Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2008 Teil 2, Wirtschaftliche Anwendungen, Aufgabe 1
Baden-Württemberg

1.1
Die Sektoren A,B und C einer Volkswirtschaft sind untereinander und mit dem Konsum nach dem LEONTIEF-Modell verflochten. Die Lieferungen untereinander die Abgabe an den Konsum sowie die Produktion werden in Geldeinheiten (GE) angegeben.

Gegeben ist die LEONTIEF-Inverse durch $(E-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & 13{,}25 & 4 \\ 9 & 18{,}25 & 4 \\ 4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.

1.1.1
Bestimmen Sie k so, dass $A = k \cdot \begin{pmatrix} 11 & 5 & 4 \\ 4 & 16 & 0 \\ 2 & 2 & 11 \end{pmatrix}$ die zugehörige Inputmatrix ist.

Was sagt die Inputmatrix hinsichtlich des Eigenverbrauchs der drei Sektoren aus ?
(5 Punkte)

1.1.2
Im vergangenen Quartal produzierte Sektor A Waren im Wert von 800 GE, Sektor B Waren im Wert von 1000 GE und Sektor C Waren im Wert von 500 GE.
Erstellen Sie die zugehörige Tabelle, die sowohl die Lieferungen der Sektoren untereinander als auch die Lieferungen an den Konsum angibt. (3 Punkte)

1.1.3
Im laufenden Quartal produziert Sektor B Waren im Wert von 280 GE. Die Werte der Produktionsmengen von A und C verhalten sich wie 2:1. Jeder der drei Sektoren gibt Waren im Wert von mindestens 2 GE an den Konsum ab.
Untersuchen Sie für Sektor A und C, welchen Wert die jeweils produzierten Waren mindestens haben und welchen Wert sie nicht überschreiten.
In welchem Bereich liegt der Wert der von Sektor B an den Konsum abgegebenen Waren ?
(7 Punkte)

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2008 Teil 2, Wirtschaftliche Anwendungen, Lösungen Aufgabe 1
Baden-Württemberg

1.1.1

Die Inverse von $(E-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & 13{,}25 & 4 \\ 9 & 18{,}25 & 4 \\ 4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ ist

$((E-A)^{-1})^{-1} = E - A = \begin{pmatrix} 0{,}45 & -0{,}25 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}2 & 0 \\ -0{,}1 & -0{,}1 & 0{,}45 \end{pmatrix}$ gemäß GTR.

Daraus ergibt sich $A = \begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}25 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}55 \end{pmatrix}$ und daraus folgt $k = \frac{1}{20}$

Aus der Matrix A kann bzgl. des Eigenverbrauchs folgendes abgelesen werden:
Der Sektor A verbraucht $a_{11} = 0{,}55 = 55\%$ der produzierten Menge selbst.
Der Sektor B verbraucht $a_{22} = 0{,}80 = 80\%$ der produzierten Menge selbst.
Der Sektor C verbraucht $a_{33} = 0{,}55 = 55\%$ der produzierten Menge selbst.

1.1.2

Aus dem Produktionsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 800 \\ 1000 \\ 500 \end{pmatrix}$ folgt für den Marktabgabevektor

$\vec{y} = (E-A) \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 40 \\ 45 \end{pmatrix}$.

Input-Output-Tabelle:

	A	B	C	$\vec{y}$	$\vec{x}$
A	440	250	100	10	800
B	160	800	0	40	1000
C	80	100	275	45	500

1.1.3

Für den Produktionsvektor gilt $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2x_3 \\ 280 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und für den Marktabgabevektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ mit $y_1, y_2, y_3 \geq 2$.

Aus der Formel $\vec{y} = (E - A) \cdot \vec{x}$ folgt $\begin{pmatrix} 0,45 & -0,25 & -0,2 \\ -0,2 & 0,2 & 0 \\ -0,1 & -0,1 & 0,45 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x_3 \\ 280 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0,9x_3 - 70 - 0,2x_3 &= y_1 \geq 2 \quad (1) \\ -0,4x_3 + 56 &= y_2 \geq 2 \quad (2) \\ -0,2x_3 - 28 + 0,45x_3 &= y_3 \geq 2 \quad (3) \end{aligned}$$

Aus (1): $0,7x_3 - 70 \geq 2 \Rightarrow x_3 \geq 102\frac{6}{7}$
Aus (2): $-0,4x_3 + 56 \geq 2 \Rightarrow x_3 \leq 135$
Aus (3): $0,25x_3 - 28 \geq 2 \Rightarrow x_3 \geq 120$

Aus diesen Bedingungen folgt $120 \leq x_3 \leq 135$.
Wegen $x_1 = 2x_3$ folgt daraus $240 \leq x_1 \leq 270$.
Aus (2) folgt mit $120 \leq x_3 \leq 135$, dass $2 \leq y_2 \leq 8$.