Mathematik - Oberstufe

Aufgaben und Musterlösungen zu gebrochenrationalen Funktionen

Zielgruppe: Oberstufe Gymnasium

Schwerpunkt: Anwendung

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Letzte Aktualisierung: November 2009

Datei: Übungsaufgaben zu gebrochenrationalen Funktionen Anwendung

Übungsaufgaben zu gebrochenrationalen Funktionen
Schwerpunkt: Anwendung

Aufgabe 1:
Eine Firma wirbt für die Wärmedämmung von Häusern mit der Verringerung der Heizkosten. Sie behauptet, dass bei einer Dämmschicht der Dicke d für die jährlichen Heizkosten H(d) pro m² Außenwand gilt:

$$H(d) = \frac{10}{d+3} \quad \text{(d in cm; H(d) in €)}$$

a) Bei welcher Dicke der Dämmschicht betragen die Heizkosten noch ein Drittel der Heizkosten ohne Dämmschicht ?

Für das Anbringen einer Dämmschicht der Dicke d berechnet die Firma pro m² einen Betrag

$$F(d) = 72 + 3{,}5d \quad \text{(d in cm; F(d) in €)}$$

b) Welche Bedeutung haben dabei die Zahlen 72 und 3,5 in der Praxis ?

Bei einer Betriebszeit von 20 Jahren setzen sich die Gesamtkosten pro m² zusammen aus den Kosten für das Anbringen der Dämmschicht und den Heizkosten während der folgenden 20 Jahre.

c) Bei welcher Dicke der Dämmschicht sind die Gesamtkosten am kleinsten ?

Aufgabe 2:
Die Herstellungskosten eines Computers in Abhängigkeit von der produzierten Stückzahl werden durch die Funktion H mit

$$H(x) = \frac{1100x + 48000}{2x+3} \quad \text{mit} \quad x \geq 0$$

beschrieben (x: Stückzahl, H(x): Herstellungskosten des x-ten Computers in Euro). Ihr Schaubild sei K.
Skizziere das Schaubild K und zeige, dass die Herstellungskosten ständig sinken.
Wie hoch sind die langfristigen Herstellungskosten ?
Wie hoch sind die durchschnittlichen Herstellungskosten eines Computers bei einer Stückzahl von 1000 bzw. 10.000 Stück.
Ein Händler kauft die Computer zum Herstellungspreis ein und verkauft sie zu einem Preis von 640 Euro.
Ab welcher Stückzahl liegen die Herstellungskosten erstmals unter dem Verkaufspreis ?
Wie hoch ist der Gewinn des Händlers, wenn 5.000 Computer bei der Herstellerfirma geordert werden und die Verkaufsrate 98,5% beträgt ?
Wie hoch muss die Verkaufsrate mindestens sein, so dass kein Verlust entsteht ?

Aufgabe 3:
In einem landwirtschaftlichen Versuchsbetrieb wird auf gleich großen Versuchsflächen jeweils eine bestimmte Menge Mineraldünger ausgebracht.
Nach der Ernte wird der Ertrag bestimmt. Man kommt zu folgenden Ergebnissen:

Mineraldünger in kg	0	10	20
Ertrag in kg	800	880	940

Der Zusammenhang zwischen Mineraldünger und Ertrag soll modellhaft durch die Funktion f mit $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ (x: Menge an Mineraldünger in kg, f(x) Ertrag in kg) beschrieben werden.

Bestimme die Parameter a,b und c so, dass die Funktion f die obigen Ergebnisse wiedergibt (Teilergebnis: $f(x) = \frac{1360x+48000}{x+60}$).
Welcher Ertrag kann nach diesem Modell maximal erzielt werden ?
Welche Menge an Mineraldünger muss eingesetzt werden, so dass der Ertrag auf das 1,5-fache im Vergleich zur ungedüngten Versuchsfläche gesteigert wird ?
Berechne die prozentuale Abweichung des Modells vom realen Ertrag, wenn dieser bei einem Einsatz von 60 kg Mineraldünger 980 kg beträgt.

Da die Funktion f die tatsächlichen Werte nur anfangs gut wiedergibt, werden die obigen Versuchsergebnisse durch eine ganzrationale Funktion g zweiten Grades näherungsweise dargestellt.
Gib eine Funktionsgleichung von g an und berechne damit, bei welcher Menge Mineraldünger der höchste Ertrag erzielt werden kann.
1 kg Mineraldünger kostet 2 Euro. 1 kg Ernteertrag erzielt einen Preis von 6 Euro. Bei welcher Mineraldüngermenge ist der Gewinn am größten ?

Musterlösungen der Übungsaufgaben zu gebrochenrationalen Funktionen
Schwerpunkt: Anwendung

Aufgabe 1:

a) Heizkosten ohne Dämmschicht: $H(0)=\frac{10}{3}=3{,}33$ € pro m²

Gesucht ist die Dicke d, so dass $H(d)=\frac{1}{3}\cdot\frac{10}{3}=\frac{10}{9}$

$\frac{10}{9}=\frac{10}{d+3}\Rightarrow d=6\text{ cm}$

Bei einer Dicke von d = 6 cm betragen die Heizkosten noch ein Drittel der Heizkosten ohne Dämmschicht.

b) Die Zahl 72 entspricht den Fixkosten, die immer zu bezahlen sind, unabhängig davon, wie viel Dämmschicht angebracht wird.
Die Zahl 3,5 ist der Preis in € pro cm Dämmschicht, die angebracht wird.

c) Gesamtkosten nach 20 Jahren = Heizkosten in 20 Jahren + Kosten für das Anbringen:

$G(d)=\frac{10}{d+3}\cdot 20+72+3{,}5d=\frac{200}{d+3}+3{,}5d+72$, d > 0
Von dieser Funktion ist das Minimum gesucht.
Das Minimum kann entweder direkt mit dem GTR ermittelt werden oder mit Hilfe der Ableitung:

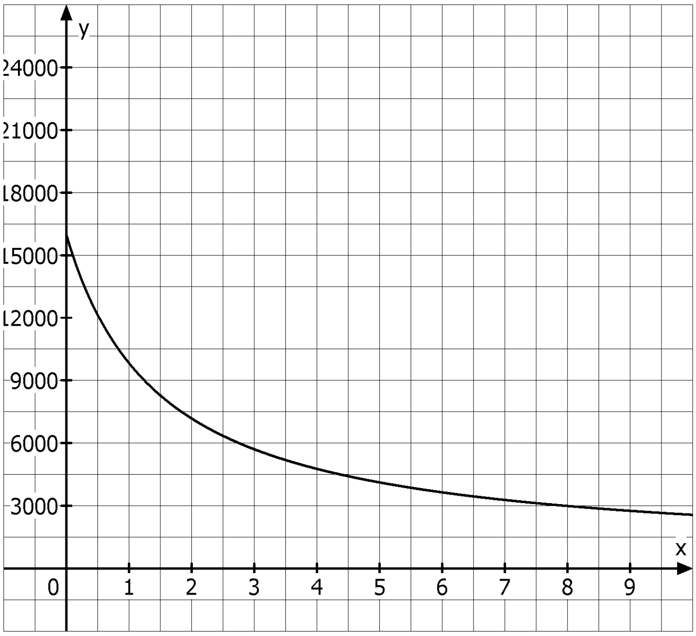
$G'(d)=\frac{-200}{(d+3)^2}+3{,}5$

Notwendige Bedingung: $G'(d)=0\Rightarrow\frac{-200}{(d+3)^2}=-3{,}5\Rightarrow(d+3)^2=\frac{400}{7}\Rightarrow d+3=\pm\sqrt{\frac{400}{7}}$

Daraus folgt $d\approx 4{,}56\text{ cm}$ (die andere Lösung ist negativ und fällt damit weg)
Wegen $G'(4)<0$ und $G'(5)>0$ besitzt $G'(d)$ einen Vorzeichenwechsel von – nach +.
Damit liegt bei $d\approx 4{,}56$ cm ein lokales Minimum vor mit G(4,56) = 114,42 €.
Anhand der Randwerte kann geprüft werden, dass es sich sogar um ein absolutes Minimum handelt:
Linker Randwert: G(0) =138,67 € > 114,42 €
Rechter Randwert: $\lim\limits_{d\to\infty} G(d)\to\infty$ > 114,42 €

Damit existiert für d = 4,56 cm sogar ein absolutes Minimum.

Aufgabe 2:
a)



Herstellungskosten sinken ständig, da das Schaubild K anschaulich streng monoton fallend ist.

Nachweis: $H'(x) = \frac{1100 \cdot (2x+3) - (1100x + 48000) \cdot 2}{(2x+3)^2} = \frac{-92700}{(2x+3)^2} < 0$ für alle $x \geq 0$

Die langfristigen Herstellkosten erhält man durch die Betrachtung des Schaubildes von H für $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} H(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x \cdot (1100 + \frac{48000}{x})}{x \cdot (2 + \frac{3}{x})} = \frac{1100+0}{2+0} = 550 \text{ Euro.}$$

Die Herstellkosten betragen langfristig 550 Euro.

Durchschnittliche Herstellkosten bei einer Stückzahl von

1000 Stück: $\frac{1}{1000} \cdot \int_0^{1000} H(x)dx = 700{,}73$ Euro (berechnet mit dem GTR)

10.000 Stück: $\frac{1}{10000} \cdot \int_0^{10000} H(x)dx = 570{,}41$ Euro (berechnet mit dem GTR)

Stückzahl, bei der die Herstellungskosten unter 640 Euro liegen:

$$H(x) \leq 640 \Leftrightarrow \frac{1100x + 48000}{2x+3} \leq 640$$

Lässt man beide Seiten der Ungleichung mit dem GTR zeichnen, schneiden sich die Schaubilder an der Stelle x = 256.
Also liegen die Herstellungskosten unterhalb von 640 Euro ab einer Stückzahl von 256.

Erwarteter Gewinn bei 5.000 Computer = Verkaufserlös – Herstellungskosten

Verkaufserlös = $5.000 \cdot 640 \cdot 0{,}985 = 3.152.000$ Euro

Herstellungskosten = $\int_0^{5000} H(x)dx = 2.937.996{,}25$ Euro (mit GTR).

Erwarteter Gewinn = 3.152.000 – 2.937.996,25 = 214.003,75 Euro

Minimale Verkaufsrate ohne Verlust:
Die Verkaufsrate sei p. Ohne Verlust heißt erwarteter Gewinn sei Null.

$5000 \cdot 640 \cdot p - 2.937.996{,}25 = 0 \Leftrightarrow p = 0{,}918$ also minimale Verkaufsrate 91,8%.

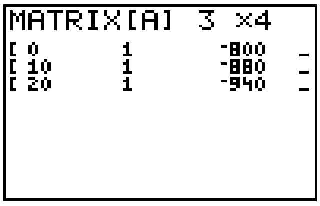
Aufgabe 3:
Es gilt:

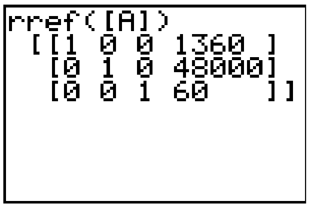
$$f(0) = 800 \Rightarrow \frac{b}{c} = 800 \Rightarrow b - 800c = 0$$

$$f(10) = 880 \Rightarrow \frac{10a+b}{10+c} = 880 \Rightarrow 10a + b = 880(10+c) \Rightarrow 10a + b - 880c = 8800$$

$$f(20) = 940 \Rightarrow \frac{20a+b}{20+c} = 940 \Rightarrow 20a + b = 940(20+c) \Rightarrow 20a + b - 940c = 18800$$

Das lineare Gleichungssystem kann mit Hilfe des GTR gelöst werden:

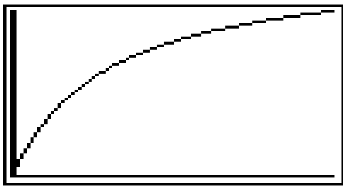




Als Lösungen ergeben sich somit a = 1360, b = 48000, c = 60

Also $f(x) = \frac{1360x + 48000}{x + 60}$

Schaubild:



Das Schaubild von f besitzt die waagerechte Asymptote $y = 1360$.

Nachweis: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x \cdot (1360 + \frac{48000}{x})}{x \cdot (1 + \frac{60}{x})} = \frac{1360 + 0}{1 + 0} = 1360$

Außerdem ist die Funktion streng monoton wachsend:

Nachweis: $f'(x) = \frac{1360(x+60) - (1360x + 48000) \cdot 1}{(x+60)^2} = \frac{33600}{(x+60)^2} > 0$

Also kann ein maximaler Ertrag von 1360 kg erzielt werden.

Ertrag bei ungedüngter Fläche: $f(0) = 800$ kg.
1,5-faches von 800 kg = 1200 kg

$$1200 = \frac{1360x + 48000}{x + 60} \Rightarrow 1200x + 72000 = 1360x + 48000 \Rightarrow x = 150$$

Für den 1,5-fachen Ertrag benötigt man 150 kg Mineraldünger.

Es gilt $f(60) = 1080$ kg. Tatsächlich werden nur 980 kg benötigt.

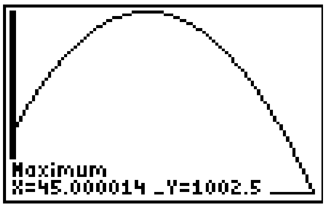
Prozentuale Abweihung: $\frac{1080}{980} = 1{,}102$ also Abweichung von 10,2%

Ganzrationale Funktion 2.Grades mit Ansatz $g(x) = ax^2 + bx + c$
Bedingung: $g(0) = 800 \Rightarrow c = 800$

$g(10) = 880 \Rightarrow 100a + 10b + 800 = 880 \Rightarrow 100a + 10b = 80$

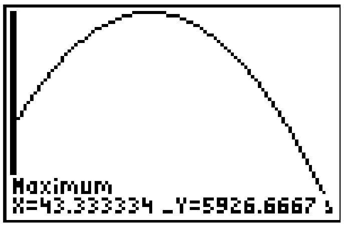
$g(20) = 940 \Rightarrow 400a + 20b + 800 = 940 \Rightarrow 400a + 20b = 140$

Aus dem Gleichungssystem ergibt sich mit dem GTR: a = -0,1 und b = 9: $g(x) = -0{,}1x^2 + 9x + 800$

: 

Maximum des Ertrags für x = 45 kg mit einem Ertrag von 1002,5 kg.

Gewinn = Erlös – Kosten
$= 6 \cdot g(x) - 2x = 6 \cdot (-0{,}1x^2 + 9x + 800) - 2x = -0{,}6x^2 + 52x + 4800$



Der Gewinn mit maximal für x = 43,33 und der Gewinn beträgt 5926,67 Euro.