Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG, BTG)
Hauptprüfung 2012 Teil 4, Wirtschaftliche Anwendungen, Aufgabe 1
Baden-Württemberg

1
Die drei Abteilungen A, B und C eines Unternehmens sind nach dem Leontief-Modell miteinander verflochten.
In der vergangenen Produktionsperiode I produzierte A Waren im Wert von 180 Geldeinheiten (GE). Davon lieferte sie Waren im Wert von 60 GE an den Markt und Waren im Wert von 15 GE an C. Waren im Wert von 45 GE deckten den Eigenbedarf und die restlichen Waren wurden an B geliefert.

B produzierte Waren im Wert von 120 GE, lieferte Waren im Wert von 60 GE an den Markt, Waren im Wert von 30GE an A und die restlichen Waren an C.

C lieferte Waren im Wert von 90 GE an den Markt und Waren im Wert von jeweils 60 GE an A und B. Waren im Wert von 30 GE deckten den Eigenbedarf von C.

1.1 (5 Punkte)
Bestimmen Sie die Inputmatrix.

1.2 (5 Punkte)
Die Marktabgabe von A hat in der laufenden Produktionsperiode II einen Wert von 87 GE und die von C einen Wert von 78 GE. Der Wert der Produktion von B hat sich von der vergangenen Produktionsperiode I zu der laufenden Produktionsperiode II nicht verändert.
Ermitteln Sie den Wert der Produktion von A und C und den Wert der Marktabgabe von B für die laufende Produktionsperiode II.

1.3 (5 Punkte)
Für die kommende Produktionsperiode III planen B und C den Wert ihrer Produktion gegenüber der vergangenen Produktionsperiode I zu verdoppeln.
Welchen Wert muss die Produktion von A mindestens und welchen Wert darf sie höchstens haben, damit diese Verdoppelung möglich ist ?

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG, BTG)
Hauptprüfung 2012 Teil 4, Wirtschaftliche Anwendungen, Lösungen Aufgabe 1
Baden-Württemberg

1.1

Anhand der Angaben in der Aufgabe wird eine Input-Output-Tabelle aufgestellt

	A	B	C	Markt	Produktion
A	45	**60**	15	60	180
B	30	0	**30**	60	120
C	60	60	30	90	**240**

Die fett gedruckten Zahlen sind anhand der gegebenen Größen berechnet worden.

Die Inputmatrix lautet $A = \begin{pmatrix} \frac{45}{180} & \frac{60}{120} & \frac{15}{240} \\ \frac{30}{180} & 0 & \frac{30}{240} \\ \frac{60}{180} & \frac{60}{120} & \frac{30}{240} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}5 & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0{,}125 \\ \frac{1}{3} & 0{,}5 & 0{,}125 \end{pmatrix}$

1.2

Der neue Produktionsvektor für die Produktionsperiode II lautet $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 120 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Der neue Marktabgabevektor für die Produktionsperiode II lautet $\vec{y} = \begin{pmatrix} 87 \\ y_2 \\ 78 \end{pmatrix}$

Aufstellen der Leontief-Gleichung: $\vec{y} = (E - A) \cdot \vec{x}$

$$\begin{pmatrix} 87 \\ y_2 \\ 78 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}75 & -0{,}5 & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{6} & 1 & -0{,}125 \\ -\frac{1}{3} & -0{,}5 & 0{,}875 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ 120 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Multipliziert man das ganze aus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llll} 0{,}75x_1 & -\frac{1}{16}x_3 & & = 147 \\ -\frac{1}{6}x_1 & -0{,}125x_3 & -y_2 & = -120 \\ -\frac{1}{3}x_1 & +0{,}875x_3 & & = 138 \end{array}$$

Als Lösung mit dem GTR ergibt sich $x_1 = 216$ und $x_3 = 240$ und $y_2 = 54$

A produziert Waren im Wert von 216 GE, C produziert Waren im Wert von 240 GE und B gibt Waren im Wert von 54 GE an den Markt ab.

1.3

Der neue Produktionsvektor lautet: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 240 \\ 480 \end{pmatrix}$

Der Marktabgabevektor ist unbekannt.

Aufstellen der Leontief-Gleichung: $\vec{y} = (E - A) \cdot \vec{x}$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}75 & -0{,}5 & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{6} & 1 & -0{,}125 \\ -\frac{1}{3} & -0{,}5 & 0{,}875 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ 240 \\ 480 \end{pmatrix}$$

Multipliziert man das ganze aus, ergibt sich ein Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 4 Variablen:

$$\begin{aligned} y_1 \quad\quad\quad & -0{,}75x_1 = -150 \\ y_2 \quad\quad & +\frac{1}{6}x_1 = 180 \\ y_3 \quad & +\frac{1}{3}x_1 = 300 \end{aligned}$$

Mit dem GTR ergibt sich folgende Matrix: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -0{,}75 & -150 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}1\overline{6} & 180 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}\overline{3} & 300 \end{array}\right)$

Das Gleichungssystem besitzt unendlich viele Lösungen.
Setze $x_1 = t$.

Daraus folgt $y_3 = 300 - \frac{1}{3}t$ und $y_2 = 180 - \frac{1}{6}t$ und $y_1 = -150 + 0{,}75t$

Für den Parameter t können nur solche Werte eingesetzt werden, dass die folgenden Variablen nicht negativ werden:

$y_3 = 300 - \frac{1}{3}t \geq 0 \Rightarrow t \leq 900$ $\quad\quad$ $y_2 = 180 - \frac{1}{6}t \geq 0 \Rightarrow t \leq 1080$

$y_1 = -150 + 0{,}75t \geq 0 \Rightarrow t \geq 200$

Da alle drei Bedingungen erfüllt sein müssen, folgt $200 \leq t \leq 900$.

Da $x_1 = t$ ist, muss der Wert der Produktion von A mindestens 200 GE und darf höchstens 900 GE betragen.