**Abiturprüfung Mathematik 2005 (Baden-Württemberg)**
**Berufliche Gymnasien ohne TG – Analysis Gruppe I, Aufgabe A**

Für jedes a > 0 ist eine Funktion $f_a$ definiert durch

$$f_a(x) = \frac{1}{2a} x \cdot (x-a)^2 \text{ mit } x \in R$$

Das Schaubild von $f_a$ heißt $K_a$.

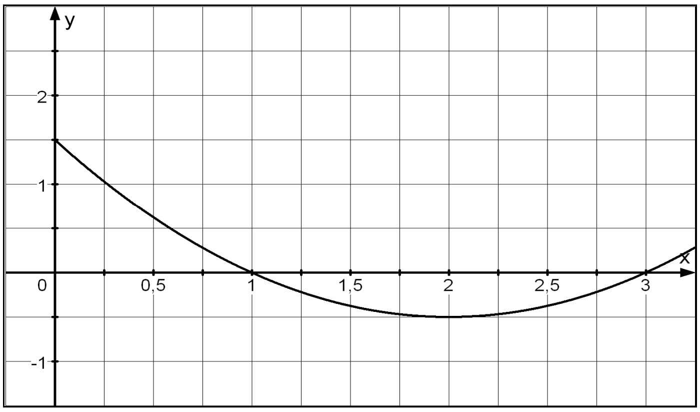
a) Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes von $K_4$ exakt. Zeichnen Sie $K_4$. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von $K_4$, der y-Achse und der Normalen im Wendepunkt von $K_4$ eingeschlossen wird. (14 Punkte)

b) Welche Parallelen zur Geraden mit $y = \frac{3}{8}x$ berühren $K_4$ ? (5 Punkte)

c) Beschreiben Sie den Verlauf des Schaubildes $K_a$ in Abhängigkeit von a. (6 Punkte)

d) Bestimme Sie die Ortskurve der Hochpunkte der Kurvenschar. Beschreiben Sie die Lage der Tiefpunkte der Kurvenschar. Begründen Sie, dass alle Wendepunkte oberhalb der x-Achse liegen. (10 Punkte)

e) Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitungsfunktion $f'_a$ für einen bestimmten Wert von a.




Bestimmen Sie diesen Wert von a. Begründen Sie Ihre Entscheidung. (5 Punkte)

f) Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = 1{,}5 \cdot x \cdot e^{-0{,}3x^2}$ mit $0 \le x \le 4$.
Ermitteln Sie die Stelle, an der die Funktionswerte von $f_4$ und g am stärksten voneinander abweichen. Wie groß ist die maximale Abweichung ? (5 Punkte)

**Abiturprüfung Mathematik 2005 (Baden-Württemberg)**
**Berufliche Gymnasien ohne TG – Analysis Gruppe I, Aufgabe B**

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x)=\frac{2}{5}x^2+\cos(2x)$ mit $x\in R$
K ist das Schaubild von f.

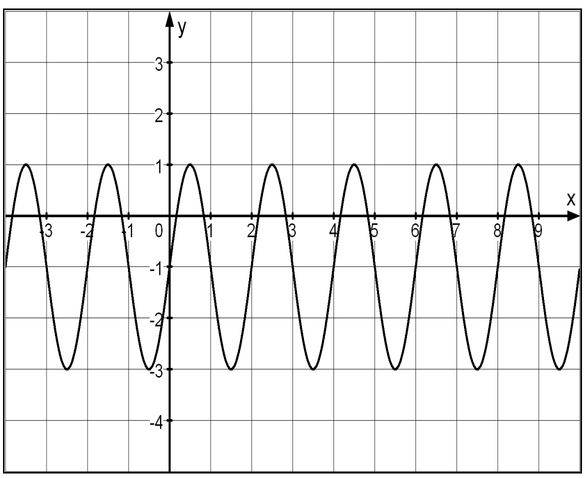
a) Zeigen Sie, dass K symmetrisch zur y-Achse ist.
Bestimmen Sie für K die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sowie die Hoch- und Tiefpunkte im Bereich -3 < x < 3. Zeigen Sie, dass K für -3 < x < 3 genau vier Wendepunkte hat. Zeichnen Sie K. (13 Punkte)

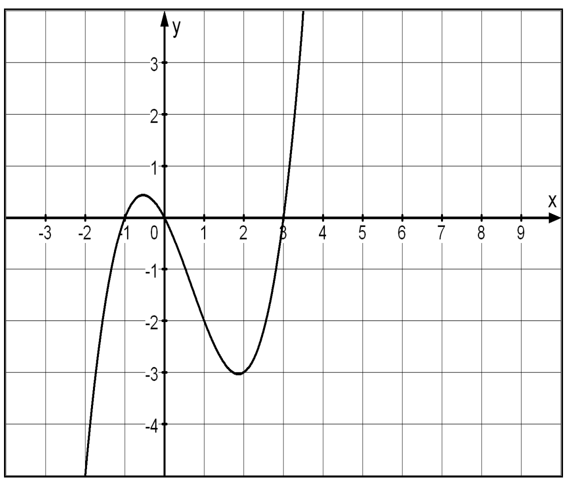
b) Das Schaubild der Funktion h mit $h(x)=\frac{2}{5}x^2,\ x\in R$ schneidet K im Bereich -3 < x < 3 vier Mal, d.h. es gibt drei Flächenstücke zwischen K und dem Schaubild von h. Berechnen Sie die exakten Inhalte dieser drei Flächenstücke mit Hilfe von Stammfunktionen.
Es gilt: $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}(f(x)-h(x))dx=0$.
Interpretieren Sie dies im Hinblick auf die von K und dem Schaubild von h im Intervall $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{3}{4}\pi\right]$ eingeschlossene Fläche. (12 Punkte)

c) K soll im Bereich $-2\le x\le 2$ durch das Schaubild einer Polynomfunktion möglichst niedrigen Grades angenähert werden. Man geht davon aus, dass das gesuchte Schaubild die Extrempunkte P(-1,30/-0,18); Q(0/1) und R(1,30/-0,18) hat. Bestimmen sie den Funktionsterm. (6 Punkte)

d) Zeigen Sie, dass K keine Extrempunkte im Bereich $x\ge 3$ hat. (4 Punkte)

e) In der folgenden Abbildung sind die Schaubilder von zwei Funktionen dargestellt. Bestimmen Sie dazu passende Funktionsterme und beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise. (10 Punkte)



**Abiturprüfung Mathematik 2005 (Baden-Württemberg)**
**Berufliche Gymnasien ohne TG – Analysis Gruppe I, Lösung Aufgabe A**

$f_4(x)=\frac{1}{8}x\cdot(x-4)^2=\frac{1}{8}x\cdot(x^2-8x+16)=\frac{1}{8}(x^3-8x^2+16x)$

$f_4'(x)=\frac{1}{8}(3x^2-16x+16)$

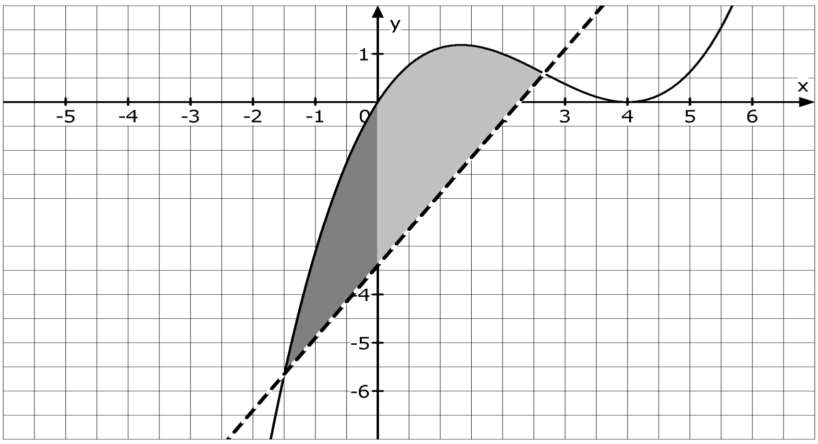
$f_4''(x)=\frac{1}{8}(6x-16)$ und $f_4'''(x)=\frac{1}{8}\cdot 6=\frac{3}{4}$

Wendepunkte:

$f_4''(x)=0\Rightarrow\frac{1}{8}(6x-16)=0\Rightarrow x=\frac{8}{3}$

$f_4'''(\frac{8}{3})\neq 0\Rightarrow WP(\frac{8}{3}/\frac{16}{27})$

Zeichnung für a = 4 und für die Flächenberechnung:




Für die Berechnung der Fläche muss die Gleichung der Normalen im WP aufgestellt werden:

Steigung der Tangente im Wendepunkt: $f_4'(\frac{8}{3})=-\frac{2}{3}$

Aus $m_{Norm}\cdot m_{Tang}=-1$ ergibt sich $m_{Norm}=\frac{-1}{-\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$

Aus der Punkt-Steigungs-Form folgt: $y-\frac{16}{27}=\frac{3}{2}\cdot(x-\frac{8}{3})\Rightarrow y=\frac{3}{2}x-\frac{92}{27}$

Achtung: Die beschriebene Fläche in der Aufgabenstellung ist nicht eindeutig.
Es könnte sowohl nach dem Inhalt der dunkleren Fläche in obigem Schaubild gefragt sein als auch nach der helleren Fläche.

Berechnung der hellen Fläche: $\int_0^{\frac{8}{3}}(f(x)-(\frac{3}{2}x-\frac{92}{27}))dx\approx 6{,}12$ mit Hilfe des GTR.

Berechnung der dunklen Fläche:
Linke Schnittstelle der Normalen und dem Schaubild von f(x): $x = -1{,}4967$ (GTR)

Daraus folgt: $\int_{-1,4967}^{0} (f(x) - (\frac{3}{2}x - \frac{92}{27}))dx \approx 3{,}265$

b) Die Steigung der Geraden ist $m = \frac{3}{8}$. Gesucht ist ein Punkt auf $K_4$, dessen Tangentensteigung $\frac{3}{8}$ ist.

$f_4'(x) = \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{1}{8}(3x^2 - 16x + 16) = \frac{3}{8} \Rightarrow 3x^2 - 16x + 16 = 3 \Rightarrow 3x^2 - 16x + 13 = 0$

Mit Hilfe des GTR oder mit der Mitternachtsformel folgt daraus x = 1 oder $x = \frac{13}{3} \approx 4{,}33$

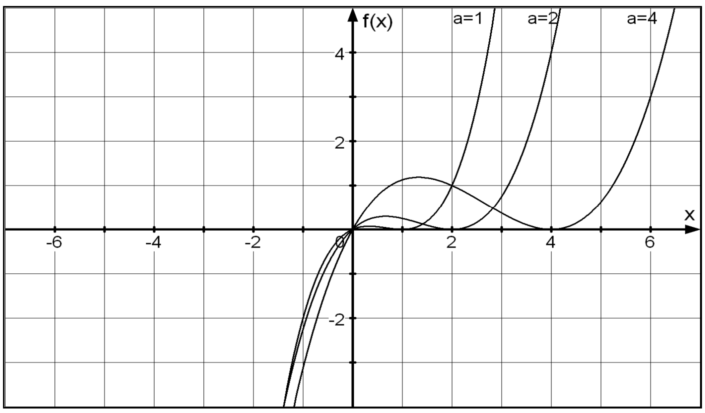
Daraus ergeben sich die Berührpunkte $B_1(1/f(1)) = (1/\frac{9}{8})$ und $B_2(\frac{13}{3}/\frac{13}{216})$.

Mit Hilfe der Punkt-Steigungs-Form ergeben sich die gesuchten Geraden:

$g_1:\ y - \frac{9}{8} = \frac{3}{8}(x-1) \Rightarrow y = \frac{3}{8}x + \frac{3}{4}$ und

$g_2:\ y - \frac{13}{216} = \frac{3}{8}(x - \frac{13}{3}) \Rightarrow y = \frac{3}{8}x - \frac{169}{108}$

c)




Mit Hilfe einer Skizze mit dem GTR für verschiedene Parameterwerte für a kann man aus den Scharkurven entnehmen:

- Alle Scharkurven verlaufen durch O(0/0) und besitzen an der Nullstelle P(a/0) einen Tiefpunkt (doppelte Nullstelle).
- Die Scharkurven verlaufen nur im 3. und im 1.Quadrant.
- Für $x \to -\infty$ strebt $f(x) \to -\infty$. Für $x \to \infty$ strebt $f(x) \to \infty$.
- Die Scharkurven haben im 1.Quadrant noch einen Hochpunkt zwischen den beiden Nullstellen.
- Zwischen Hoch- und Tiefpunkt liegt ein Wendepunkt.

d) Um die Ortskurve der Hochpunkte zu berechnen, muss zunächst der allgemeine Hochpunkt der Kurvenschar berechnet werden.

$$f_a(x) = \frac{1}{2a} \cdot x \cdot (x^2 - 2ax + a^2) = \frac{1}{2a}(x^3 - 2ax^2 + a^2x)$$
$$f_a'(x) = \frac{1}{2a}(3x^2 - 4ax + a^2) \text{ und } f_a''(x) = \frac{1}{2a}(6x - 4a)$$

Notwendige Bedingung für einen Hochpunkt: $f_a'(x) = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2a}(3x^2 - 4ax + a^2) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4ax + a^2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{4a \pm \sqrt{16a^2 - 12a^2}}{6} = \frac{4a \pm 2a}{6}$$

Daraus ergibt sich $x_1 = a$ und $x_2 = \frac{1}{3}a$.

Da bei x = a die doppelte Nullstelle mit dem Tiefpunkt vorliegt, kann der Hochpunkt nur bei $x = \frac{1}{3}a$ sein.

Kontrolle mit hinreichender Bedingung: $f_a''(\frac{1}{3}a) = \frac{1}{2a}(2a - 4a) < 0$, also Hochpunkt.

$f_a(\frac{1}{3}a) = \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{3}a \cdot (\frac{1}{3}a - a)^2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{9}a^2 = \frac{2}{27}a^2$, also $HP(\frac{1}{3}a / \frac{2}{27}a^2)$.

Ortskurve der Hochpunkte:

$$x = \frac{1}{3}a \Rightarrow a = 3x$$

Eingesetzt in den y-Wert des Hochpunktes ergibt sich $y = \frac{2}{27}(3x)^2 = \frac{2}{3}x^2$ und dies ist die Ortskurve der Hochpunkte.

Alle Tiefpunkte T(a/0) der Kurvenschar liegen auf der x-Achse.

Der Wendepunkt einer Scharkurve liegt zwischen dem Tiefpunkt und dem Hochpunkt. Da der Tiefpunkt auf der x-Achse liegt und der Hochpunkt oberhalb der x-Achse (der y-Wert des Hochpunktes ist für jeden Wert von Parameter a positiv), muss auch der Wendepunkt oberhalb der x-Achse liegen.

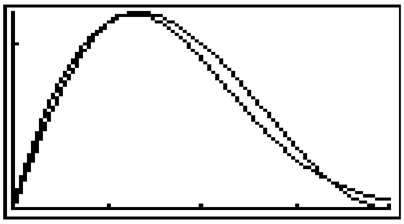
(Man könnte auch alternativ die allgemeinen Koordinaten des Wendepunktes berechnen. Dies wäre $WP(\frac{2}{3}a / \frac{1}{27}a^2)$. Da der y-Wert des Wendepunktes für alle Parameterwerte a immer positiv ist, liegt er oberhalb der x-Achse).

e) Die Ableitungsfunktion schneidet an den Stellen die x-Achse, an denen das Schaubild von f einen Punkt mit waagrechter Tangente besitzt (Extrempunkt oder Sattelpunkt). Aus dem Schaubild kann nun entnehmen, dass die Ableitungsfunktion die x-Achse bei x = 1 und x = 3 schneidet.
Hierbei entspricht die Stelle x = 1 dem Hochpunkt von Schaubild f (Vorzeichenwechsel von + nach -) und x = 3 dem Tiefpunkt von Schaubild f (VZW von – nach +).

Da der allgemeine Hochpunkt den x-Wert $\frac{a}{3}$ hat, gilt $\frac{a}{3} = 1 \Rightarrow a = 3$.

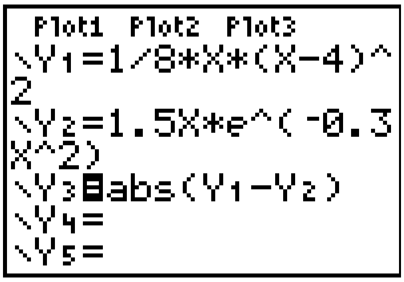
Der allgemeine Tiefpunkt hat den x-Wert a, also gilt auch hier a = 3.

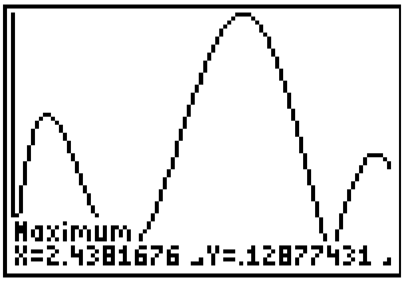
f) Die Schaubilder der beiden Funktionen g und $f_4$ für $0 \le x \le 4$ ergibt mit dem GTR folgendes:



Daran erkennt man, dass in diesem Intervall mal das eine, mal das andere Schaubild oberhalb liegt.
Wenn das Schaubild von $f_4$ oberhalb von g liegt, ist der senkrechte Abstand $d(x) = f_4(x) - g(x)$.
Wenn das Schaubild von g oberhalb von $f_4$ liegt, ist der senkrechte Abstand $d(x) = g(x) - f_4(x)$.
Nun gibt es zwei Möglichkeiten:

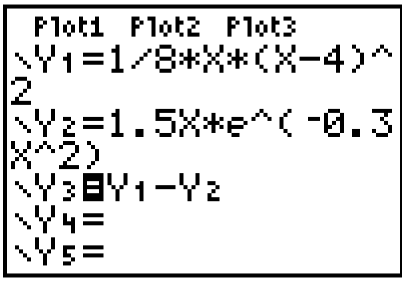
1.) Man arbeitet mit der Betragsfunktion $d(x) = |f_4(x) - g(x)|$ und untersucht das Schaubild von d(x) (abgespeichert unter Y3) auf Hochpunkte mit Hilfe des GTR.

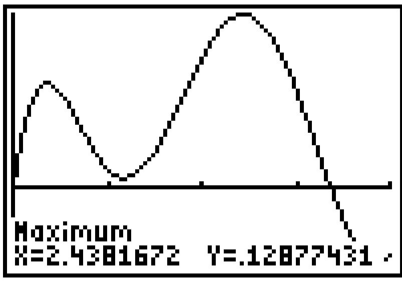


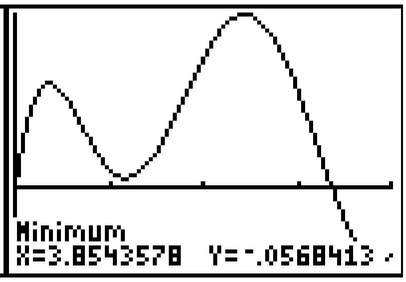




Die maximale Abweichung befindet sich an der Stelle x = 2,438 und die Abweichung beträgt 0,129.

2.) Man arbeitet mit der Funktion $d(x) = f_4(x) - g(x)$ und untersucht das Schaubild von d(x) (abgespeichert unter Y3) auf Hoch- und Tiefpunkte mit Hilfe des GTR.




Der y-Wert des höchsten Punktes des Schaubildes beträgt 0,129 an der Stelle x = 2,438.
Der tiefste Punkt befindet sich an der Stelle x = 3,85 mit y = -0,057.
Also ergibt sich als maximale Abweichung 0,129.

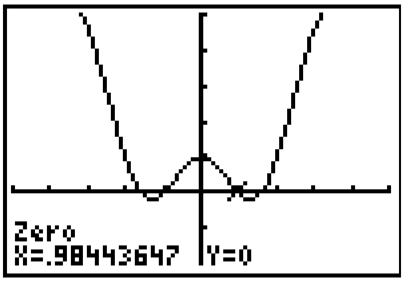
**Abiturprüfung Mathematik 2005 (Baden-Württemberg)**
**Berufliche Gymnasien ohne TG – Analysis Gruppe I, Lösung Aufgabe A**

a) Symmetrie zur y-Achse liegt vor, wenn gilt: $f(-x) = f(x)$.

Kontrolle: $f(-x) = \frac{2}{5} \cdot (-x)^2 + \cos(-2x) = \frac{2}{5}x^2 + \cos(2x) = f(x)$

(Hinweis: Es gilt allgemein $\cos(-x) = \cos(x)$ ).

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:
y-Achse: $f(0) = 1$, also $S_y(0/1)$
x-Achse:

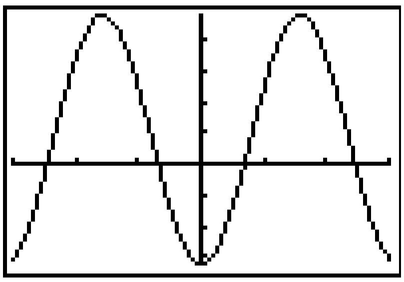



Mit Hilfe des GTR und aus Symmetriegründen ergeben sich folgende 4 Schnittpunkte:
$N_1(0{,}98/0)$, $N_2(1{,}58/0)$, $N_3(-1{,}58/0)$ und $N_4(-0{,}98/0)$.

Aus dem GTR-Schaubild lassen sich ebenfalls die Extrempunkte entnehmen:
HP(0/1) und TP1(1,30/-0,18) und TP2(-1,30/-0,18)

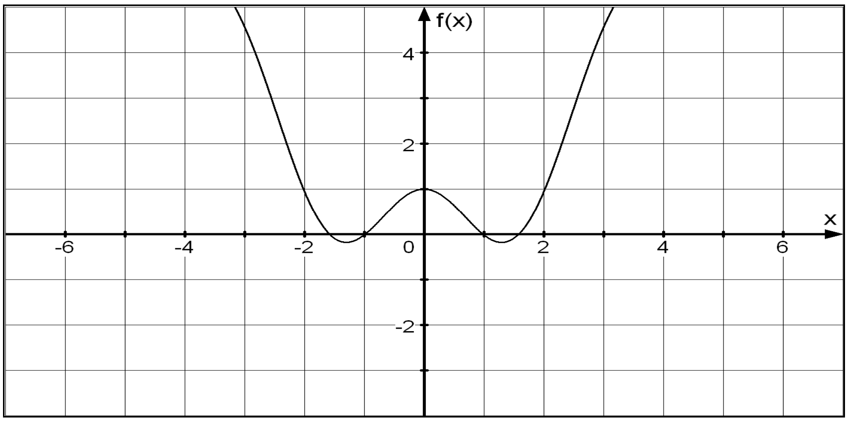
Wendepunkte:
$f'(x) = \frac{4}{5}x - 2\sin(2x)$ und $f''(x) = \frac{4}{5} - 4\cos(2x)$

Notwendige Bedingung für Wendepunkt: $f''(x) = 0$
Hinreichende Bedingung: $f'''(x) \neq 0$ oder Vorzeichenwechsel bei $f''(x)$
Aus dem GTR-Schaubild für $f''(x)$ kann man 4 Nullstellen für -3 < x < 3 entnehmen:

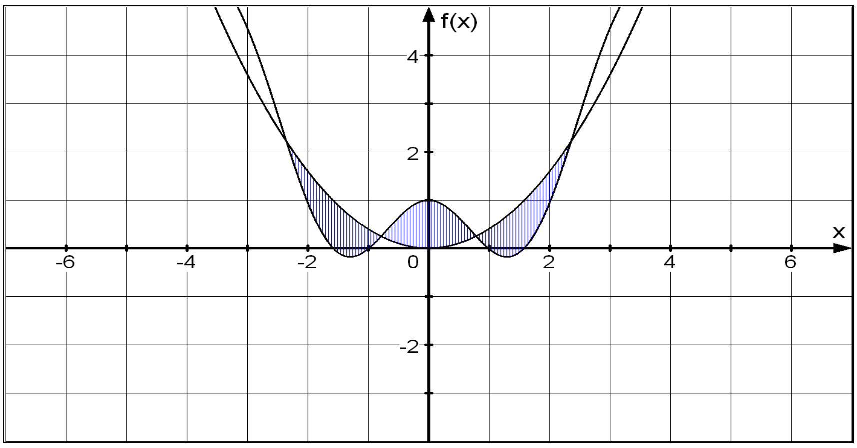


Da diese 4 Nullstellen des Schaubildes von $f''$ alle einen Vorzeichenwechsel haben, liegen an allen 4 Stellen des Schaubildes von f auch Wendepunkte vor.

Zeichnung von K:




b)




Für die Berechnung der Fläche müssen die Schnittpunkte der Schaubilder ermittelt werden:

$f(x) = h(x) \Rightarrow \cos(2x) = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$ für $k \in Z$

Für k = 0 ergibt sich $x = \frac{\pi}{4}$ und für k = 1 ergibt sich $x = \frac{3}{4}\pi$ und für k = -1 ergibt sich $x = -\frac{3}{4}\pi$ .

Da die Flächen links und rechts der y-Achse gleich groß sind, ergibt sich:

$$A = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} (f(x) - h(x))dx + 2 \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} (h(x) - f(x))dx = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)dx + 2 \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} -\cos(2x)dx$$

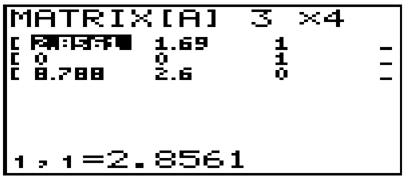
$$= 2 \cdot \left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + 2 \cdot \left[-\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} = 2 \cdot (\frac{1}{2} - 0) + 2 \cdot (-\frac{1}{2} \cdot (-1) - (-\frac{1}{2}) \cdot 1) = 3$$

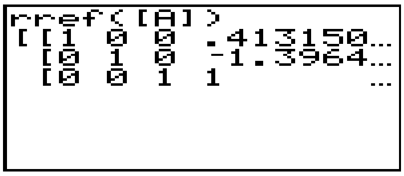
Jedes dieser drei Flächenstücke hat den Inhalt 1, der Gesamtflächeninhalt beträgt somit A = 3.

Das Integralwert von 0 über dem Intervall $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{3}{4}\pi\right]$ bedeutet, dass die Fläche zwischen den Schaubildern der Funktionen f und h im Intervall $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{1}{4}\pi\right]$ genauso groß ist wie im Intervall $\left[\frac{1}{4}\pi;\frac{3}{4}\pi\right]$.

c) Da die Polynomfunktion drei Extrempunkte hat, muss die erste Ableitung eine Funktion von mindestens Grad 3 sein. Also muss die Ausgangsfunktion einen Grad von mindestens 4 haben.
Da die angegebenen Extrempunkte symmetrisch zur y-Achse liegen, kann die Polynomfunktion ebenfalls als symmetrisch zur y-Achse unterstellt werden. Es kommen somit nur gerade Hochzahlen in der Polynomfunktion vor:
Ansatz: $p(x) = ax^4 + bx^2 + c$ mit $p'(x) = 4ax^3 + 2bx$.
Bedingungen:
$p(1{,}3) = -0{,}18 \Rightarrow 1{,}3^4 \cdot a + 1{,}3^2 \cdot b + c = -0{,}18$
$p(0) = 1 \Rightarrow c = 1$
$p'(1{,}3) = 0 \Rightarrow 4 \cdot 1{,}3^3 \cdot a + 2 \cdot 1{,}3 \cdot b = 0$

Eingabe in den GTR:




Also $p(x) = 0{,}413 \cdot x^4 - 1{,}396 \cdot x^2 + 1$

d) Extrempunkte von K: $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{4}{5}x - 2 \cdot \sin(2x) = 0 \Rightarrow \sin(2x) = \frac{2}{5}x$
Für $x \geq 3$ ergibt die rechte Seite der Gleichung einen Wert $\geq 1{,}2$.
Da die Sinusfunktion jedoch maximal den Wert 1 annehmen kann, ist die Gleichung für $x \geq 3$ nicht lösbar, also existiert für diesen x-Bereich auch kein Extrempunkt.

e) Bei dem linken Schaubild handelt es sich um eine allgemeine Sinus- oder Kosinusfunktion.
Ansatz: $y = a \cdot \sin(b(x + c)) + d$
Die Sinuskurve ist um 1 nach unten verschoben, also d = -1.
Die Amplitude beträgt a =2. Die Kurve ist nicht nach links oder rechts verschoben, also c = 0.
Die Periode des Schaubildes ist 2 und aus der Formel $p = \frac{2\pi}{b}$ folgt $b = \frac{2\pi}{2} = \pi$.
Also lautet die Funktionsgleichung $y = 2 \cdot \sin(\pi \cdot x) - 1$

Bei dem rechten Schaubild handelt es sich um eine ganzrationale Funktion 3.Grades, da das Schaubild drei Nullstellen besitzt.
Aufgrund der bekannten Nullstellen kann die Funktionsgleichung als Linearfaktorzerlegung dargestellt werden:
$y = a \cdot (x + 1) \cdot x \cdot (x - 3)$

Mit Hilfe des Punktes P(1/-2) kann nun a berechnet werden:
$-2 = a \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-2) \Rightarrow a = 0{,}5 \Rightarrow y = 0{,}5(x + 1) \cdot x \cdot (x - 3)$