Hauptprüfung Abiturprüfung 2014 (ohne CAS)

Baden-Württemberg

Lineare Optimierung

Hilfsmittel: GTR, Formelsammlung

berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Oktober 2014

1

Ein Pulloverhersteller produziert drei unterschiedliche Sweatshirts in der Größe XL, die sich in der Zusammensetzung der drei Ausgangsmaterialien Baumwolle, Viskose und Polyester unterscheiden:

	Baumwolle	Viskose	Polyester
Sweatshirt A	60%	40%	0%
Sweatshirt B	40%	20%	40%
Sweatshirt C	0%	40%	60%

Für die Herstellung der Sweatshirts A, B und C werden jeweils 0,5 kg Stoff benötigt. Insgesamt stehen 8000 kg Baumwolle, 6000 kg Viskose und 5000 kg Polyester zur Verfügung.

Es wird angenommen, dass alle hergestellten Sweatshirts verkauft werden.
Der Hersteller macht jeweils 2€ Gewinn mit Sweatshirt A und B sowie 3€ Gewinn mit Sweatshirt C.

1.1
Zunächst werden 10000 Sweatshirts der Sorte B hergestellt.

1.1.1
Ermitteln Sie graphisch, wie viele Sweatshirts der Sorten A und C das Unternehmen herstellen muss, damit der Gewinn maximiert wird.
Geben Sie den maximalen Gewinn an.

(6 Punkte)

1.1.2
Welches Ausgangsmaterial wird bei Ihrer Lösung nicht vollständig verbraucht ?

Auf wie viel Euro mindestens müsste der Gewinn für jedes Sweatshirt A ansteigen, damit dieses Ausgangsmaterial vollständig verbraucht wird und der Gewinn insgesamt immer noch maximal ist ?

(3 Punkte)

1.2
Ein Berater empfiehlt der Unternehmensleitung, die festgelegte Produktionszahl von 10000 Sweatshirts der Sorte B fallen zu lassen. Damit kann der Gewinn weiter gesteigert werden.

Bestimmen Sie mit Hilfe des Simplexverfahrens die Anzahl der hergestellten Sweatshirts A, B und C, für die dann der Gewinn maximal wird.
Geben Sie den maximalen Gewinn an.

Überprüfen Sie, ob Ausgangsmaterialien übrig bleiben.

(6 Punkte)

Lösungen

1.1.1

Ermitteln Sie graphisch, wie viele Sweatshirts der Sorten A und C das Unternehmen herstellen muss, damit der Gewinn maximiert wird.

Zunächst werden 3 Variablen eingeführt:
a = Anzahl der Sweatshirts der Sorte A
b = Anzahl der Sweatshirts der Sorte B
c = Anzahl der Sweatshirts der Sorte C

Es ist b = 10000.

1 Sweatshirt/Sorte A benötigt 0,3 kg (60% von 0,5 kg) Baumwolle und 0,2 kg Viskose.
1 Sweatshirt/Sorte B benötigt 0,2 kg Baumwolle und 0,1 kg Viskose und 0,2 kg Polyester.
1 Sweatshirt/Sorte C benötigt 0,2 kg Viskose und 0,3 kg Polyester.

Folgende Bedingungen müssen erfüllt werden:

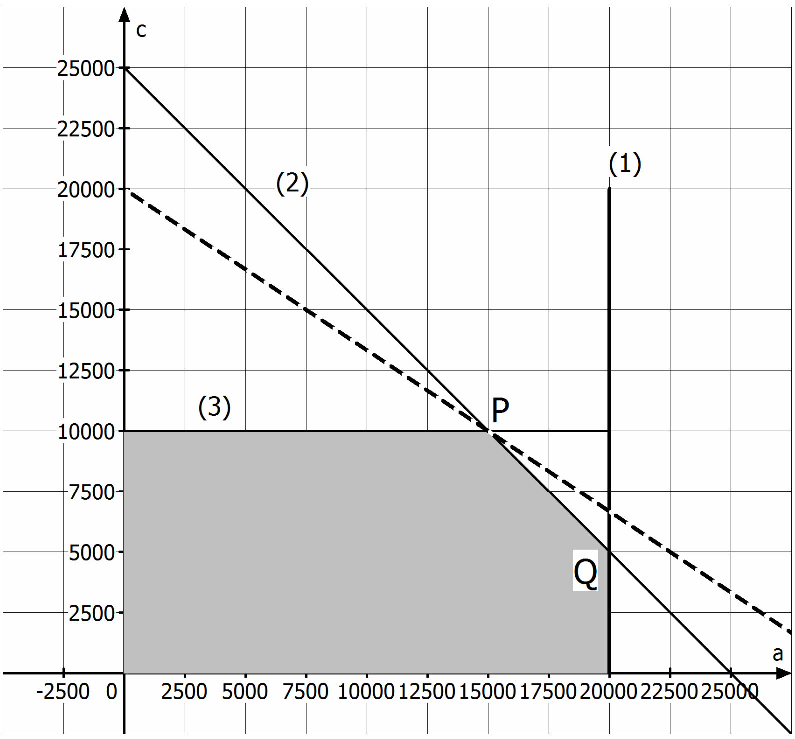
(1) $0{,}3 \cdot a + 0{,}2 \cdot 10000 \le 8000 \quad \Leftrightarrow a \le 20000$

(2) $0{,}2 \cdot a + 0{,}1 \cdot 10000 + 0{,}2 \cdot c \le 6000 \quad \Leftrightarrow c \le 25000 - a$

(3) $0{,}2 \cdot 10000 + 0{,}3 \cdot c \le 5000 \quad \Leftrightarrow c \le 10000$

Der Gewinn beträgt $G = 2 \cdot a + 2 \cdot 10000 + 3 \cdot c \quad \Leftrightarrow c = -\frac{2}{3}a - \frac{20000}{3} + \frac{G}{3}$

Veranschaulichung im Koordinatensystem:



Aus dem Schaubild kann abgelesen werden, dass der maximale Gewinn im Punkt P erreicht wird.
Von A müssen 15.000 ME und von C müssen 10.000 ME hergestellt werden.

Geben Sie den maximalen Gewinn an.

Einsetzen von a = 15000 und c = 10000 in die Gewinnformel ergibt den maximalen Gewinn:

$G = 2 \cdot 15000 + 2 \cdot 10000 + 3 \cdot 10000 = 80000$ Euro.

Ergebnis: Der maximale Gewinn beträgt 80.000 €

1.1.2

Welches Ausgangsmaterial wird bei Ihrer Lösung nicht vollständig verbraucht ?

Gleichung (1) (Baumwolle): $0{,}3 \cdot 15000 + 0{,}2 \cdot 10000 \le 8000 \Rightarrow 6500 \le 8000$
Es bleiben 1500 kg Baumwolle übrig.

Gleichung (2) (Viskose): $0{,}2 \cdot 15000 + 0{,}1 \cdot 10000 + 0{,}2 \cdot 10000 \le 6000 \Rightarrow 6000 \le 6000$
Es bleibt keine Viskose übrig.

Gleichung (3) (Polyester): $0{,}2 \cdot 10000 + 0{,}3 \cdot 10000 \le 5000 \Rightarrow 5000 \le 5000$
Es bleibt kein Polyester übrig.

Auf wie viel Euro mindestens müsste der Gewinn für jedes Sweatshirt A ansteigen, damit dieses Ausgangsmaterial vollständig verbraucht wird und der Gewinn insgesamt immer noch maximal ist ?

Damit die Baumwolle vollständig verbraucht wird, müsste die Bedingung (1) eine Gleichung sein. Es müssten also a = 20000 Sweatshirts der Sorte A hergestellt werden.
Damit kann man aber laut (2) nur noch c = 5000 Sweatshirts der Sorte C produzieren.
Die gestrichelte Gerade muss somit durch den Punkt Q(20000/5000) verlaufen.

Der Gewinn für Sweatshirt A sei z.

Für den Gewinn gilt dann: $G = z \cdot a + 2 \cdot 10000 + 3 \cdot c \;\Leftrightarrow c = -\frac{z}{3}a - \frac{20000}{3} + \frac{G}{3}$

Der Mindestgewinn ergibt sich aus der Steigung der Geraden durch P und Q.

Diese beträgt $m = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{5000}{-5000} = -1$

Nun muss gelten: $-\frac{z}{3} = -1 \Leftrightarrow z = 3$

Ergebnis: Der Gewinn für Sweatshirt A müsste auf 3 Euro ansteigen.

1.2

Geben Sie den maximalen Gewinn an.

Für das Simplexverfahren werden folgende Bedingungen benötigt:

(1) $0,3 \cdot a + 0,2 \cdot b + u = 8000$
(2) $0,2 \cdot a + 0,1 \cdot b + 0,2 \cdot c + v = 6000$
(3) $0,2 \cdot b + 0,3 \cdot c + w = 5000$

u,v,w sind die Schlupfvariablen.

Die Zielfunktion lautet $2 \cdot a + 2 \cdot b + 3 \cdot c = G$

Simplextableau:

a	b	c	u	v	w	b_i	Quotient
0,3	0,2	0	1	0	0	8000	-
0,2	0,1	0,2	0	1	0	6000	6000/0,2=30000
0	0,2	**0,3**	0	0	1	5000	5000/0,3=16667
2	2	3	0	0	0	G	

Durchführung des 1. Simplexschrittes.
Das Pivotelement ist 0,3.

Division der 3.Zeile durch 0,3:

Nummer	a	b	c	u	v	w	b_i	Umformung
(1)	0,3	0,2	0	1	0	0	8000	-
(2)	0,2	0,1	0,2	0	1	0	6000	$(2) - 0,2 \cdot (3)$
(3)	0	2/3	**1**	0	0	10/3	16666,67	
(4)	2	2	3	0	0	0	G	$(4) - 3 \cdot (3)$

Nummer	a	b	c	u	v	w	b_i	Quotient
(1)	0,3	0,2	0	1	0	0	8000	8000/0,3=26666,7
(2)	**0,2**	-1/30	0	0	1	-2/3	2666,67	2666,67/0,2=13333,33
(3)	0	2/3	**1**	0	0	10/3	16666,67	-
(4)	2	0	0	0	0	-10	G-50000	

Da in der letzten Zeile noch eine positive Zahl steht, ist ein weiterer Simplexschritt erforderlich.

Division der 2.Zeile durch 0,2:

Nummer	a	b	c	u	v	w	b_i	Umformung
(1)	0,3	0,2	0	1	0	0	8000	$(1)-0,3\cdot(2)$
(2)	**1**	-1/6	0	0	5	-10/3	13333,3	
(3)	0	2/3	1	0	0	10/3	16666,67	
(4)	2	0	0	0	0	-10	G-50000	$(4)-2\cdot(2)$

Nummer	a	b	c	u	v	w	b_i	Quotient
(1)	0	**0,25**	0	1	-1,5	1	4000	4000/0,25=16000
(2)	1	-1/6	0	0	5	10/3	13333,3	-
(3)	0	2/3	1	0	0	10/3	16666,67	25000
(4)	0	1/3	0	0	-10	-3,3	G-76667	

Da in der letzten Zeile noch eine positive Zahl steht, ist ein weiterer Simplexschritt erforderlich.

Division der 1.Zeile durch 0,25:

Nummer	a	b	c	u	v	w	b_i	Umformung
(1)	0	**1**	0	4	-6	4	16000	
(2)	1	-1/6	0	0	5	10/3	13333,3	$(2)+1/6\cdot(1)$
(3)	0	2/3	1	0	0	10/3	16666,67	$(3)-2/3\cdot(1)$
(4)	0	1/3	0	0	-10	-3,3	G-76667	$(4)-1/3\cdot(1)$

Nummer	a	b	c	u	v	W	b_i	Umformung
(1)	0	**1**	0	4	-6	4	16000	
(2)	1	0	0	4/6	4	4	16000	
(3)	0	0	1	-8/3	4	2/3	6000	
(4)	0	0	0	-4/3	-8	-4,66	G-82000	

Da in der letzten Zeile keine positiven Werte stehen, ist das Maximum erreicht.

Der maximale Gewinn beträgt 82.000 Euro.

Überprüfen Sie, ob Ausgangsmaterialien übrig bleiben.

Aus dem Simplextableau ergeben sich folgende Lösungen:
b = 16000
a = 16000
c = 6000
u = v = w = 0

Da die Schlupfvariablen alle 0 sind, bleiben keine Ausgangsmaterialien übrig.