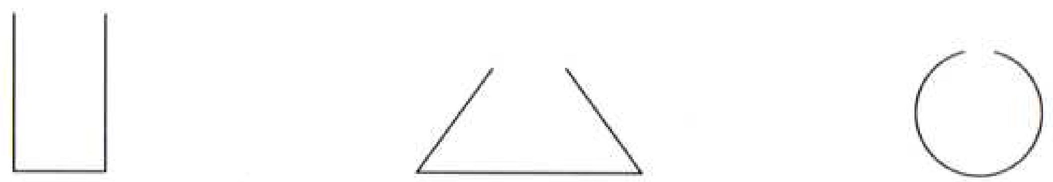
Abiturprüfung Mathematik 2011 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien – Anwendungsorientierte Aufgabe
Teil 3, Aufgabe 1

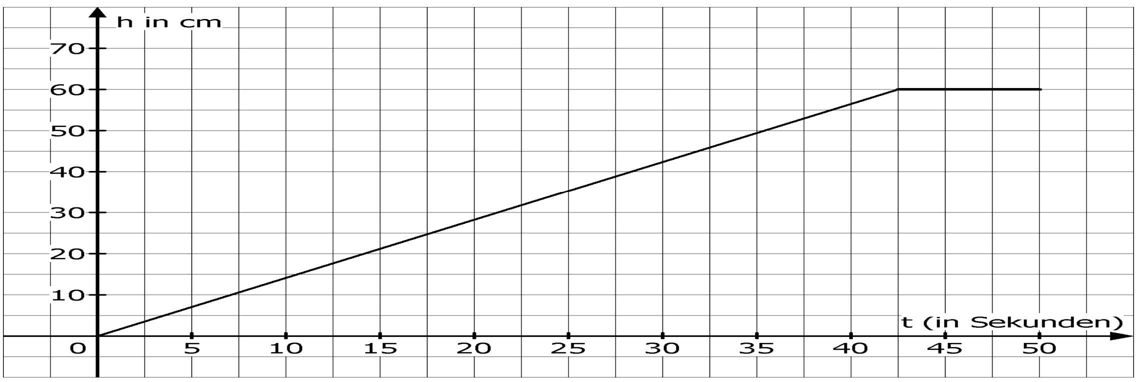
1
Gegeben sind folgende drei Wasserbehälter (hier im Längsschnitt dargestellt).
Die Zeichnungen sind nicht maßstabsgetreu.



Zylindrischer Eimer (mit kreisförmiger Grundfläche) — Kegelstumpfförmiger Kolben (mit kreisförmiger Grundfläche) — Kugel

Jeder dieser drei Behälter wird gleichmäßig mit einem Liter Wasser pro Sekunde vollständig gefüllt.
Die Wasserhöhe in cm in Abhängigkeit von der Zeit t in s wird für jeden Behälter auf eine andere Weise beschrieben, und zwar

- durch die Funktion w mit $w(t) = \begin{cases} 0{,}00178t^3 - 0{,}096t^2 + 2{,}34t & 0 \le t < 35 \\ 40{,}6175 & t \ge 35 \end{cases}$
- durch das Schaubild



- durch die Tabelle

Zeit	0	2,3	10,8	20,3	28,5	35,7	41,8	46,9	51,1	54,6	60
Wasserhöhe	0	1	5	10	15	20	25	30	35	40	40

1.1
Zu welchem Behälter muss das Schaubild gehören ? Begründen Sie Ihre Antwort.
Wie hoch ist der Eimer ?
Welcher Behälter hat das kleinste Volumen ?

(6 Punkte)

1.2
Wie schnell steigt der Wasserspiegel im Kolben, wenn das Wasser geraade eine Höhe von 28 cm erreicht hat ?

(4 Punkte)

1.3
Der Eimer wird nochmals gefüllt, der Wasserzufluss ist jetzt nicht mehr konstant.
Er beginnt mit einem Liter pro Sekunde und sinkt pro Sekunde um 2%.
Wie lange dauert es, bis der Eimer voll ist ? (5 Punkte)

----
15 Punkte

Abiturprüfung Mathematik 2011 (Baden-Württemberg)
Berufliche Gymnasien – Anwendungsorientierte Aufgabe
Teil 3, Lösung Aufgabe 1

1.1

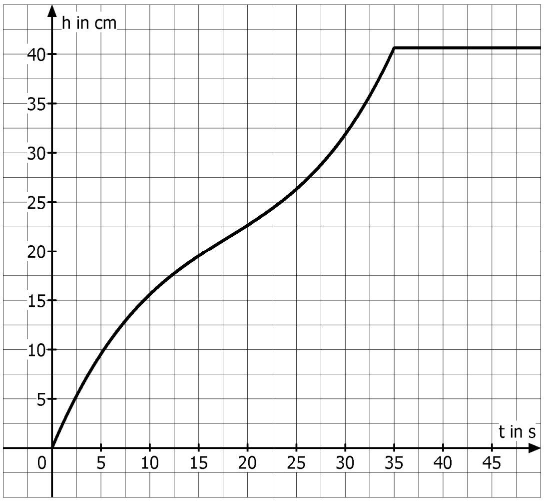
Das Schaubild zeigt einen linearen Anstieg.
Das bedeutet, dass in gleichen Zeitabschnitten die Wasserhöhe um den gleichen Wert steigt.

Für das Gefäß bedeutet dies, dass der Querschnitt des Gefäßes konstant sein muss.
Dies trifft nur auf den zylindrischen Eimer zu.

Daher gehört das Schaubild zum Eimer.

Die Höhe des Eimers beträgt 60 cm, da das Schaubild bei h = 60 cm in eine waagrechte Gerade übergeht.

Schaubild der Funktion w(t):



Die Höhe steigt zunächst steil an, anschließend ist die Kurve etwas flacher.
Gegen Ende wird die Kurve wieder steiler.
Für den Querschnitt des Gefäßes heißt dies, dass der Querschnitt zunächst klein ist, dann größer wird und bei einer gewissen Füllhöhe wieder kleiner wird.
Dies trifft auf die Kugel zu.

Folglich gehört die Tabelle zum kegelstumpfförmigen Kolben.

Da jeder Behälter mit einem Liter pro Sekunde befüllt wird, hat derjenige Behälter das kleinste Volumen, der am schnellsten gefüllt ist.

Der Eimer ist gemäß des Schaubildes nach 42,5 Sekunden gefüllt.
Die Kugel ist gemäß der Funktion nach 35 Sekunden gefüllt.
Der Kegelstumpf ist gemäß der Tabelle nach 54,6 Sekunden gefüllt.

Somit hat die Kugel das kleinste Volumen.

1.2

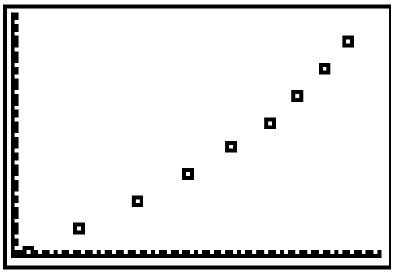
Die Geschwindigkeit des Anstiegs des Wasserspiegels im Kolben wird mit Hilfe der Ableitungsfunktion ermittelt.

Da die Tabelle zu dem Kolben gehört, muss zunächst eine geeignete Funktionsgleichung für die Wasserhöhe des Kolbens gefunden werden.

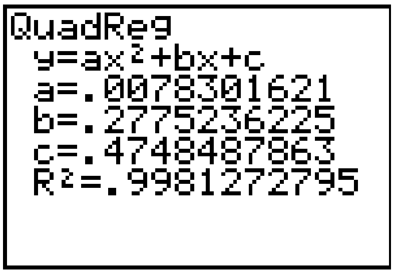
Hierzu bietet sich eine Regression an mit den Punkten (0/0); (2,3/1); … ; (54,6/40) die sich aus der Tabelle ergeben. Lediglich der letzte Punkt (60/40) wird bei der Regression nicht verwendet.

Um festzustellen, mit welcher Funktion eine Regression durchgeführt werden soll, müssen zunächst die Punkte mit Hilfe des GTR veranschaulicht werden:

Veranschaulichung der Punkte



Da eine lineare Funktion (Gerade) nicht sinnvoll ist, wird eine quadratische Regression (Parabel) angesetzt.



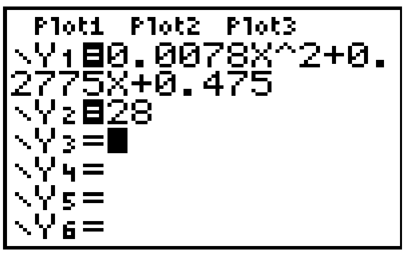
Da R^2 fast 1 ist, ist die quadratische Regression brauchbar.

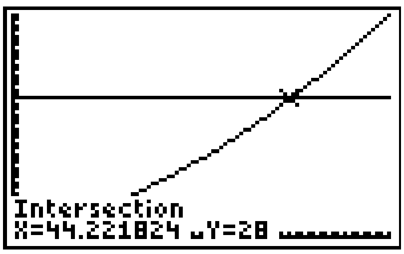
Die Funktion für die Wasserhöhe abhängig von der Zeit t lautet

$h(t) = 0{,}0078t^2 + 0{,}2775t + 0{,}475$

Anhand der Funktion kann nun berechnet werden, zu welchem Zeitpunkt die Höhe 28 cm erreicht wird:

$h(t) = 28 \Rightarrow t \approx 44{,}2$





Mit $h'(t) = 0{,}0156t + 0{,}2775$ folgt $h'(44{,}2) = 0{,}97$

Bei einer Höhe von 28 cm steigt der Wasserspiegel im Kolben um ca. 0,97 cm/s.

1.3

Nun ist der Wasserzufluss nicht mehr konstant.

Zu Beginn beträgt der Wasserzufluss 1 Liter pro Sekunde.
Nach 1 Sekunde beträgt der Zufluss $1 \cdot 0{,}98 = 0{,}98$ Liter pro Sekunde.
Nach 2 Sekunden beträgt der Zufluss $1 \cdot 0{,}98^2$ Liter pro Sekunde.

Nach t Sekunden beträgt der Zufluss $1 \cdot 0{,}98^t$ Liter pro Sekunde.

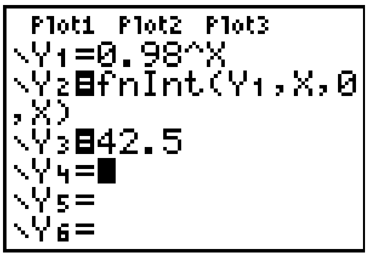
Der Zufluss wird daher durch die Funktion $g(t) = 0{,}98^t$ beschrieben.
Da der Zufluss eine Änderungsrate der Volumenfunktion entspricht, ergibt sich die Bestandsfunktion als Integral der Funktion g(t).

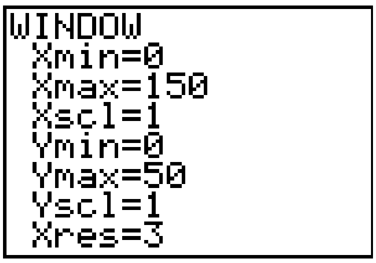
Für die Volumenfunktion gilt daher $V(t) = \int_0^t g(u)du$

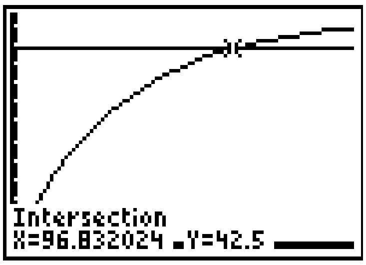
(da die Variable t auf dem Integral steht, muss bei der Funktion g die Variable umbenannt werden.

Da der Eimer 42,5 Liter fasst ist der Wert von t gesucht, so dass gilt:

$$42{,}5 = \int_0^t g(u)du$$







Hinweis: Durch die Einstellung Xres = 3 wird das Schaubild schneller gezeichnet.

Der Eimer ist nach ca. 97 Sekunden gefüllt.