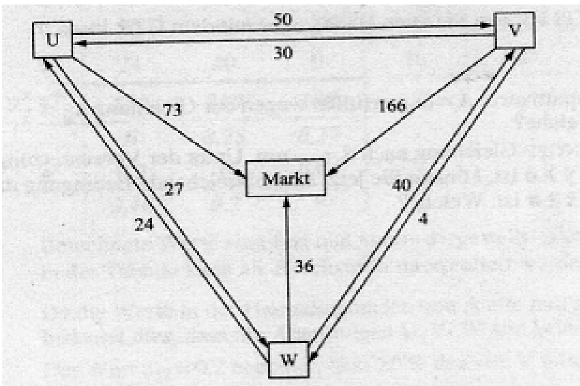
Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2011 Teil 4, Wirtschaftliche Anwendungen, Aufgabe 1
Baden-Württemberg

1
Ein Unternehmen hat drei Abteilungen U, V und W, die nach dem LEONTIEF-Modell miteinander verbunden sind. Die Lieferungen untereinander sowie die Marktabgabe sind in Geldeinheiten (GE) angegeben. Das folgende Diagramm zeigt den Wert aller Lieferungen in der laufenden Produktionsperiode.



1.1
Bestimmen Sie den Produktionsvektor und die Inputmatrix A.
Erläutern Sie, welche Bedeutung die Diagonalelemente und das Element a_{32} in der Inputmatrix A haben. (5 Punkte)

1.2
Aus technischen Gründen muss die Abteilung V in der nächsten Produktionsperiode den Wert ihrer Produktion reduzieren. Diese Reduktion beträgt 80% des Wertes der Produktion der laufenden Periode.
Wie verändern sich die Werte der Produktion von U, der Produktion von W und der Marktabgabe von V, wenn laut vorliegender Aufträge U nur noch Waren im Wert von 38 GE, W jedoch Waren von 80 GE an den Markt liefert ? (5 Punkte)

1.3
Konstruktionsänderungen an den Produktionsanlagen führen zu einer Änderung der Inputmatrix.
Untersuchen Sie, für welche Werte von t die Matrix A_t mit

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}25 & 0{,}27 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}15t - 0{,}03 \\ 0{,}16 & 1 - 0{,}6t & 0 \end{pmatrix}$$

eine Inputmatrix ist.
Prüfen Sie, ob es ganzzahlige Werte von t gibt, für die jede Nachfrage erfüllt werden kann.
(5 Punkte)
----
15 Punkte

Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG)
Hauptprüfung 2011 Teil 4, Wirtschaftliche Anwendungen, Lösungen Aufgabe 1
Baden-Württemberg

1.1

Anhand des Diagramms wird eine Input-Output-Tabelle erstellt:

	U	V	W	Markt	Produktion
U	0	50	27	73	**150**
V	30	0	4	166	**200**
W	24	40	0	36	**100**

Der Produktionsvektor lautet $\vec{x} = \begin{pmatrix} 150 \\ 200 \\ 100 \end{pmatrix}$

Die Inputmatrix lautet $A = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}25 & 0{,}27 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}04 \\ 0{,}16 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$

Die Diagonalelemente bedeuten die Anteile, die die Unternehmen jeweils als Eigenverbrauch ihrer jeweiligen Produktion benötigen.
Da die Werte hier alle 0 sind, heißt dies, dass die Unternehmen von ihrer Produktion nichts selbst verbrauchen.

Das Elemente $a_{32} = 0{,}2$ bedeutet, dass das Unternehmen W an das Unternehmen V einen Anteil von 20% bezüglich der Produktion von V liefern muss.

1.2

Der neue Produktionsvektor lautet $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0{,}2 \cdot 200 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 40 \\ x_3 \end{pmatrix}$

(Die Produktion von V wird um 80% reduziert, also produziert V nur noch 20% des ursprünglichen Wertes)

Der neue Marktabgabevektor lautet $\vec{y} = \begin{pmatrix} 38 \\ y_2 \\ 80 \end{pmatrix}$

Aufstellen der Leontief-Gleichung: $\vec{y} = (E - A) \cdot \vec{x}$

$$\begin{pmatrix} 38 \\ y_2 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0,25 & -0,27 \\ -0,2 & 1 & -0,04 \\ -0,16 & -0,2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ 40 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Multipliziert man das ganze aus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & -0,27x_3 & & = & 48 \\ -0,2x_1 & -0,04x_3 & -y_2 & = & -40 \\ -0,16x_1 & +x_3 & & = & 88 \end{array}$$

Als Lösung mit dem GTR ergibt sich $x_1 = 75$ und $x_3 = 100$ und $y_2 = 21$

U produziert Waren im Wert von 75 GE, W produziert Waren im Wert von 100 GE und V gibt Waren im Wert von 21 GE an den Markt ab.

1.3

Damit A_t eine Inputmatrix ist, müssen alle Matrixeinträge im Bereich 0 bis 1 liegen.
Die Bedingung lautet daher
(1) $0 \le 0,15t - 0,03 \le 1$ und
(2) $0 \le 1 - 0,6t \le 1$.

Aus (1) folgt $0,2 \le t \le 6,87$

Aus (2) folgt $0 \le t \le \frac{5}{3}$

Insgesamt handelt es sich um eine Inputmatrix, wenn $0,2 \le t \le \frac{5}{3}$ gilt.

Der einzige ganzzahlige Wert in diesem Intervall wäre t = 1, für den nun geprüft werden soll, ob für diese Matrix jede Nachfrage erfüllt werden kann.

Damit dies so ist, müssen alle Einträge der Leontief-Inversen $(E - A)^{-1}$ nicht-negativ sein.

Mit dem GTR kann die Leontief-Inverse $(E - A_1)^{-1}$ berechnet werden:

$$(E - A_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,14 & 0,43 & 0,36 \\ 0,26 & 1.15 & 0,21 \\ 0,29 & 0,53 & 1,14 \end{pmatrix}$$ (gerundete Werte in der Matrix)

Da alle Einträge in dieser Inversen nicht-negativ sind, kann für t = 1 jede beliebige Nachfrage erfüllt werden.