

**Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG, BTG)  
Hauptprüfung 2008 Teil 2, Stochastik, Aufgabe 2  
Baden-Württemberg**

Ein Glücksspielgerät besteht aus einer Kugeltrommel mit angebauter Kugelrinne. Die Trommel enthält eine rote, zwei schwarze und fünf weiße Kugeln. Durch Drehen der Trommel werden die Kugeln gemischt. Ein Greifarm entnimmt eine Kugel und setzt sie in die Kugelrinne.

Bei einer Ziehung werden Kugeln nacheinander entnommen und in dieser Reihenfolge in die Rinne gelegt. Eine Ziehung endet, wenn die rote Kugel entnommen wird, spätestens jedoch nach der dritten Kugel.

- a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse bei einer Ziehung:
- A: Die Ziehung endet nach zwei Kugeln.
  - B: Die beiden schwarzen Kugeln werden entnommen.
  - C: Es werden drei verschiedenfarbige Kugeln entnommen. (6 Punkte)
- b) Eine Ziehung wurde durch die Entnahme der roten Kugel beendet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurden drei Kugeln entnommen ? (4 Punkte)
- c) Lea und Tim vereinbaren für ein Spiel folgende Regeln:
- Tim zahlt einen Einsatz von 10 Cent und führt eine Ziehung durch.
- Endet die Ziehung nach der ersten Kugel, erhält Tim 10 Cent
  - Ist die erste Kugel weiß und die zweite Kugel rot, bekommt er 40 Cent
  - Werden drei verschiedenfarbige Kugeln entnommen, erhält er a Cent.
  - In allen anderen Fällen erhält er nichts.

Wie muss a gewählt werden, damit das Spiel fair ist ? (5 Punkte)

**Berufliches Gymnasium (WG, EG, AG, SG, BTG)**  
**Hauptprüfung 2008 Teil 2, Stochastik, Lösung Aufgabe 2**  
**Baden-Württemberg**

- a) Beim Ereignis A wird rot zum ersten Mal beim 2. Zug gezogen.

$$P(A) = P(sr, wr) = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} + \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{8}$$

$$P(B) = P(ssr, ssw, wss, sws) = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{21}$$

$$P(C) = (swr, wsr) = \frac{2}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{84}$$

- b) Hierbei handelt es sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit.  
Gegeben ist die Information, dass die Ziehung durch die Entnahme der roten Kugel beendet wird.

Ereignis D: Ziehung endet mit der Ziehung einer roten Kugel

$$P(D) = (r, \bar{r}, \bar{r}\bar{r}) = \frac{1}{8} + \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{7} + \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{8} \quad (\bar{r} = \text{keine rote Kugel})$$

Ereignis E: Es werden drei Kugeln gezogen

$$P(E) = P(\bar{r}\bar{r}\bar{r}) = \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{6} + \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3}{4}$$

$$P(D \cap E) = P(\bar{r}\bar{r}) = \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{8}$$

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit  $P_D(E)$

$$P_D(E) = \frac{P(D \cap E)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{3}$$

- c) Die Zufallsvariable X gibt den Gewinn von Tim an.

Welche Werte kann X annehmen ?

$X = 0$  (1. Zug = rot)  
 $X = 0,30$  (1. Zug = weiß, 2. Zug = rot)  
 $X = a - 0,1$  (wsr, swr)  
 $X = -0,1$  (sonst)

$$P(X = 0) = \frac{1}{8}$$

$$P(X = 0,3) = \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{5}{56}$$

$$P(X = a - 0,1) = \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{84}$$

$$P(X = -0,1) = 1 - \left( \frac{1}{8} + \frac{5}{56} + \frac{5}{84} \right) = \frac{61}{84}$$

Das Spiel ist fair, wenn der erwartete Gewinn des Spielers Null ist.

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + \frac{5}{56} \cdot 0,3 + \frac{5}{84} \cdot (a - 0,1) + \frac{61}{84} \cdot (-0,1) = 0 \Rightarrow a = 0,87$$

Für ein faires Spiel muss die Auszahlung bei 3 verschiedenfarbigen Kugeln 87 Cent betragen.