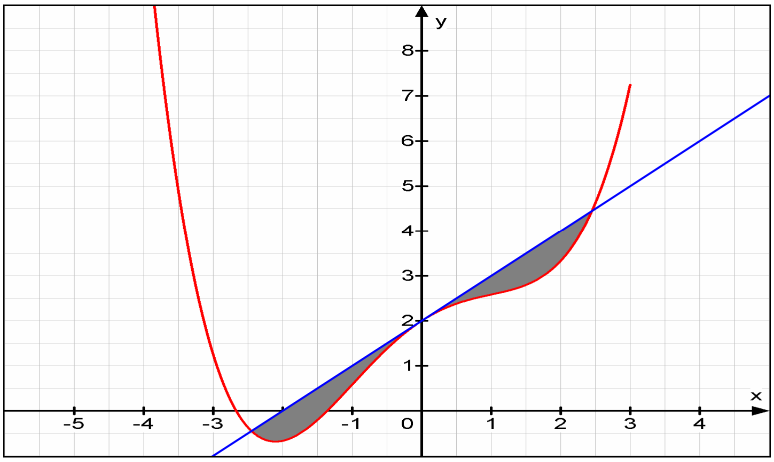
Die Tangente im Schnittpunkt mit der y-Achse besitzt die Steigung $f_1'(0) = 1$.

Da beide Steigungen identisch sind, sind die Geraden parallel.

Schaubild von K_1



1.2.2



Da eine exakte Berechnung verlangt ist, genügt es nicht, die Fläche mit dem GTR zu ermitteln.
Zunächst werden die Schnittpunkte der beiden Schaubilder benötigt:

$$\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x + 2 = x + 2 \Rightarrow x^2 \cdot (\frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{2}) = 0$$

Als Lösung ergibt sich x = 0 oder $x = \pm\sqrt{6}$.

Fläche von einem der Flächenstücke

$$A = \int_0^{\sqrt{6}} ((x+2)-(\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x + 2))dx = \int_0^{\sqrt{6}} (-\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^2)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{6}x^3\right]_0^{\sqrt{6}} = -\frac{36}{60}\cdot\sqrt{6} + \sqrt{6} - 0 = \frac{2}{5}\cdot\sqrt{6}$$

Hinweis: Das andere Flächenstück ist genau so groß.

1.2.3
Zur Bestimmung der Ortskurve der Wendepunkte, müssen zunächst die Wendepunkte von K_t ermittelt werden.

$f_t'(x) = \frac{1}{3}x^3 - t^2x + 1 \Rightarrow f_t''(x) = x^2 - t^2 \Rightarrow f_t'''(x) = 2x$

Bedingung für Wendepunkte: $f_t''(x) = 0 \Rightarrow x^2 - t^2 = 0 \Rightarrow x = \pm t$

Es gilt $f_t'''(\pm t) = 2t \neq 0$

Damit gibt es zwei Wendepunkte: $W_1(-t / -\frac{5}{12}t^4 - t + 2)$ und $W_2(t / -\frac{5}{12}t^4 + t + 2)$

Wegen t > 0 liegt W_1 links von der y-Achse.

Somit ist die Ortskurve von W_1 gesucht:

$x = -t \Rightarrow t = -x$

$y = -\frac{5}{12}t^4 - t + 2 = -\frac{5}{12}(-x)^4 - (-x) + 2 = -\frac{5}{12}x^4 + x + 2$

Dies ist die Gleichung der Ortskurve.

1.3.1
Der Faktor a hat die Bedeutung der Amplitude. Es ist der Streckfaktor parallel zur y-Achse.
Der Ausdruck (x-a) bedeutet für a > 0 eine Verschiebung um a Einheiten nach rechts.

Das Schaubild von $k(x) = \sin(x)$ hat Nullstellen z.B. bei x = 0 und $x = \pi$.

Durch den Faktor a (Amplitude) ändert sich die Lage der Nullstellen nicht. Der Ausdruck x – a verschiebt die Nullstellen allerdings um a Einheiten nach rechts.
Somit lauten zwei Nullstellen der Funktion h_a $x = 0 + a = a$ und $x = \pi + a$.

Das Schaubild von $k(x) = \sin(x)$ hat einen Hochpunkt $H(\frac{\pi}{2} / 1)$ und einen Tiefpunkt $T(\frac{3\pi}{2} / -1)$.

Durch den Faktor a (Amplitude) ändern sich die y-Werte der Extrempunkte; diese Werte mit dem Faktor a multipliziert.
Der Ausdruck x – a verschiebt die Extrempunkte und damit ihre x-Werte um a Einheiten nach rechts.

Somit lauten zwei Extrempunkte der Funktion h_a $H(\frac{\pi}{2} + a / a)$ und $T(\frac{3\pi}{2} + a / -a)$

1.3.2
Mit $h_a(x) = a \cdot \sin(x - a)$ gilt $h_a'(x) = a \cdot \cos(x - a)$ und $H_a(x) = -a \cdot \cos(x - a) + C$, C beliebig

Bei allen drei Funktionen ist die Amplitude a.
Aus den Schaubildern kann man entnehmen:
Schaubild 1 besitzt die Amplitude a = 1,5
Schaubild 2 besitzt die Amplitude a = 0,5
Schaubild 3 besitzt die Amplitude a = 2
Schaubild 4 besitzt die Amplitude a = 1

Da für den Parameter a laut Aufgabenstellung $0 < a < \frac{\pi}{2}$ gilt, kann Schaubild 3 zu keiner der Funktionen gehören und scheidet damit aus.

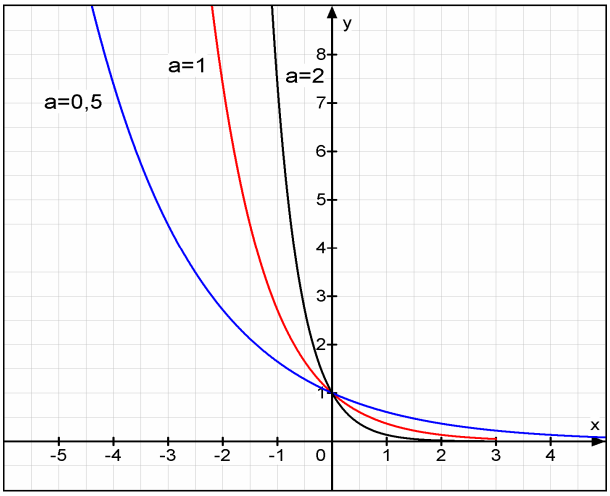
Da alle Schaubilder auch um den a-Wert nach rechts verschoben sind, war das Schaubild 1 bevor es um a = 1,5 nach rechts verschoben wurde, eine Sinusfunktion.
Somit muss Schaubild 1 der Funktion h_a entsprechen mit a = 1,5

Analog war das Schaubild 4, bevor es um a = 1 nach rechts verschoben wurde, eine Kosinusfunktion. Somit muss Schaubild 4 der Funktion h'_a entsprechen mit a = 1.

Somit gehört das Schaubild 2 zu einer nach oben verschobenen Stammfunktion H_a mit a = 0,5.

Abiturprüfung Mathematik 2007 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien ohne TG – Analysis, Lösung Aufgabe 2

2.1.1



Gemeinsame Eigenschaften:

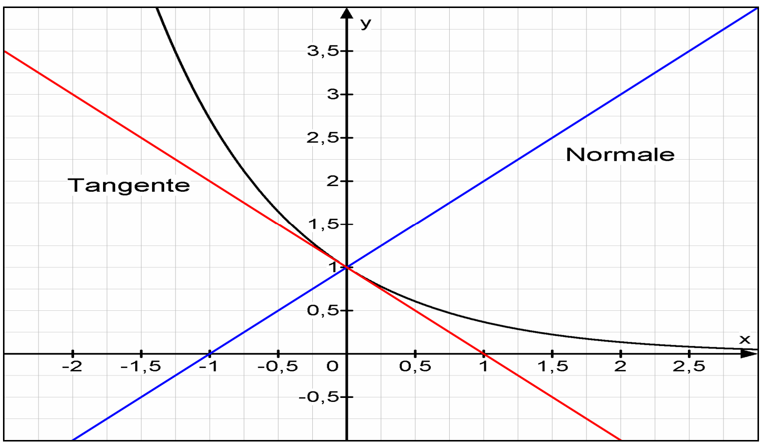
- Alle Schaubilder laufen durch den Punkt P(0/1).
- Für $x \to \infty$ gilt $f(x) \to 0$ (x-Achse ist waagrechte Asymptote)
- Alle Schaubilder verlaufen oberhalb der x-Achse.
- Die Schaubilder sind streng monoton fallend und besitzen weder Extrem- noch Wendepunkte.

Das Krümmungsverhalten wird mit der zweiten Ableitung f_a'' untersucht.

$f_a(x) = e^{-ax} \Rightarrow f_a'(x) = -a \cdot e^{-ax} \Rightarrow f_a''(x) = a^2 \cdot e^{-ax}$

Da für alle x-Werte gilt $f_a''(x) > 0$, ist das Schaubild von f überall linksgekrümmt.

2.1.2



Tangentensteigung $m_{\tan g} = f'(0) = -1$ und damit Tangentengleichung $y = -x + 1$

Normalensteigung: $m_{Norm} = 1$ und damit Normalengleichung $y = x + 1$

Die Schnittstellen der Normale und der Tangente mit der x-Achse sind P(1/0) bzw. Q(-1/0).
Da die Strecken $\overline{PS}$ und $\overline{QS}$ sind gleich lang (Symmetrie !) und damit ist das Dreieck gleichschenklig.

Umfang des Dreiecks:
Es gilt $\overline{PS} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ (Pythagoras) und damit $U_{Dreieck} = 2 \cdot \sqrt{2} + 2$ LE

2.1.3
Die einzeichnete Tangente geht durch die Punkte S(0/1) und R(2/0). Sie besitzt die Steigung $m = -\frac{1}{2}$.
Es gilt $f_a'(0) = -a$ und damit muss a = 0,5 sein.

Fläche für u = 3:
Die Fläche wird in zwei Teile zerlegt, da die untere Randkurve bis zur Stelle x = 2 die Tangente darstellt und ab x =2 die x-Achse ist.

Die Tangentengleichung lautet $y = -\frac{1}{2}x + 1$

$$A = \int_0^2 (e^{-0,5x} - (-\frac{1}{2}x + 1))dx + \int_2^3 e^{-0,5x}dx = \left[-2e^{-0,5x} + \frac{1}{4}x^2 - x\right]_0^2 + \left[-2e^{-0,5x}\right]_2^3$$
$$= -2e^{-1} + 1 - 2 - (-2 + 0) - 2e^{-1,5} + 2e^{-1} = 1 - 2e^{-1,5} \approx 0,554 \text{ FE}$$

Für allgemeines u > 3 gilt:

$$A = \int_0^2 (e^{-0,5x} - (-\frac{1}{2}x + 1))dx + \int_2^u e^{-0,5x}dx = \left[-2e^{-0,5x} + \frac{1}{4}x^2 - x\right]_0^2 + \left[-2e^{-0,5x}\right]_2^u$$
$$= -2e^{-1} + 1 - 2 - (-2 + 0) - 2e^{-0,5u} + 2e^{-1} = 1 - 2e^{-0,5u}$$

Da der Summand $-2e^{-0,5u}$ immer negativ ist, gilt A < 1 für alle u > 3

2.1.4
Das Schaubild von g entsteht aus K_a durch eine Verschiebung um c Einheiten nach rechts.

$g(x) = f_a(x - c) = e^{-a(x-c)} = e^{-ax} \cdot e^{ac}$
Es soll gelten: $g(0) = 20000 \Rightarrow e^{ac} = 20000$ (1)

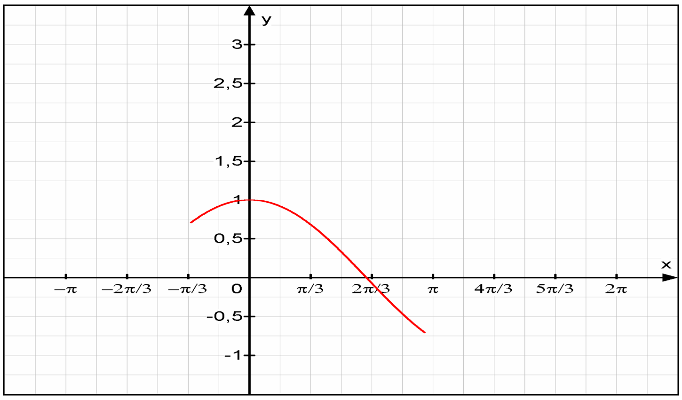
Bei einem jährlichen Verlust von 16% bedeutet dies g(1) = 16800 Euro
$g(1) = 16800 \Rightarrow e^{-a} \cdot e^{ac} = 16800$ (2)

Einsetzen von (1) in (2) ergibt: $e^{-a} \cdot 20000 = 16800 \Rightarrow e^{-a} = 0,84 \Rightarrow a = -\ln(0,84) = 0,174$
Eingesetzt in (1) ergibt: $e^{0,174c} = 20000 \Rightarrow 0,174c = \ln(20000) \Rightarrow c = 56,80$

Die Funktion lautet $g(x) = e^{-0,174(x-56,80)}$.

2.2.1

Schaubild von h:



Nullstelle: $\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)=0$

Die Kosinusfunktion cos(u) besitzt bei $u=(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}$ mit ganzzahligem k Nullstellen, also bei $u\in\{...,-\frac{3}{2}\pi,-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi,\frac{3}{2}\pi,...\}$.

Folglich besitzt h im Intervall $x\in[-1;3]$ nur für x = 2 eine Nullstelle, denn dort nimmt die Klammer den Wert $\frac{1}{2}\pi$ an.

Wertebereich von h:

An der Stelle x = 0 wird der höchste Wert h(0) = 1 angenommen.

Der kleinste y-Wert wird gemäß Schaubild bei x = 3 angenommen mit $h(3)=-0{,}707=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Damit lautet die Wertemenge W = $[-\frac{1}{2}\sqrt{2};1]$

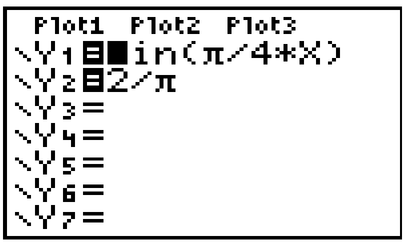
2.2.2

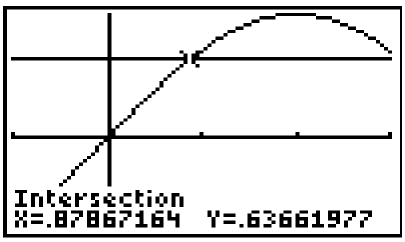
Die Achsenschnittpunkte lauten S(0/1) und N(2/0).

Die Steigung der Gerade durch S und N ist $m=\frac{1-0}{0-2}=-\frac{1}{2}$.

Gesucht ist nun ein Punkt auf dem Schaubild von h mit der Steigung $-\frac{1}{2}$.

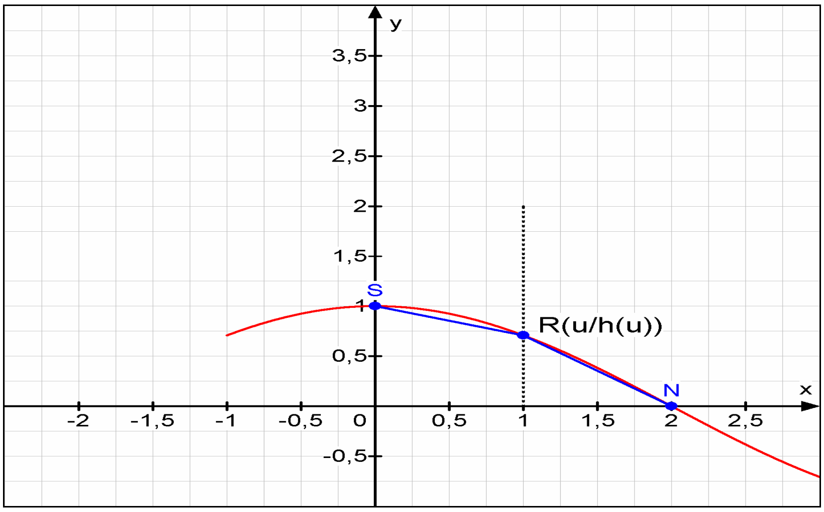
$$h'(x)=-\frac{\pi}{4}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)=-\frac{1}{2}\Rightarrow\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)=\frac{2}{\pi}\quad\text{mit } x\in[-1;3]$$





Als Lösung mit dem GTR ergibt sich x = 0,879. Mit $h(0{,}879)=0{,}77$ folgt B(0,879/0,77) als Berührpunkt.

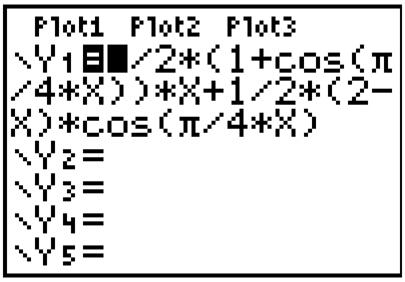
2.2.3

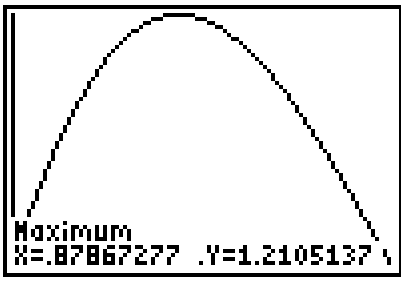


Da das gesuchte Viereck keine bestimmte Gestalt haben muss, ergibt sich der größte Flächeninhalt, wenn die Eckpunkte O, S und N möglichst weit außen gewählt werden.
Der Punkt R(u/f(u)) mit $0 \le u \le 2$ muss nun so gewählt werden, dass das Viereck ONRS eine möglichst große Fläche liefert.

Es gilt: $A_{Viereck} = A_{Trapez} + A_{Dreieck}$

$$A_{Viereck} = \frac{1}{2}(1+h(u))\cdot u + \frac{1}{2}\cdot(2-u)\cdot h(u) = \frac{1}{2}\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{4}u\right)\right)\cdot u + \frac{1}{2}(2-u)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}u\right)$$





Mit dem GTR ergibt sich für u = 0,879 eine maximale Fläche von A = 1,21 FE.