Abiturprüfung Mathematik 2006 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien ohne TG – Anwendungsorientierte Aufgabe
Gruppe III, Aufgabe 1

1
Ein Schaumweinhersteller hat seine täglichen Gesamtkosten in Abhängigkeit von der Anzahl der pro Tag abgefüllten Flaschen erfasst:

Anzahl	0	100	200	400	700	900	1200
Gesamtkosten in €	15.000	18.000	20.000	22.620	28.500	37.800	66.010

1.1
Die Gesamtkosten sollen durch eine Polynomfunktion 3.Grades beschrieben werden. Bestimme eine solche Polynomfunktion und erläutere deinen Lösungsansatz.
(3 Punkte)

1.2
Der Betrieb kann täglich maximal 1200 Flaschen produzieren.
Die Gesamtkosten werden durch die Funktion K beschrieben mit

$$K(x) = \frac{3}{50000}x^3 - \frac{41}{625}x^2 + \frac{1789}{50}x + 15000 \; ; \; x \in [0;1200]$$

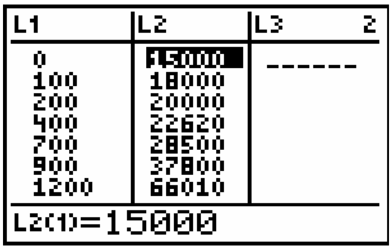
1.2.1
Zeichne das Schaubild von K. (3 Punkte)

1.2.2
Die Firma macht Gewinn, falls die Einnahmen aus dem Verkauf größer als die Gesamtkosten sind. Man geht davon aus, dass alle produzierten Flaschen auch verkauft werden.
Der Schaumwein wird für 50 Euro pro Flasche verkauft.
Bei wie viel Flaschen kann mit einem Gewinn gerechnet werden ? (3 Punkte)

1.2.3
Vom Ursprung wird die Tangente an das Schaubild von K gelegt.
Bestimme die Steigung der Tangente und zeichne diese Tangente in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1.2.1 ein.
Welche Aussage kann man mit Hilfe dieser Tangente über den Verkaufspreis machen ? (6 Punkte)

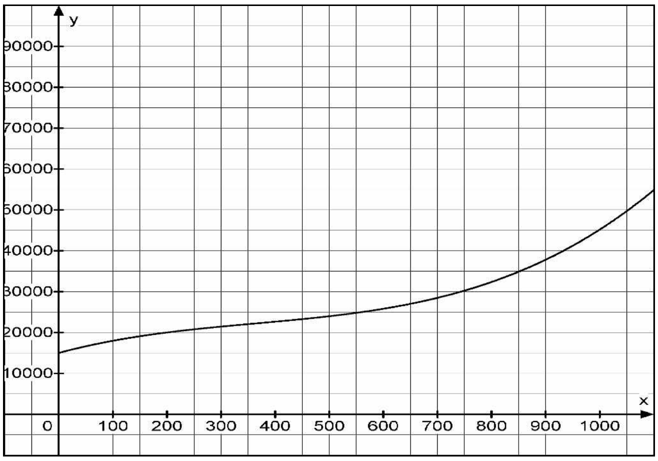
Lösung Aufgabe 1:

1.1
Für ein Polynom 3. Grades genügen 4 Punkte. Da 7 Punkte vorgegeben sind, wird die Poynomfunktion mit Hilfe der Regression (GTR) bestimmt.

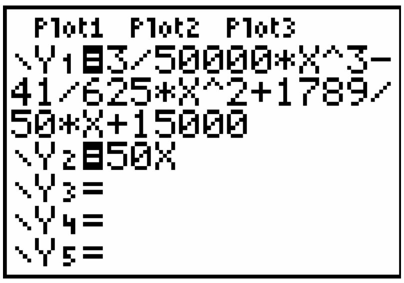


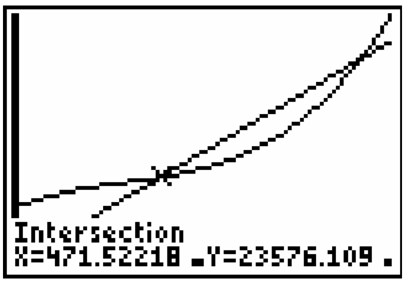
$f(x) = 5{,}668 \cdot 10^{-5} x^3 - 0{,}0614 \cdot x^2 + 34{,}4899x + 15053{,}916$

1.2.1



1.2.2
Gewinnfunktion: G(x) = E(x) – K(x) = $50x - K(x)$





Die Firma macht dann Gewinn, wenn die Erlösfunktion (also die Gerade) oberhalb der Kostenfunktion K(x) verläuft.
Laut GTR ist dies zwischen x = 471,5 und x = 1102,6.
Die Firma muss also mehr als 471 Flaschen (Nutzenschwelle) und weniger als 1103 Flaschen (Nutzengrenze) verkaufen.

1.2.3
Der Berührpunkt der Tangente auf dem Schaubild der Funktion sei B(u/K(u)).
Die Steigung der Tangente ist $m = K'(u)$.

Tangentengleichung in B: $y - K(u) = K'(u) \cdot (x - u)$

$$\Rightarrow y - \left(\frac{3}{50000}u^3 - \frac{41}{625}u^2 + \frac{1789}{50}u + 15000\right) = \left(\frac{9}{50000}u^2 - \frac{82}{625}u + \frac{1789}{50}\right) \cdot (x - u)$$

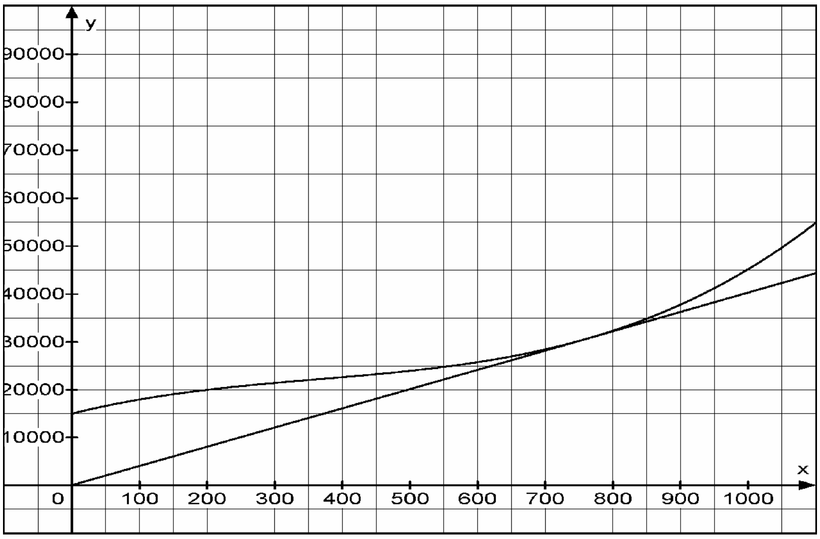
Auf der Tangente soll der Ursprung O(0/0) liegen. Die Koordinaten von O werden in die Tangentengleichung nun eingesetzt:

$$0 - \left(\frac{3}{50000}u^3 - \frac{41}{625}u^2 + \frac{1789}{50}u + 15000\right) = \left(\frac{9}{50000}u^2 - \frac{82}{625}u + \frac{1789}{50}\right) \cdot (-u)$$

$$\Rightarrow \frac{6}{50000}u^3 - \frac{41}{625}u^2 - 15000 = 0$$

Lösung der Gleichung laut GTR: u = 761,96 einzige Lösung im Intervall [0;1200].

Steigung der Tangente: $K'(761{,}96) = 40{,}32$



Bei einem Verkaufspreis von 40,32 € entsteht lediglich bei einer Produktion von 762 Flaschen kein Verlust, für alle anderen Produktionszahlen würden sich Verluste ergeben.
Ist der Verkaufspreis unter 40,32 € entsteht immer ein Verlust.