# Analytische Geometrie

## Übungsaufgaben
## Orthogonale Vektoren - Skalarprodukt

**Oberstufe**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

November 2015

**Aufgabe 1:**

Berechne das Skalarprodukt der beiden Vektoren.

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$ b) $\vec{a}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\2\\-4\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$

**Aufgabe 2:**
Berechne die Werte von a, b und c so, dass die beiden Vektoren orthogonal zueinander sind.

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\a\\-1\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}$ b) $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\2\\b\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\b\\2\end{pmatrix}$ c) $\vec{a}=\begin{pmatrix}c\\c\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}$

**Aufgabe 3:**

Bestimme den Wert von a, dass sich die beiden Geraden g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\-7\end{pmatrix}$ und

h: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1\\a\\a\end{pmatrix}$ orthogonal schneiden.

**Aufgabe 4:**
a) Überprüfe, in welcher der Ecken A(8/1/10), B(5/0/9) oder C(4/2/10) das Dreieck ABC einen rechten Winkel hat.
b) Ergänze das rechtwinklige Dreieck so durch einen vierten Punkt D, dass das entstehende Viereck ein Rechteck ist.

**Aufgabe 5:**

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$.

Bestimme einen dritten Vektor $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\a\\b\end{pmatrix}$, so dass der Vektor $\vec{c}$ zu den beiden anderen

Vektoren orthogonal ist.

# Lösungen

**Aufgabe 1:**

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = -5 + 6 + 2 = 3$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{2} \cdot 3 + 2 \cdot \sqrt{2} - 4 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$

**Aufgabe 2:**

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 + 3a - 4 = 3a - 6 \quad \Rightarrow 3a - 6 = 0 \Rightarrow a = 2$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 + 2b + 2b = 4b + 1 \quad \Rightarrow 4b + 1 = 0 \Rightarrow b = -0{,}25$

c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -c + 3c + 4 = 2c + 4 \quad \Rightarrow 2c + 4 = 0 \Rightarrow c = -2$

**Aufgabe 3:**

Die Geraden sind orthogonal, wenn die Richtungsvektoren der Geraden orthogonal zueinander sind:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ a \end{pmatrix} = -3 + 4a - 7a = -3 - 3a \quad \Rightarrow -3 - 3a = 0 \Rightarrow a = -1$$

**Aufgabe 4:**

a) Es gilt $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Es gilt $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 3 - 2 - 1 = 0$.
Das Dreieck besitzt im Punkt B einen rechten Winkel.

b) Die Berechnung des Eckpunktes D erfolgt über die Berechnung des zugehörigen Ortsvektors.

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Der Eckpunkt hat die Koordinaten D(7/3/11).

**Aufgabe 5:**

Bedingung 1: $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow 2 + 3a + b = 0 \quad (*)$

Bedingung 2: $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow 1 - 2a + 4b = 0 \quad (**)$

Aus (*) folgt: $b = -2 - 3a$
Einsetzen in (**): $1 - 2a + 4(-2 - 3a) = 0 \Rightarrow -7 - 14a = 0 \Rightarrow a = -0{,}5$
Mit (*) folgt b = -2 + 1,5 = -0,5.