Hauptprüfung Abiturprüfung 2015 (ohne CAS)

Baden-Württemberg

Vektorgeometrie

Hilfsmittel: GTR, Formelsammlung

berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

April 2015

1

Gegeben sind die drei Punkte A(2/1/1), B(6/4/1) und C(3/8/1).

1.1
Weisen Sie nach, dass das Dreieck ABC in der Ebene

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $s,t \in \mathbb{R}$ liegt.

Welche besondere Lage hat diese Ebene ?

(3 Punkte)

1.2
Untersuchen Sie, ob das Dreieck ABC gleichschenklig und rechtwinklig ist.

(4 Punkte)

1.3
Geben Sie die Koordinaten eines Punktes D an, sodass die Pyramide ABCD ein Volumen von 125 Volumeneinheiten hat.

(3 Punkte)

1.4
Eine Gerade verläuft durch den Punkt Q(7/6/5) in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie den Punkt, in dem diese Gerade die Ebene E schneidet.
Begründen Sie mit Hilfe einer Zeichnung, dass die Gerade im Innern des Dreiecks ABC auf die Ebene trifft.

(5 Punkte)
----
15 Punkte

Lösungen

1.1

Aufstellen der Ebene durch die Punkte A, B und C.

E: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC}$

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6-2 \\ 4-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3-2 \\ 8-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ was zu zeigen war.

Da die x_3-Koordinaten der Richtungsvektoren Null sind, ist die Ebene parallel zur x_1x_2-Ebene (mit Abstand 1 LE)

1.2
Kontrolle der Gleichschenkligkeit des Dreiecks:

$\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+9+0} = 5$ LE $\qquad \overline{AC} = |\overrightarrow{AC}| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1+49+0} = \sqrt{50}$

$\overline{BC} = |\overrightarrow{BC}| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+16+0} = 5$

Das Dreieck ist gleichschenklig, da zwei der drei Seiten gleich lang sind.

Kontrolle der Rechtwinkligkeit des Dreiecks:

Das Dreieck ist rechtwinklig, wenn gemäß des Satzes von Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$ gilt:

$5^2 + 5^2 = \sqrt{50}^2$
Da diese Gleichung richtig ist, ist das Dreieck rechtwinklig.

1.3

$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot A_{Dreieck} \cdot h_{Pyramide}$

Es gilt $A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = 12{,}5$ Flächeneinheiten.

Für die Pyramidenhöhe muss gelten: $125 = \frac{1}{3} \cdot 12{,}5 \cdot h \Rightarrow h = 30$
Die Pyramidenhöhe muss 30 sein, das heißt, dass der Punkt D den x_3-Wert 31 haben muss (da die Grundflächenebene sich bereits auf der Höhe $x_3 = 1$ befindet).
Jeder Punkt D(x/y/31) kann als Lösung angegeben werden, also z.B. D(2/1/31).

1.4

Gleichung der Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt von g und E: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

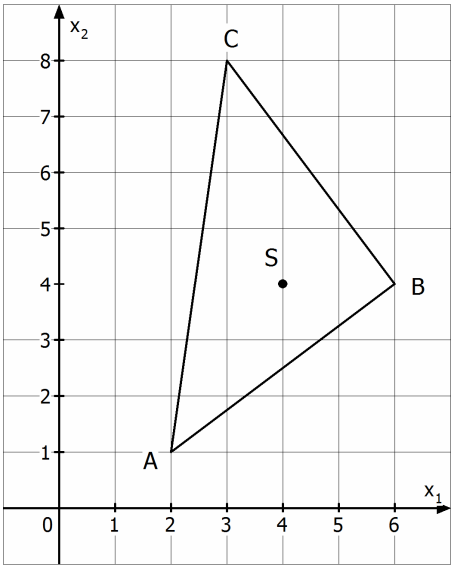
umgeformt: $s \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

Lösung mit GTR: s = 0,44 ; t = 0,24 ; r = -1

Einsetzen von r = -1 in g ergibt den Schnittpunkt S(4/4/1).

Zeichnerische Begründung, dass S innerhalb des Dreiecks ABC liegt:

Da alle Punkte die x_3-Koordinate 1 besitzen, genügt es, wenn man sich zeichnerisch nur die x_1 und x_2-Koordinaten betrachtet, also A(2/1) und B(6/4) und C(3/8) und S(4/4).



Anhand der Zeichnung erkennt man, dass S innerhalb des Dreiecks ABC liegt.

Hinweis:
Bei einem Nachweis mit einer dreidimensionalen Darstellung muss zusätzlich der Hinweis erfolgen, dass die Punkte alle in einer Ebene liegen.
Alleine anhand der dreidimensionalen Darstellung kann man nicht erkennen, ob ein Punkt S im Innern eines Dreiecks ABC liegt.