Analysis

Klausur zu Ableitung, Extrem- und Wendepunkten, Interpretation von Graphen von Ableitungsfunktionen, Tangenten und Normalen
(Bearbeitungszeit: 90 Minuten)

Gymnasium J1

Alexander Schwarz

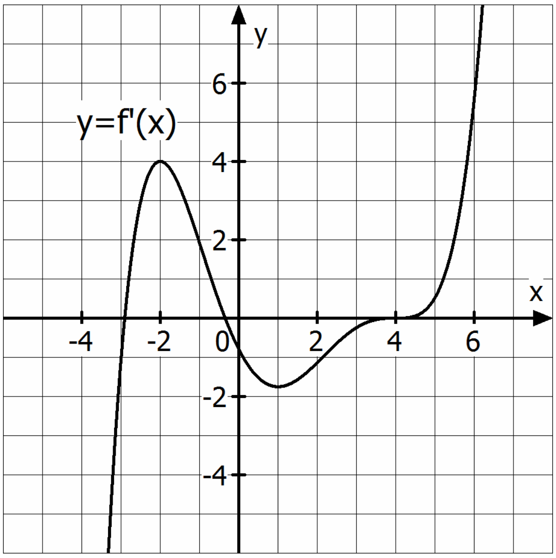
www.mathe-aufgaben.com

November 2013

Pflichtteil - ohne Hilfsmittel

Aufgabe P1: (2,5 VP)
Bilden Sie die ersten beiden Ableitungen der Funktion f mit $f(x) = 6x^3 + 4x^2 + \sqrt{x}$

Aufgabe P2: (7,5 VP)
Die folgende Abbildung zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f. Entscheiden Sie für den abgebildeten Bereich, ob die folgenden Sätze richtig oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antwort.



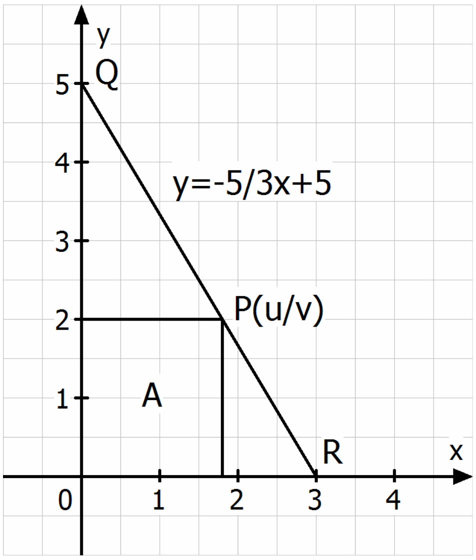
1) Der Graph von f hat bei x = -2 einen Hochpunkt.
2) Der Graph von f hat für $-3 \le x \le 6$ genau zwei Wendepunkte.
3) Für die Funktionswerte an den Stellen 0 und 4 gilt f(0) > f(4).
4) Für x > 4 ist der Graph von f streng monoton fallend.
5) Der Graph von f ist für $-2{,}9 \le x \le -0{,}5$ eine Linkskurve.

Aufgabe P3: (6 VP)
Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{1}{3}$. Die x-Achse, die y-Achse und die Normale im Wendepunkt bilden ein Dreieck. Berechnen Sie den Inhalt dieses Dreiecks.

Wahlteil - mit GTR und Formelsammlung

Aufgabe W1: (4 VP)
Aus einem dreieckigen Stück ORQ einer Glasscheibe soll ein rechteckiges Stück herausgeschnitten werden (siehe Abbildung). Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P so, dass der Flächeninhalt A maximal wird.

Die Verbindungsgerade zwischen Q und R hat die Gleichung $y=\frac{5}{3}x+5$.



Aufgabe W2: (10 VP)
Die Schneehöhe in einem Gebiet beträgt zu Beginn eines Wintertages 10cm.
Die Schneefallrate während dieses Tages wird modellhaft beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(t)=\frac{0,5t^2-15t+212,5}{t^2-30t+235}$$

(t in Stunden seit Tagesbeginn, f(t) in cm pro Stunde). Ihr Schaubild sei K.

a) Skizzieren Sie K in einem geeigneten Koordinatensystem.
Bestimmen Sie den Zeitpunkt, an dem es am stärksten schneit.

b) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, an dem die Schneefallrate am stärksten abnimmt.
Wann würde es aufhören zu schneien, wenn die Abnahme der Schneefallrate ab diesem Zeitpunkt gleich bleiben würde ?

Lösungen

Aufgabe P1:

$$f(x) = 6x^3 + 4x^2 + x^{0,5}$$

$$f'(x) = 12x^2 + 8x + 0,5x^{-0,5} = 12x^2 + 8x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f''(x) = 24x + 8 - 0,25x^{-1,5} = 24x + 8 - \frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

Aufgabe P2:

1) Die Aussage ist falsch. An der Stelle x = -2 hat f(x) eine Wendestelle, da die Ableitungsfunktion an dieser Stelle eine Extremstelle besitzt.

2) Die Aussage ist richtig. Die Ableitungsfunktion hat im Intervall $-3 \le x \le 6$ genau zwei Extremstellen, also hat f(x) genau zwei Wendestellen und damit zwei Wendepunkte.

3) Die Aussage ist richtig. Im Intervall $0 \le x \le 4$ verläuft die Ableitungsfunktion unterhalb der x-Achse. Damit ist f(x) in diesem Intervall streng monoton fallend. Daraus folgt f(0) > f(4).

4) Die Aussage ist falsch. Die Ableitungsfunktion verläuft für x > 4 oberhalb der x-Achse und damit ist f(x) dort streng monoton steigend.

5) Die Aussage ist falsch. Da f(x) bei x = -2 eine Wendestelle besitzt, bei der sich die Krümmung des Schaubildes ändert, kann im Intervall $-2,9 \le x \le -0,5$ keine gleich bleibende Krümmung existieren.

Aufgabe P3:

Im ersten Schritt wird der Wendepunkt von f(x) berechnet.

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{1}{3} \qquad f'(x) = 2x^2 + 4x$$

$$f''(x) = 4x + 4 \qquad f'''(x) = 4$$

Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt: $f''(x) = 0$

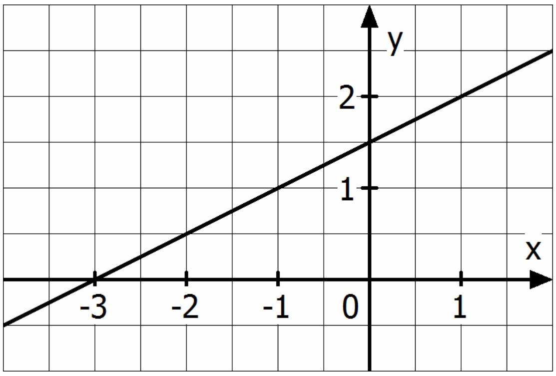
$4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Hinreichende Bedingung: $f'''(-1) = 4 \neq 0$ also Wendepunkt $W(-1 / f(-1)) = W(-1 / 1)$

Normalengleichung im Wendepunkt: $y = -\frac{1}{f'(u)} \cdot (x - u) + f(u)$

Einsetzen von u = -1: $y = -\frac{1}{-2} \cdot (x + 1) + 1 \quad \Leftrightarrow y = 0,5x + 1,5$

Inhalt des Dreiecks zwischen der Normalen und den Koordinatenachsen:



Schnittpunkt mit der y-Achse: P(0/1,5).
Schnittpunkt mit der x-Achse: Q(-3/0).

Inhalt des Dreiecks: $A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1{,}5 = \frac{9}{4}$ Flächeneinheiten

Aufgabe W1:

Da der Punkt P auf dem Schaubild der Geraden liegt, besitzt er die Koordinaten $P(u / -\frac{5}{3}u + 5)$.

Die Fläche des Rechtecks beträgt daher $A(u) = u \cdot (-\frac{5}{3}u + 5) = -\frac{5}{3}u^2 + 5u$ mit $0 \le u \le 3$
Gesucht ist das absolute Maximum von A(u) im Intervall $0 \le u \le 3$.

Bestimmung des relativen Maximums mit dem GTR:

Notwendige und hinreichende Bedingung: $A'(u) = 0$ und $A''(u) < 0$
GTR: relatives Maximum für u = 1,5 mit A(1,5) = 3,75.

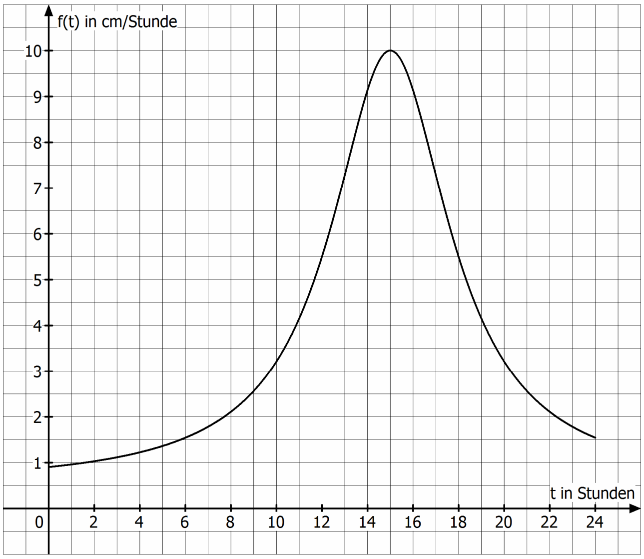
Randbetrachtung:
A(0) = 0 und A(3) = 0.

Damit liegt für u = 1,5 sogar ein absolutes Maximum vor mit A(1,5) = 3,75 Flächeneinheiten.

Koordinaten von P: $P(1{,}5 / 2{,}5)$

Aufgabe W2:

a) Skizze:



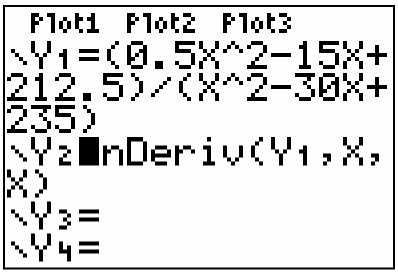
Der Zeitpunkt zu dem es am stärksten schneit ist das relative Maximum von f(t).

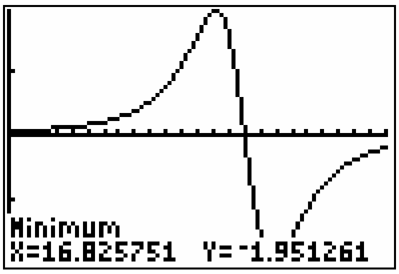
Notwendige und hinreichende Bedingung: $f'(t) = 0$ und $f''(t) < 0$

Mit dem GTR: Der Hochpunkt von f(t) lautet H(15/10).
Zum Zeitpunkt t = 15 schneit es am stärksten mit 10 cm/Stunde.

b) Die Schneefallrate nimmt am stärksten ab, wenn die erste Ableitungsfunktion $f'(t)$ minimal wird. Dies entspricht beim Schaubild von f(t) einem der beiden Wendepunkte.

Bestimmung mit dem GTR:





Die Ableitungsfunktion nimmt für t = 16,83 ihr Minimum an. Zu diesem Zeitpunkt nimmt die Schneefallrate mit $-1{,}95\frac{\text{cm}}{\text{h}^2}$ am stärksten ab.

Es gilt $f(16{,}83) = 7{,}617\frac{\text{cm}}{\text{h}}$. Würde ab diesem Zeitpunkt die Schneefallrate konstant mit $-1{,}95\frac{\text{cm}}{\text{h}^2}$ abnehmen, würde es nach $\dfrac{7{,}617\frac{\text{cm}}{\text{h}}}{1{,}95\frac{\text{cm}}{\text{h}^2}} \approx 4\text{h}$ aufhören zu schneien.