Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG, BTG)
Hauptprüfung 2013 Teil 4, Lineare Optimierung, Aufgabe 2
Baden-Württemberg

2
In einer Schmuckfabrik in Pforzheim werden Goldketten aus verschiedenen Legierungen hergestellt.
Die Herstellung der Kettenstränge findet auf Maschine M_1 statt, die Fertigstellung der Ketten findet auf Maschine M_2 statt. Es werden Panzerketten und Kordelketten hergestellt. Eine Panzerkette enthält 10g Feingold und eine Kordelkette 15g Feingold.
M_1 benötigt für eine Panzerkette 60 Minuten, M_2 benötigt 40 Minuten. Für eine Kordelkette werden 40 Minuten auf M_1 und 40 Minuten auf M_2 benötigt.
M_1 kann täglich maximal 8 Stunden laufen, M_2 maximal 6 Stunden.
Pro Tag stehen maximal 120g Feingold zur Verfügung.
Eine Panzerkette bringt einen Gewinn von 100 Euro, eine Kordelkette einen Gewinn von 120 Euro.

2.1 (6 Punkte)
Bestimmen Sie grafisch die Anzahl der Panzer- und Kordelketten, die pro Tag hergestellt werden müssen, um den größtmöglichen Gewinn zu erzielen.

2.2 (3 Punkte)
Wie hoch muss der Gewinn pro Panzerkette mindestens sein, damit es sich lohnt, diese anzubieten ?

2.3
Obwohl nicht mehr Feingold zur Verfügung steht und die Maschinenlaufzeiten nicht erhöht werden können, überlegt die Geschäftsleitung, das Angebot um Singapurketten zu erweitern.
Eine Singapurkette benötigt 45 Minuten auf M_1 und 45 Minuten auf M_2. Die Singapurketten enthalten jeweils 12g Feingold. Der Gewinn pro Singapurkette beträgt 110 Euro.
Untersuchen Sie mit Hilfe des Simplexalgorithmus, ob es sich lohnt, Singapurketten herzustellen.

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG, BTG)
Hauptprüfung 2013 Teil 4, Lineare Optimierung, Lösung zu Aufgabe 2
Baden-Württemberg

2.1

Folgende Variablen werden festgelegt:

x = Anzahl der Panzerketten, die pro Tag hergestellt werden
y = Anzahl der Kordelketten, die pro Tag hergestellt werden

Folgende Bedingungen ergeben sich aus der Aufgabenstellung:

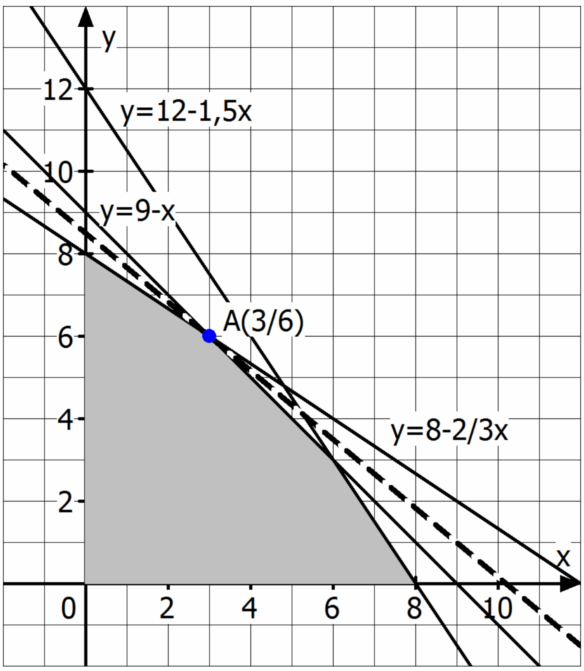
$x \geq 0$ und $y \geq 0$ (Nichtnegativitätsbedingung)

$10x + 15y \leq 120 \Leftrightarrow y \leq 8 - \frac{2}{3}x$ (maximal 120g Feingold pro Tag)

$60x + 40y \leq 480 \Leftrightarrow y \leq 12 - \frac{3}{2}x$ (maximal 8 Stunden = 480 Minuten bei M_1)

$40x + 40y \leq 360 \Leftrightarrow y \leq 9 - x$ (maximal 6 Stunden = 360 Minuten bei M_2)

Die Zielfunktion (Gewinn) lautet $G = 100x + 120y \Leftrightarrow y = -\frac{5}{6}x + \frac{G}{120}$



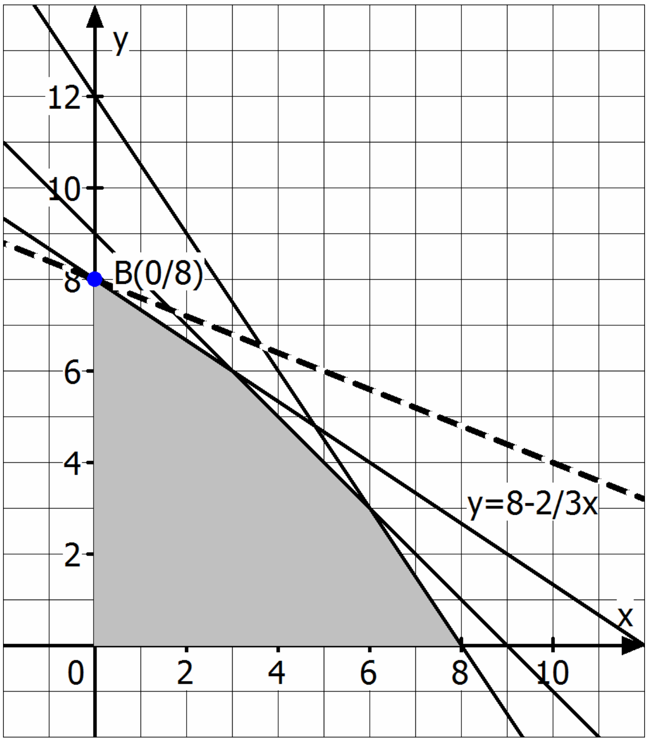
Die gestrichelte Gerade, die die Zielfunktion darstellt, kann so weit nach oben verschoben werden, dass sie von der grauen Fläche noch den Punkt A(3/6) schneidet.

Das bedeutet, dass der Gewinn maximal wird für x = 3 und y = 6.
Es müssen 3 Panzerketten und 6 Kordelketten hergestellt werden.
Dann wird der Gewinn maximal mit $G = 100 \cdot 3 + 120 \cdot 6 = 1020$ Euro.

2.2

Die Herstellung von Panzerketten würde sich dann nicht lohnen, wenn die gestrichelte Gerade die graue Fläche nur noch im Punkt B(0/8) schneidet.

Dies ist dann erfüllt, wenn die gestrichelte Gerade eine Steigung besitzt, die größer als $-\frac{2}{3}$ ist (also z.B. $m=-\frac{1}{2}$)



Der Gewinn für die Panzerkette sei a.

Die Gewinnfunktion lautet $G=ax+120y \Leftrightarrow y=-\frac{a}{120}x+\frac{G}{120}$

Bedingung: $-\frac{a}{120}>-\frac{2}{3} \Leftrightarrow a<80$ (Ungleichheitszeichen dreht sich um !)

Wenn der Gewinn kleiner als 80 Euro ist, lohnt sich die Produktion der Panzerkette nicht.
Beträgt der Gewinn genau 80 Euro, gibt es mehrere Lösungen, zum Beispiel
x = 0 und y = 8
x = 3 und y = 6
(es können also Panzerketten hergestellt werden, müssen aber nicht)

Beträgt der Gewinn für eine Panzerkette mehr als 80 Euro, müssen zur Maximierung des Gesamtgewinns Panzerketten hergestellt werden.

2.3

Folgende Variablen werden festgelegt:

x = Anzahl der Panzerketten, die pro Tag hergestellt werden
y = Anzahl der Kordelketten, die pro Tag hergestellt werden
z = Anzahl der Singapurketten, die pro Tag hergestellt werden

Folgende Bedingungen ergeben sich aus der Aufgabenstellung:

$x \geq 0$ und $y \geq 0$ und $z \geq 0$ (Nichtnegativitätsbedingung)

$10x + 15y + 12z \leq 120$ (maximal 120g Feingold pro Tag)
$60x + 40y + 45z \leq 480$ (maximal 8 Stunden = 480 Minuten bei M_1)
$40x + 40y + 45z \leq 360$ (maximal 6 Stunden = 360 Minuten bei M_2)

Die Zielfunktion (Gewinn) lautet $G = 100x + 120y + 110z$

Einführung von Schlupfvariablen u, v, w führen auf folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llllllll} 10x & +15y & +12z & +u & & & = & 120 \\ 60x & +40y & +45z & & +v & & = & 480 \\ 40x & +40y & +45z & & & +w & = & 360 \\ 100x & +120y & +110z & & & & = & G \end{array}$$

x	y	Z	u	v	w	Erg.	Quotient
10	**15**	12	1	0	0	120	120 / 15 = 8
60	40	45	0	1	0	480	480/40 = 12
40	40	45	0	0	1	360	360 / 40 = 9
100	120	110	0	0	0	G	

Die Pivotspalte ist die Spalte mit der größten positiven Zahlen in der letzten Zeile (oben markiert)
Der kleinste positive Wert der Spalte „Quotient" legt die Pivotzeile fest.

Das Simplextableau wird nun so umgeformt, dass das Pivotelement den Wert 1 annimmt (das heißt die komplette 1. Zeile wird durch 15 dividiert multipliziert)

Nummer	x	y	Z	u	v	w	Erg.	Umformung
(1)	2/3	**1**	4/5	1/15	0	0	8	
(2)	60	40	45	0	1	0	480	$(2) - 40 \cdot (1)$
(3)	40	40	45	0	0	1	360	$(3) - 40 \cdot (1)$
(4)	100	120	110	0	0	0	G	$(4) - 120 \cdot (1)$

Nach der Umformung erhält man folgendes Tableau:

x	y	Z	u	v	w	Erg.	Quotient
2/3	**1**	4/5	1/15	0	0	8	8/(2/3)=12
100/3	0	13	-8/3	1	0	160	160/(100/3)=4,8
40/3	0	13	-8/3	0	1	40	40/(40/3) = 3
20	0	14	-8	0	0	G-960	$(4)-120\cdot(1)$

Der maximale Gewinn beträgt bisher 960 Euro, kann aber aufgrund der letzten Zeile noch weiter gesteigert werden.

Es ist ein weiterer Simplexschritt erforderlich.

Das Pivotelement steht in der 1.Spalte und der 3.Zeile.

Division der 3.Zeile durch $\frac{40}{3}$:

Nummer	x	y	Z	u	v	w	Erg.	Umformung
(1)	2/3	1	4/5	1/15	0	0	8	$(1)-2/3\cdot(3)$
(2)	100/3	0	13	-8/3	1	0	160	$(2)-100/3\cdot(3)$
(3)	**1**	0	0,975	-0,2	0	0,075	3	
(4)	20	0	14	-8	0	0	G-960	$(4)-20\cdot(1)$

Nach der Umformung erhält man folgendes Tableau:

x	y	Z	u	v	w	Erg.
0	1	0,15	0,2	0	-0,05	6
0	0	-19,5	4	1	-2,5	60
1	0	0,975	-0,2	0	0,075	3
0	0	-5,5	-4	0	-1,5	G-1020

Da in der letzten Zeile keine positiven Werte mehr stehen, kann der Gewinn nicht weiter gesteigert werden.
Der maximale Gewinn beträgt 1020 Euro, der auch schon in Aufgabe 2.1 ohne die Singapurketten erreicht wurde.

Aus dem Tableau ergibt sich y = 6, x = 3 und z = 0.
Es lohnt sich daher nicht, Singapurketten herzustellen.