Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2011 Teil 4, Vektorgeometrie, Aufgabe 2
Baden-Württemberg

2.1
Für $k \in \mathbb{R}$ ist das folgende lineare Gleichungssystem gegeben:

$$\begin{array}{rrrcl} 4x_1 & +2x_2 & +(2k-4)x_3 & = & 2 \\ 12x_1 & -6x_2 & +(3k-3)x_3 & = & 3k \\ & & (k^2-k-6)x_3 & = & k^2-4 \end{array}$$

Untersuchen Sie, für welche Werte von k das lineare Gleichungssystem unlösbar, mehrdeutig lösbar bzw. eindeutig lösbar ist.
Geben Sie eine Lösung an, bei der $x_3 = 0$ ist. (7 Punkte)

2.2
Durch die Punkte A(1/-2/3) und B(2/-6/5) wird eine Gerade g festgelegt.

2.2.1
Die Gleichung $2tx_1 - tx_2 + x_3 = -2$ beschreibt für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Ebene E_t.
Es gibt einen Wert t, für den die Gerade g die Ebene E_t in der x_2x_3-Ebene durchstößt.
Bestimmen Sie den Durchstoßpunkt und den zugehörigen Wert von t. (4 Punkte)

2.2.2
Die Punkte P_1 und P_2 liegen auf der Geraden g und haben vom Punkt Q(0/2/1) den Abstand $3\sqrt{21}$.
Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte P_1 und P_2. (4 Punkte)

----
15 Punkte

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG, TG)
Hauptprüfung 2011 Teil 4, Vektorgeometrie, Lösung zu Aufgabe 2
Baden-Württemberg

2.1

Zunächst wird das LGS auf Stufenform gebracht.
Hierzu muss der Ausdruck $12x_1$ auf Null gebracht werden.

$$\begin{array}{rrrcll} 4x_1 & +2x_2 & +(2k-4)x_3 & = & 2 & |\cdot(-3) \\ 12x_1 & -6x_2 & +(3k-3)x_3 & = & 3k & \\ & & (k^2-k-6)x_3 & = & k^2-4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrcl} 4x_1 & +2x_2 & +(2k-4)x_3 & = & 2 \\ & -12x_2 & +(-3k+9)x_3 & = & -6+3k \\ & & (k^2-k-6)x_3 & = & k^2-4 \end{array}$$

Wenn $k^2-k-6 = 0$ ergibt, liegt ein Sonderfall (das heißt unlösbar oder mehrdeutig lösbar) vor.

$k^2-k-6=0 \Rightarrow k_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$ und damit k = 3 oder k = -2.

Für k = 3 lautet die letzte Zeile: $0x_3 = 5$, was zu einem Widerspruch führt.
Daher besitzt das LGS für k = 3 keine Lösung.

Für k = -2 lautet die letzte Zeile $0x_3 = 0$, was zu einer wahren Aussage 0 = 0 führt.
Daher besitzt das LGS für k = -2 unendlich viele Lösungen.

Für alle anderen Werte von k besitzt das LGS eine eindeutige Lösung.

Eine Lösung für $x_3 = 0$ erhält man dadurch, dass man $x_3 = 0$ in das LGS direkt einsetzt:

$$\begin{array}{rrcl} 4x_1 & +2x_2 & = & 2 \\ & -12x_2 & = & -6+3k \\ & 0 & = & k^2-4 \end{array}$$

Aus der 3.Zeile ergeben sich zwei mögliche Lösungen: $k = \pm 2$

Für k =2 erhält man aus der 2.Zeile $x_2 = 0$ und aus der 1.Zeile $x_1 = 0{,}5$.
Eine Lösung lautet also (0,5/0/0).

Für k = -2 erhält man aus der 2.Zeile $x_2 = 1$ und aus der 1.Zeile $x_1 = 0$.
Eine andere Lösung lautet also (0/1/0).

2.2.1

Die Gleichung der Gerade g lautet: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Da der gesuchte Schnittpunkt in der x_2x_3-Ebene liegen soll, wird zunächst der Punkt auf g ermittelt, der in dieser Ebene liegt.
Bedingung: $x_1 = 0 \Rightarrow 1 + r = 0 \Rightarrow r = -1$.

Der Punkt auf g, der in der x_2x_3-Ebene liegt, lautet P(0/2/1) (r = -1 in g einsetzen)

Nun muss der Parameter t der Ebene E_t so gewählt werden, dass der Punkt P(0/2/1) auf der Ebene liegt.
Einsetzen des Punktes P in die Ebene ergibt: $2t \cdot 0 - t \cdot 2 + 1 = -2 \Rightarrow -2t = -3 \Rightarrow t = 1{,}5$

Der Durchstoßpunkt ist der Punkt P.

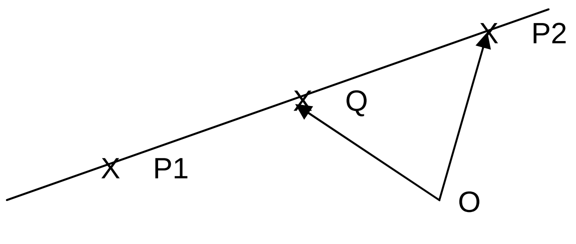
2.2.2

Aus Aufgabe 2.2.1: Gleichung der Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Die Länge des Richtungsvektors von g beträgt $\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{21}$

Die Punkte P1 und P2 sind somit 3 Richtungsvektorlängen vom Geradenpunkt Q entfernt.

Um die Koordinaten von P1 und P2 zu bestimmen, werden die Ortsvektoren der Punkte berechnet.



Berechnung von P2: $\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OQ} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix}$ also P2(3/-10/7)

Berechnung von P1: $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OQ} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 14 \\ -5 \end{pmatrix}$ also P1(-3/14/-5)