Abiturprüfung Mathematik 2010 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien – Anwendungsorientierte Aufgabe
Teil 3, Aufgabe 2

2
Zwei Ingenieure planen den Bau eines Wasserkanals. In Ihrer Modellrechnung setzen sie für den Kanalquerschnitt ein x-y-Koordinatensystem so an, dass die x-Achse genau auf der Höhe des normalen Wasserstandes (Normalpegel) verläuft. Eine Längeneinheit entspricht einem Meter. Unterhalb des Normalpegels wird die Randkurve des Kanalquerschnitts durch die Funktion f mit $f(x) = 0{,}0125x^4 - 3{,}2$ beschrieben.

2.1
Oberhalb des Normalpegels wird die Begrenzung des Kanals tangential fortgeführt. Diese geradlinigen Fortführungen sind für einen 1,80 Meter über Normalpegel liegenden Wasserstand ausgelegt. Berechnen Sie die Breite des Kanals in Höhe dieses Pegelstandes. Stellen Sie den gesamten Kanalquerschnitt in einem Koordinatensystem dar. (7 Punkte)

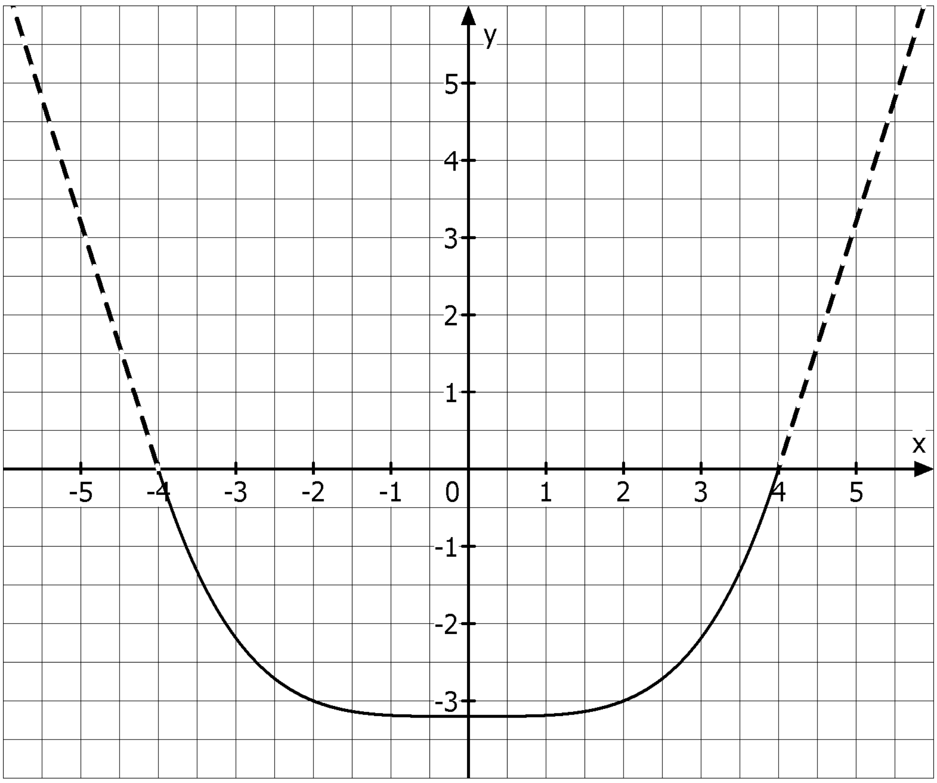
2.2
Die Ingenieure gehen von einer Strömungsgeschwindigkeit von 1,3 Meter pro Sekunde aus.

2.2.1
Wie viel Kubikmeter Wasser fließen pro Sekunde bei Normalpegel durch den Kanalquerschnitt ? (4 Punkte)

2.2.2
Untersuchen Sie, wie weit der Wasserstand unter den Normalpegel gesunken ist, wenn bei derselben Strömungsgeschwindigkeit nur noch 80% der Wassermenge pro Sekunde durch den Kanalquerschnitt fließen. (4 Punkte)

Abiturprüfung Mathematik 2010 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien– Anwendungsorientierte Aufgabe
Gruppe III, Lösung Aufgabe 2

2.1



Die gestrichelten Geraden entsprechen den Tangenten an das Schaubild von f in den Punkten P(-4/0) und Q(4/0).

Gleichung der Tangente in P(-4/0):
Mit $f'(x) = 0{,}05x^3$ folgt $f'(-4) = -3{,}2$.
Punkt-Steigungsform: $y - 0 = -3{,}2 \cdot (x + 4) \Rightarrow y = -3{,}2x - 12{,}8$

Gleichung der Tangente in Q(4/0) ergibt $y = 3{,}2x - 12{,}8$

Breite des Kanals auf der Höhe 1,8m:
Einsetzen von y = 1,8 in die Tangenten liefert: $1{,}8 = 3{,}2x - 12{,}8 \Rightarrow x = 4{,}5625$
Der Kanal ist auf der Pegelhöhe 1,8 m $2 \cdot 4{,}5625 = 9{,}125$ m breit.

2.2.1
Fläche des Querschnitts bei Normalpegel:

$$A = \int_{-4}^{4} -f(x)dx = \left[-0{,}0025x^5 + 3{,}2x\right]_{-4}^{4} = 20{,}48 \text{ m}^2 \text{ (GTR)}$$

Pro Sekunde fließen $V = 20{,}48 \cdot 1{,}3 = 26{,}624$ m³ durch den Kanalquerschnitt.

2.2.2

Gesucht ist eine waagrechte Gerade y = c, so dass die Fläche zwischen der Gerade und f(x) nur noch 80% der ursprünglichen Fläche, also $0{,}8 \cdot 20{,}48 = 16{,}384$ m² beträgt.

Berechnung der Schnittstelle von y = c mit dem Schaubild von f(x):

$$0{,}0125x^4 - 3{,}2 = c \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{\frac{c+3{,}2}{0{,}0125}} = \sqrt[4]{80c+256}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 16{,}384 = \int_0^{\sqrt[4]{80c+256}} (c - f(x))dx \Leftrightarrow 8{,}192 = \left[cx - 0{,}0025x^5 + 3{,}2x\right]_0^{\sqrt[4]{80c+256}}$$

$$\Leftrightarrow 8{,}192 = c \cdot \sqrt[4]{80c+256} - 0{,}0025 \cdot \sqrt[4]{80c+256}^{\,5} + 3{,}2 \cdot \sqrt[4]{80c+256}$$

Mit dem GTR ergibt sich als Lösung c = -0,523.

Somit muss der Wasserpegel 52,3cm unter dem Normalpegel liegen, damit nur noch 80% der Wassermenge durch den Querschnitt fließen.