Abiturprüfung Mathematik 2013 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien – Anwendungsorientierte Aufgabe
Teil 3, Aufgabe 3

3.1
Die Höhe h(t) eines Baumes zum Zeitpunkt t wird näherungsweise beschrieben durch

$$h(t)=\frac{35}{160e^{-0{,}07632\cdot t}+1}\ ;\ t\geq 0\,.$$

Dabei ist t die Zeit in Jahren seit Pflanzung des Baumes im Frühling 1930, h(t) ist in m angegeben.

3.1.1 (5 Punkte)
Berechnen Sie das Jahr, in dem der Baum am schnellsten gewachsen ist.
Wann war der Baum zu 75% ausgewachsen ?

3.1.2 (2 Punkte)
Bestimmen Sie das durchschnittliche Jahreswachstum des Baumes der letzten zehn Jahre.

3.2
Im Jahr 2013 wird der Durchmesser d(x) des Baumstamms in der Höhe x über dem Boden modelliert durch die Funktion d mit

$$d(x)=-3{,}003\cdot 10^{-9}x^3+9{,}000\cdot 10^{-6}x^2-1{,}682\cdot 10^{-2}x+39{,}73\,;\quad x\geq 0$$

d(x) und x sind in cm angegeben.
In diesem Jahr wird der Baum gefällt. Der Schnitt wird in einer Höhe von 30cm über dem Boden angesetzt.

3.2.1 (3 Punkte)
Berechnen Sie den Durchmesser der Schnittfläche.
Bestimmen Sie die Länge des abgeschnittenen Stamms, die sich aus diesem Modell ergibt.

3.2.2 (5 Punkte)
Ermitteln sie das Volumen des Stamms in Kubikmeter.
Kurz vor der Fällung wurde der Durchmesser des Baumstamms in der Schnitthöhe auf 40cm und die Länge des Stamms auf 30m geschätzt.
Das Volumen des Stamms wurde damit schon vorab geschätzt, wobei die Form des Stamms vereinfachend als Kreiskegel angenommen wurde.
Berechnen Sie die prozentuale Abweichung des geschätzten Volumens vom oben ermittelten Volumen.

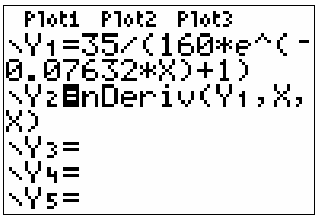
Abiturprüfung Mathematik 2013 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien – Anwendungsorientierte Aufgabe
Teil 3, Lösung Aufgabe 3

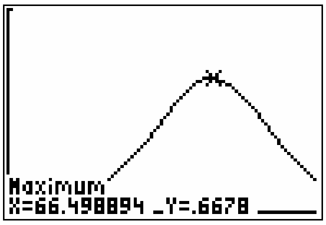
3.1.1

Das Jahr, in dem der Baum am schnellsten gewachsen ist, ist die Wendestelle des Schaubildes von h(t).

Hinreichende Bedingung: $h''(t) = 0$ und $h'''(t) \neq 0$

Berechnung der Wendestelle mit dem GTR (als Extremstelle der Ableitungsfunktion):





Die Wendestelle befindet sich bei t = 66,5.
Da der Baum im Frühling 1930 gepflanzt worden ist, wächst er am schnellsten im Herbst des Jahres 1996.

Wann war der Baum zu 75% ausgewachsen ?

Zunächst muss ermittelt werden, welche Endhöhe der Baum erreichen wird.

1.Möglichkeit (rechnerisch):
Für $t \to \infty$ gilt $160e^{-0,07632 \cdot t} \to 0$.
Damit strebt der Nenner von h(t) gegen 1 und der gesamte Bruch gegen 35.
Die Endhöhe des Baumes beträgt 35 m.

2. Möglichkeit (GTR):
Gemäß der Wertetabelle strebt h(t) für große t-Werte gegen 35.

X	Y1
0	.21739
100	32.481
200	34.999
300	35
400	35
500	35
600	35

X=300

Der Baum ist zu 75% ausgewachsen, wenn er eine Höhe von $0,75 \cdot 35\text{m} = 26,25\text{m}$ erreicht hat.

Ansatz: $h(t) = 26,25$
Mit dem GTR ergibt sich als Lösung $t \approx 81$ Jahre.
Der Baum war im Frühling 2011 zu 75% ausgewachsen.

3.1.2
Durchschnittliches Jahreswachstum der letzten 10 Jahre:

Das Jahreswachstum wird durch die Ableitungsfunktion $h'(t)$ dargestellt.

Das durchschnittliche Jahreswachstum der letzten zehn Jahre bedeutet , den Mittelwert der Jahre 2003 - 2013 (dem Jahr dieser Abiturprüfungsaufgabe) zu betrachten:

Jahr 2003: t = 73
Jahr 2013: t = 83

$$\frac{1}{83-73}\cdot\int_{73}^{83} h'(t)dt = \frac{1}{10}\cdot(h(83)-h(73)) = \frac{1}{10}\cdot(27{,}26-21{,}75) = 0{,}551 \text{ Meter pro Jahr}$$

3.2.1

Der Durchmesser der Schnittfläche beträgt d(30) = 39,23 cm (GTR)

Die Länge des abgeschnittenen Stamms entspricht der Höhe des Baumstamms von der Höhe 30 cm über dem Boden bis zu Spitze.

Für die Spitze wird unterstellt, dass dort ein Durchmesser von d = 0 cm existiert.
Damit kann die zugehörige Höhe bestimmt werden:

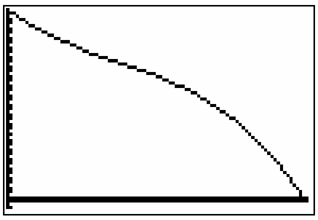
$$d(x) = 0 \Rightarrow x = 2723{,}87 \text{ cm}$$

Der Baum ist insgesamt 27,24 m hoch.

Wenn der Schnitt 30cm über dem Boden angesetzt wird, beträgt die Länge des abgeschnittenen Stamms 27,24 m - 0,30 m = 26,94 m

3.2.2

Die Funktion d(x) hat folgende Gestalt:



Um das Volumen des Stammes zu berechnen, muss die Durchmesserfunktion d(x) in eine Radiusfunktion r(x) umgewandelt werden: $r(x) = 0{,}5\cdot d(x)$.
r(x) beschreibt den Radius des Baumstammes in der Höhe x über dem Boden
(x und r(x) in cm).

Der Stamm kann nun Rotationskörper des Schaubildes von r(x) um die x-Achse aufgefasst werden.

Das Integrationsintervall läuft von x = 30 bis x = 2723,87 (gemäß Teilaufgabe 3.2.1)

Volumen des Rotationskörpers = $\pi \cdot \int_{30}^{2723,87} (0,5 \cdot d(x))^2 dx = 1,3979 \cdot 10^6$ cm³ = 1,398 m³

Bei der vereinfachenden Volumenschätzung wird der Stamm als Kreiskegel betrachtet mit dem Radius r = 20 cm und der Höhe 30 Meter.
(die Aufgabenstellung wird dabei so interpretiert, dass die geschätzte Länge des Stammes von 30 Meter der Länge des abgeschnittenen Stammes entspricht, ansonsten müssten von den 30 Metern noch die Schnitthöhe von 30 cm abgezogen werden)

$V_{Kegel} = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 0,2^2 \cdot 30 = 1,257$ m³ als geschätztes Volumen.

Prozentuale Abweichung des geschätzten Volumens: $\frac{1,257}{1,398} = 0,8991$

Dies entspricht einer Abweichung von ca. 10 %, um den das geschätzte Volumen zu niedrig eingeschätzt wurde.