Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2008 Teil 2, Vektorgeometrie, Aufgabe 2
Baden-Württemberg

2.1
Im Anschauungsraum sind die Ebene F: $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ sowie die Punkte A(5/3/5), P(2/2/3) und Q(4/0/3) gegeben.

2.1.1
Die Punkte A, P und Q sind die Eckpunkte eines Dreiecks.
Zeigen Sie, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist, und berechnen Sie seinen Flächeninhalt. (5 Punkte)

2.1.2
Prüfen Sie, ob die Gerade durch die Punkte P und Q in der Ebene F liegt.
(2 Punkte)

2.1.3
Für jedes $k \in \mathbb{R}$ legen der Punkt $R_k(3/3/k+3)$ und die Punkte P und Q eine Ebene E_k fest. Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Ebene E_k in Koordinatenform.
Beschreiben Sie die Lage von E_0 im Koordinatensystem.
Zeigen Sie, dass es ein k gibt, so dass E_k und F übereinstimmen. (8 Punkte)

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2008 Teil 2, Vektorgeometrie, Lösung zu Aufgabe 2
Baden-Württemberg

2.1.1

Zum Nachweis der Gleichschenkligkeit werden die drei Dreiecksseiten berechnet.

$$\overline{AP} = \left|\overrightarrow{AP}\right| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14} \qquad \overline{AQ} = \left|\overrightarrow{AQ}\right| = \left|\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$$

$$\overline{PQ} = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+4+0} = \sqrt{8}$$

Da $\overline{AP} = \overline{AQ}$ ist, ist das Dreieck gleichschenklig.

Für die Berechnung der Fläche gilt die Formel $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$

Die Grundseite g entspricht der Basis $\overline{PQ}$ des gleichschenkligen Dreiecks.
Die Höhe h ist die Länge der Strecke von A zum Mittelpunkt M der Basis $\overline{PQ}$.

Berechnung von M: $M(\frac{x_P + x_Q}{2} / \frac{y_P + y_Q}{2} / \frac{z_P + z_Q}{2})$, also M(3/1/3).

Höhe h = $\overline{AM} = \left|\overrightarrow{AM}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12}$

Fläche des Dreiecks: $A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{12} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{96} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{16 \cdot 6} = 2 \cdot \sqrt{6}$ Flächeneinheiten

2.1.2

Damit die Gerade durch P und Q in der Ebene F liegt, müssen die beiden Punkte P und Q in der Ebene F liegen. Dies wird mithilfe einer Punktprobe geprüft:

Einsetzen von P in die Ebenengleichung: $2+2+3=7$ wahre Aussage
Einsetzen von Q in die Ebenengleichung: $4+0+3=7$ wahre Aussage

Damit liegen beide Punkte und somit auch die Gerade durch P und Q in der Ebene.

2.1.3

Gleichung der Ebene E_k in Parameterform: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$

Umformung in die Koordinatenform:

$x_1 = 2 + 2r + s \Rightarrow s = x_1 - 2 - 2r \quad (1)$
$x_2 = 2 - 2r + s \quad (2)$
$x_3 = 3 + s \cdot k \quad (3)$

(1) in (2) und (3) einsetzen:

$x_2 = 2 - 2r + x_1 - 2 - 2r \Rightarrow 4r = x_1 - x_2 \Rightarrow r = \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2 \quad (2^*)$
$x_3 = 3 + (x_1 - 2 - 2r) \cdot k \quad (3^*)$

(2*) in (3*) eingesetzt ergibt: $x_3 = 3 + k \cdot x_1 - 2k - 2 \cdot k \cdot (\frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2)$
$\Rightarrow x_3 = 3 + \frac{1}{2}k \cdot x_1 + \frac{1}{2}k \cdot x_2 - 2k$
$\Rightarrow k \cdot x_1 + k \cdot x_2 - 2x_3 = 4k - 6$ und dies ist die gesuchte Koordinatengleichung

Für k = 0 gilt: $E_0: -2x_3 = -6 \Rightarrow x_3 = 3$
Diese Ebene ist eine Parallele zur $x_1 - x_2$-Ebene und hat von dieser den Abstand 3.

Vergleich der Ebene F mit der Ebene E_k:
F: $x_1 + x_2 + x_3 = 7$
$E_k: k \cdot x_1 + k \cdot x_2 - 2x_3 = 4k - 6$

Der direkte Vergleich zeigt, dass für k = -2 die Ebenengleichung von E_{-2} ein Vielfaches der Ebenengleichung von F ist. Somit stimmen die Ebenen für k = -2 überein.