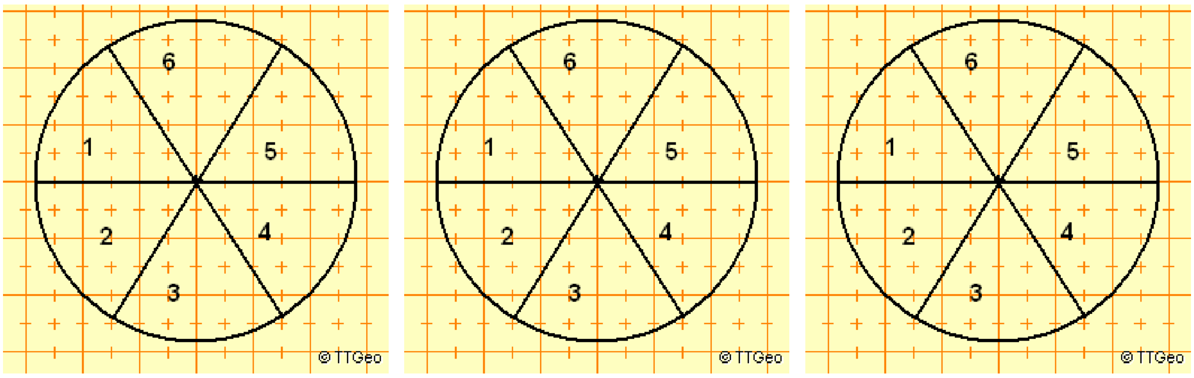
Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG, BTG)
Hauptprüfung 2007 Teil 2, Stochastik, Aufgabe 1
Baden-Württemberg

Ein Glücksspielautomat hat drei Räder mit jeweils 6 gleich großen Sektoren.
(siehe Abbildung).
Die Räder drehen sich unabhängig voneinander.



Der Betreiber des Spielautomaten verlangt einen Einsatz von 1,50 Euro pro Spiel und überlegt sich folgenden Auszahlungsplan:

Ereignis	Auszahlung
A: Alle drei Räder zeigen „1“, d.h. 1 1 1	50 Euro
B: Alle drei Räder zeigen die gleiche Ziffer, aber nicht 1.	20 Euro
C: Genau zwei Räder zeigen die gleiche Ziffer	2 Euro
D Alle Räder zeigen unterschiedliche Ziffern	0 Euro

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für jedes der Ereignisse A, B, C und D. (7 Punkte)

b) Begründen Sie rechnerisch, weshalb der Automatenbetreiber seinen Auszahlungsplan ändern sollte. (4 Punkte)

c) Wie oft muss das Spiel mindestens gespielt werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % mindestens einmal zu gewinnen ? (5 Punkte)

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG, BTG)
Hauptprüfung 2007 Teil 2, Stochastik, Lösung Aufgabe 1
Baden-Württemberg

a) $P(A)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$

$P(B)=P(222{,}333{,}444{,}555{,}666)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot 5=\frac{5}{216}$

Hinweis: Die Wahrscheinlichkeiten für 222, 333,… sind jeweils gleich groß.

Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses C wird zunächst ermittelt, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, genau zwei „1“ zu drehen.

P(genau zweimal die „1“) = P(11x,1x1, x11) = $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot 3=\frac{5}{72}$

Da die Wahrscheinlichkeiten für die anderen Ziffern genau so groß sind, ergibt sich daraus $P(C)=6\cdot\frac{5}{72}=\frac{5}{12}$

$P(D)=1-\frac{1}{216}-\frac{5}{216}-\frac{5}{12}=\frac{5}{9}$

b) Um den Auszahlungsplan zu prüfen, muss der Erwartungswert der Auszahlung für den Spieler berechnet werden.

$E(X)=50\cdot\frac{1}{216}+20\cdot\frac{5}{216}+2\cdot\frac{5}{12}\approx 1{,}53$ Euro

Im Durchschnitt muss der Betreiber 1,53 Euro auszahlen. Da er nur 1,50 Euro pro Spiel einnimmt, macht er pro Spiel einen durchschnittlichen Verlust von 3 Cent.

c) Ereignis E: Mindestens eines von n Spielen wird gewonnen

Es soll gelten: P(E) > 0,9
Um P(E) zu berechnen, ermittelt man die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses:
$\overline{E}$: Keines von n Spielen wird gewonnen

$$P(\overline{E})=\left(\frac{5}{9}\right)^n$$

$$P(E)=1-P(\overline{E})=1-\left(\frac{5}{9}\right)^n>0{,}9$$

$$\Rightarrow\left(\frac{5}{9}\right)^n<0{,}1\Rightarrow n\cdot\ln\frac{5}{9}<\ln(0{,}1)\Rightarrow n>\frac{\ln(0{,}1)}{\ln\frac{5}{9}}=3{,}92$$

(Hinweis: Ungleichheitszeichen dreht sich im letzten Schritt um, weil durch eine negative Zahl dividiert wird)

Man muss mindestens 4 mal spielen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% mindestens einmal zu gewinnen.