

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2006 Teil 2, Lineare Optimierung, Aufgabe 2
Baden-Württemberg

2.1

Weinbauer Müller kann maximal 30 Hektar Rebfläche bewirtschaften. Er möchte Gutedel- und Burgunder-Reben anpflanzen. Die Arbeitskosten betragen pro Hektar Rebfläche mit Gutedel-Reben 600 € und pro Hektar Rebfläche mit Burgunder-Reben 1000 €. Bauer Müller will insgesamt nicht mehr als 26000 € für Arbeitskosten ausgeben.

Ein Hektar bepflanzt mit Gutedel-Reben hat einen Ertrag von 7 Tonnen Trauben, ein Hektar bepflanzt mit Burgunder-Reben hat einen Ertrag von 5 Tonnen Trauben. Die Genossenschaft nimmt ihm insgesamt nicht mehr als 190 Tonnen Trauben ab.

Pro Hektar Anbaufläche erhält man eine Weinmenge von 5000 Liter Gutedel beziehungsweise 4000 Liter Burgunder. Bauer Müller bekommt 1,60 € für einen Liter Gutedel und 1,75 € für einen Liter Burgunder.

2.1.1

Ermitteln sie grafisch, wie Bauer Müller seine Rebfläche aufteilen soll, um maximalen Umsatz zu erzielen. (6 Punkte)

2.1.2

In einer Fachzeitschrift liest Herr Müller, dass der Erlös von Gutedel einen Einbruch erfährt und voraussichtlich auf 1,40 € pro Liter sinken wird. Welche Wirkung hätte diese Preissenkung auf die Anbaufläche mit Gutedel-Reben bei maximalem Umsatz, wenn der Erlös für Burgunder sich nicht ändert ? (3 Punkte)

2.1.3

Herr Müller befürchtet, dass der Erlös für einen Liter Gutedel sogar auf 1,20 € sinken wird. Er geht davon aus, dass der Erlös für einen Liter Burgunder bei 1,75 € bleibt. Daher überlegt er sich, Riesling als weitere Rebsorte anzubauen. Arbeitskosten und Ertrag für Gutedel und Burgunder bleiben unverändert. Die maximale Anbaufläche, die Obergrenze für Arbeitskosten und die maximale Abnahmemenge bleiben ebenfalls gleich.

Die Arbeitskosten für einen Hektar Rebfläche mit Riesling-Reben betragen 800 €.

Ein Hektar bepflanzt mit Riesling-Reben hat einen Ertrag von 8 Tonnen Trauben, die 5000 Liter Wein ergeben. Der Erlös für einen Liter Riesling beträgt 1,40 €.

Berechnen Sie die optimale Aufteilung der Anbaufläche bei maximalem Umsatz mit Hilfe des Simplex-Verfahrens. (6 Punkte)

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2006 Teil 2, Lineare Optimierung, Lösung zu Aufgabe 2
Baden-Württemberg

2.1.1

Es sei x die Fläche von Gutedel in Hektar.
 Es sei y die Fläche von Burgunder in Hektar.

Folgende Bedingungen sind gegeben:

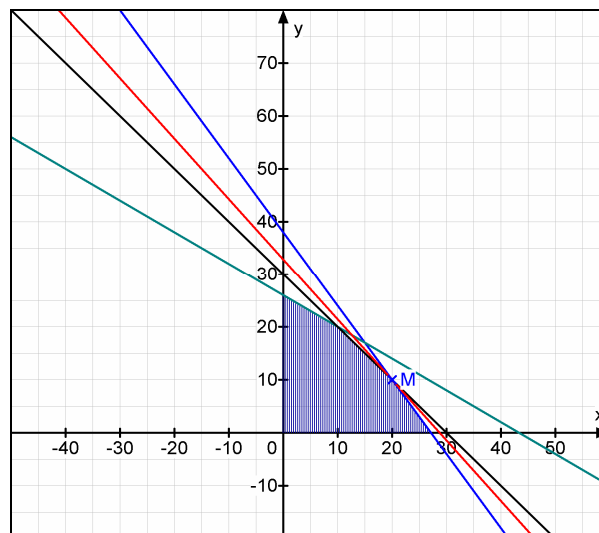
- (1) $x + y \leq 30 \Rightarrow y \leq 30 - x$ (maximal 30 Hektar)
- (2) $600x + 1000y \leq 26000 \Rightarrow y \leq 26 - 0,6x$ (Begrenzung Arbeitskosten)
- (3) $7x + 5y \leq 190 \Rightarrow y \leq 38 - 1,4x$
- (4) $x \geq 0$ und $y \geq 0$

Zu maximieren ist der Umsatz $U = 5000 \cdot 1,6x + 4000 \cdot 1,75y = 8000x + 7000y$

Aufgelöst nach y : $y = -\frac{8}{7}x + \frac{U}{7000}$ (5)

Da U maximal werden soll, ist die Gerade mit dem höchsten y -Achsenabschnitt gesucht.

Nun werden die Schaubilder (1) – (4) in ein Koordinatensystem eingezeichnet.



Die rote Gerade entspricht der Zielfunktion und hat mit der markierten Fläche den Punkt M gemeinsam.

M ist der Schnittpunkt der Geraden aus (3) und (1):

$$38 - 1,4x = 30 - x \Rightarrow 0,4x = 8 \Rightarrow x = 20 \text{ und damit } M(20/10).$$

Ein maximaler Umsatz ergibt sich für 20 ha Gutedel-Reben und 10 ha Burgunder-Reben. Der Umsatz beträgt $U = 8000 \cdot 20 + 7000 \cdot 10 = 230.000$

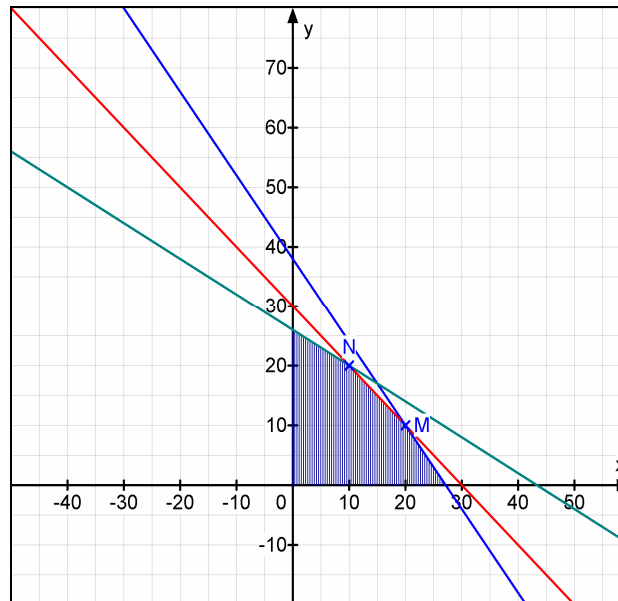
2.1.2

Die neue Umsatzfunktion lautet: $U = 5000 \cdot 1,4x + 4000 \cdot 1,75y = 7000x + 7000y$

Daraus folgt $y = -x + \frac{U}{7000}$.

Damit liegt die rote Zielfunktionsgerade auf der Gerade (1) aus 2.1.1

Damit sind alle Punkte auf der Strecke NM mit N(10/20) (Schnittpunkt von (1) und (2)) und M(20/10).



Für einen maximalen Umsatz kann die Anbaufläche x von Gutedel zwischen 10 ha und 20 ha liegen, der Rest $(30-x)$ ha wird mit Burgunder-Reben bebaut.

2.1.3

Es sei x die Fläche von Gutedel in Hektar.

Es sei y die Fläche von Burgunder in Hektar.

Es sei z die Fläche von Riesling in Hektar.

Mit Hilfe der Schlupfvariablen u , v und w gelten folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{ll}
 x + y + z + u = 30 & \text{(Anbaufläche)} \\
 600x + 1000y + 800z + v = 26000 & \text{(Arbeitskosten)} \\
 7x + 5y + 8z + w = 190 & \text{(Ertrag)}
 \end{array}$$

Zielfunktion: $U = 5000 \cdot 1,20x + 4000 \cdot 1,75y + 5000 \cdot 1,40z$

$$U = 6000x + 7000y + 7000z$$

Simplextableau:

x	y	z	u	v	w		Einschränkung
1	1	1	1	0	0	30	30
600	1000	800	0	1	0	26000	26
7	5	8	0	0	1	190	38
6000	7000	7000	0	0	0	U	

Die Spalte mit der größten Zahl bei der Zielfunktionszeile ist die Pivotspalte (wir wählen hier die 2. Spalte y).

Die Werte der Spalte „Einschränkung“ ergeben sich aus der Division der Spalte 7 durch die Elemente der Pivotspalte ($30:1$; $26000 : 1000$; $190 : 5$).

Die Zeile, in der die kleinste Zahl bei „Einschränkung“ steht, ist die Pivotzeile. Dies ist in diesem Fall mit 26 die 2. Zeile.

Das Element, das sowohl in der Pivotspalte als auch in der Pivotzeile steht, ist das so genannte Pivotelement – hier 1000.

Nun werden alle Elemente der Pivotspalte durch übliche Zeilenumformungen zu Null gemacht, außer das Pivotelement selbst.

Damit ergibt sich

x	y	z	u	v	w		Einschränkung
400	0	200	1000	-1	0	4000	10
600	1000	800	0	1	0	26000	43,3
800	0	800	0	-1	200	12000	15
1800	0	1400	0	-7	0	U- 182000	

Nun ist die 1. Spalte x die Pivotspalte und die 1. Zeile die Pivotzeile. Damit ist 400 das Pivotelement.

Damit ergibt sich

x	y	z	u	v	w		Einschränkung
400	0	200	1000	-1	0	4000	20
0	2000	1000	-3000	5	0	40000	40
0	0	400	-2000	1	200	4000	10
0	0	1000	-9000	-5	0	2U- 400000	

Nun ist die 3. Spalte z die Pivotspalte und die 3. Zeile die Pivotzeile. Damit ist 400 das Pivotelement.

Damit ergibt sich

x	y	z	u	v	w	
800	0	0	4000	-3	-200	4000
0	4000	0	4000	5	-1000	60000
0	0	400	-2000	1	200	4000
0	0	0	-8000	-15	-1000	4U- 820000

Division der einzelnen Zeilen ergibt

x	y	z				
1	0	0				5
0	1	0				15
0	0	1				10
0	0	0				4U- 820000

Für den maximalen Umsatz müssen 5 ha Gutedel-Reben, 15 ha Burgunder-Reben und 10 ha Riesling-Reben angebaut werden.