# Stochastik

## Bernoulli-Experimente, binomialverteilte Zufallsvariablen

### Gymnasium ab Klasse 10

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

November 2013

**Hinweis:**
Für die Aufgaben darf der GTR benutzt werden.

**Aufgabe 1:**
Ein Jäger trifft sein Ziel mit einer Wahrscheinlichkeit 40%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt er bei zehn Schüssen
a) genau sechs Treffer b) mehr als sechs Treffer ?

**Aufgabe 2:**
Bei einem Automaten gewinnt man in 30% aller Spiele. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man
a) bei 10 Spielen mindestens einmal gewinnt ?
b) bei 20 Spielen achtmal gewinnt ?

**Aufgabe 3:**
In einem "Nachrichtenkanal" wird ein Zeichen mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0,9$ richtig übertragen. Eine Nachricht besteht aus acht Zeichen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden höchstens zwei Zeichen falsch übertragen ?

**Aufgabe 4:**
Ein fairer Würfel wird 36-mal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Augenzahl 6 in der erwarteten Anzahl eintritt.

**Aufgabe 5:**
Eine Firma produziert einen bestimmten Massenartikel mit einem Ausschussanteil von 4%. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 100 zufällig ausgewählten Artikeln mindestens 2 und höchstens 6 Ausschussartikel befinden.

**Aufgabe 6:**
Die Musikgesellschaft "Harmonie" führt ihr Jubiläumskonzert durch. In den Pausen werden Tombola-Lose angeboten. Die Gewinnwahrscheinlichkeit ist 10%.

a) Fritz ist ein eifriger Loskäufer. 90 Lose hat er schon gekauft und 10 Gewinne erzielt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man bei 90 Losen höchstens 10-mal gewinnt ?

b) Hans hat schon 100 Lose gekauft und dabei 16 Gewinne eingestrichen. Er behauptet, er habe eben eine besonders begabte Hand. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt man ohne besondere Begabung auf mindestens 16 Treffer ?

c) Die Besucher können auch Säckchen kaufen, die je 10 zufällig ausgewählte Lose enthalten. Der Veranstalter verspricht mindestens einen Gewinn, ansonsten wird das Geld zurückerstattet. Wie groß ist das Risiko, dass der Veranstalter zahlen muss ?

**Aufgabe 7:**
Wie oft muss man einen idealen Würfel mindestens werfen, wenn man mit einer Wahrscheinlichkeit von
a) mehr als 90% b) mehr als 99%
mindestens eine Sechs haben will ?

**Aufgabe 8:**
Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit den Parametern n = 30 und p = 0,25.
Berechne
a) $P(X = 10)$ b) $P(X \leq 10)$ c) $P(X > 5)$ d) $P(15 \leq X \leq 25)$

e) den Erwartungswert von X

f) Für welchen Wert k wird $P(X = k)$ maximal ?
g) Erstelle mit dem GTR mit Hilfe von 2 Listen eine Wertetabelle für die Zuordnung $k \rightarrow P(X = k)$.
Zeichne mit dem GTR ein Säulendiagramm für diese Zuordnung.

**Aufgabe 9:**
Ein Spielwürfel mit den Augenzahlen 1 bis 6 wird 18-mal geworfen.
Berechne die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse. Gib die Ereignisse in Prozent an und runde auf eine Dezimale.

A: Es wird 6-mal eine Augenzahl gewürfelt, die größer als 4 ist.
B: Es wird mehr als 4-mal eine Augenzahl gewürfelt, die größer al 4 ist.
C: Es wird mindestens 4-mal aber höchstens 7-mal eine Augenzahl gewürfelt, die größer als 4 ist.

**Aufgabe 10:**
In einer Fabrik werden die hergestellten Teile von einer Kontrolleurin überprüft, die jedes Teil mit einer Wahrscheinlichkeit von 97% richtig beurteilt.

a) Ab welcher Anzahl von untersuchten Teilen ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kontrolleurin mindestens eines davon falsch beurteilt, größer als 99,9% ?

b) Bei einer anderen Kontrolleurin liegt die Wahrscheinlichkeit, von 100 untersuchten Teilen mindestens drei falsch zu beurteilen, bei etwa 75%.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit beurteilt diese Kontrolleurin ein von ihr untersuchtes Teil falsch ?
(Ergebnis in Prozent, auf eine Dezimale gerundet).

**Aufgabe 11:**
In einer Urne sind 400 schwarze und 600 weiße Kugeln.

a) Aus dieser Urne werden nacheinander 5 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse
A: Die fünf Kugeln haben dieselbe Farbe.
B: Es sind mehr schwarze als weiße Kugeln.
C: Die Kugel, die im vierten Zug gezogen wird, ist mindestens die dritte weiße Kugel.

b) Nun wird 100mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl der gezogenen schwarzen Kugeln um höchstens 5 vom Erwartungswert abweicht ?

# Lösungen

Hinweis zu GTR-Befehlen mit Texas-Instruments:

Die Wahrscheinlichkeit P(X = k) wird mit dem Befehl binompdf(n;p;k) berechnet.

Die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq k)$ wird mit dem Befehl binomcdf(n;p;k) berechnet.

Hinweis zu GTR-Befehlen mit Casio:

Die Wahrscheinlichkeit P(X = k) wird mit dem Befehl bpd(k;n;p) berechnet.

Die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq k)$ wird mit dem Befehl bcd(k;n;p) berechnet.

**Aufgabe 1:**
Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Treffer an.
X ist binomialverteilt mit n = 10 und p = 0,4.

a) P(genau 6 Treffer) = $P(X=6) \approx 0{,}1115 = 11{,}15\%$
b) P(mehr als 6 Treffer) = $P(X>6) = 1 - P(X \leq 6) \approx 1 - 0{,}945 = 0{,}055 = 5{,}5\%$

**Aufgabe 2:**
Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der gewonnen Spiele an.

a) X ist binomialverteilt mit n = 10 und p = 0,3.
P(mindestens ein Gewinn) = $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) \approx 0{,}972 = 97{,}2\%$
b) X ist binomialverteilt mit n = 20 und p = 0,3.
P(genau 8 Gewinne) = $P(X=8) \approx 0{,}114 = 11{,}4\%$

**Aufgabe 3:**
Die Zufallsvariable X ist die Anzahl der falsch übertragenen Zeichen.
X ist binomialverteilt mit n = 8 und p = 0,1.

(Begründung: Die "Trefferwahrscheinlichkeit" für ein falsch übertragenes Zeichen beträgt 1 - 0,9 = 0,1)

P(höchstens zwei Zeichen falsch) = $P(X \leq 2) \approx 0{,}962 = 96{,}2\%$

**Aufgabe 4:**
Die Zufallsvariable X ist die Anzahl der gewürfelten Sechser.
X ist binomialverteilt mit n = 36 und $p = \frac{1}{6}$.

Die erwartete Anzahl der Sechser beträgt $E(X) = n \cdot p = 36 \cdot \frac{1}{6} = 6$.
Bei 36 Würfen ist im Erwartungswert mit 6 Sechsern zu rechnen.

P(genau 6 Sechser) = $P(X=6) \approx 0{,}176 = 17{,}6\%$

**Aufgabe 5:**
Die Zufallsvariable X ist die Anzahl der Ausschussartikel.
X ist binomialverteilt mit n = 100 und p = 0,04.

P(mindestens 2 und höchstens 6 Ausschussartikel) =
$P(2 \le X \le 6) = P(X \le 6) - P(X \le 1) \approx 0{,}8936 - 0{,}0872 = 0{,}8064 = 80{,}64\%$

**Aufgabe 6:**

a) Die Zufallsvariable X ist die Anzahl der gezogenen Gewinne.
X ist binomialverteilt mit n = 90 und p = 0,1.

P(höchstens 10 Gewinne) $P(X \le 10) \approx 0{,}713 = 71{,}3\%$

b) X ist binomialverteilt mit n = 100 und p = 0,1.
P(mindestens 16 Treffer) = $P(X \ge 16) = 1 - P(X \le 15) \approx 1 - 0{,}96 = 0{,}04 = 4\%$

c) X ist binomialverteilt mit n = 10 und p = 0,1.
P(Veranstalter muss zahlen) = P(kein Gewinn) = P(X = 0) $\approx 0{,}349 = 34{,}9\%$

**Aufgabe 7:**

Die Zufallsvariable X ist die Anzahl der Sechser.
X ist binomialverteilt mit unbekanntem n und $p = \frac{1}{6}$

a) Es soll gelten: $P(X \ge 1) > 0{,}9$
$\Leftrightarrow 1 - P(X = 0) > 0{,}9 \quad \Leftrightarrow -P(X = 0) > -0{,}1 \quad \Leftrightarrow P(X = 0) < 0{,}1$
(Im letzten Schritt dreht sich das Ungleichheitszeichen um, da durch eine negative Zahl dividiert wurde).

Es gilt $P(X = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$, da P(X = 0) bedeutet, dass bei n Versuchen keine Sechs gewürfelt werden soll.

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n < 0{,}1 \quad \overset{\log}{\Leftrightarrow} \quad \log\left(\frac{5}{6}\right)^n < \log(0{,}1) \quad \Leftrightarrow n \cdot \log\left(\frac{5}{6}\right) < \log(0{,}1) \quad \overset{:\log(5/6)}{\Leftrightarrow} \quad n > \frac{\log(0{,}1)}{\log(5/6)}$$

(Im letzten Schritt dreht sich das Ungleichheitszeichen um, da durch eine negative Zahl dividiert wurde).

$\Leftrightarrow n > 12{,}6$

Man muss mindestens 13 mal würfeln.

b) Es soll gelten: $P(X \geq 1) > 0{,}99$
$\Leftrightarrow 1 - P(X=0) > 0{,}99 \quad \Leftrightarrow -P(X=0) > -0{,}01 \quad \Leftrightarrow P(X=0) < 0{,}01$

Es gilt $P(X=0) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$, da P(X = 0) bedeutet, dass bei n Versuchen keine Sechs gewürfelt werden soll.

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n < 0{,}01 \overset{\log}{\Leftrightarrow} \log\left(\frac{5}{6}\right)^n < \log(0{,}01) \quad \Leftrightarrow n \cdot \log\left(\frac{5}{6}\right) < \log(0{,}01)$$

$$\overset{:\log(5/6)}{\Leftrightarrow} n > \frac{\log(0{,}01)}{\log(5/6)} \quad \Leftrightarrow n > 25{,}3$$

Man muss mindestens 26 mal würfeln.

**Aufgabe 8:**

a) $P(X=10) \approx 0{,}0909$ b) $P(X \leq 10) \approx 0{,}8943$

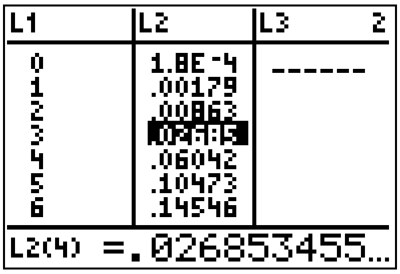
c) $P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) \approx 0{,}797$

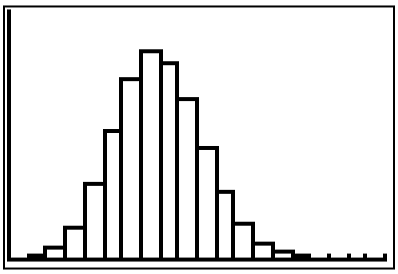
d) $P(15 \leq X \leq 25) = P(X \leq 25) - P(X \leq 14) \approx 1 - 0{,}9973 = 0{,}0027$

e) $E(X) = n \cdot p = 30 \cdot 0{,}25 = 7{,}5$

f) $P(X=k)$ wird maximal für k = 7. Es gilt $P(X=7) \approx 0{,}16624$

g)



**Aufgabe 9:**

Ereignis A:
Die Zufallsvariable X zählt die Anzahl der Würfe, die größer als 4 sind.

X ist binomialverteilt mit n = 18 und $p = \frac{1}{3}$.

$P(A) = P(X=6) \approx 0{,}196$

Ereignis B:
Die Zufallsvariable X zählt die Anzahl der Würfe, die größer als 4 sind.

X ist binomialverteilt mit n = 18 und $p = \frac{1}{3}$.

$P(B) = P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) \approx 0{,}769$

Ereignis C:
Die Zufallsvariable X zählt die Anzahl der Würfe, die größer als 4 sind.
X ist binomialverteilt mit n = 18 und $p = \frac{1}{3}$.
$P(C) = P(4 \le X \le 7) = P(X \le 7) - P(X \le 3) \approx 0{,}7767 - 0{,}1017 = 0{,}675$

**Aufgabe 10:**

a) Die Zufallsvariable X ist die Anzahl der Teile, die falsch beurteilt werden.
X ist binomialverteilt mit unbekanntem n und p = 0,03.

Es soll gelten: $P(X \ge 1) > 0{,}999$
$\Leftrightarrow 1 - P(X = 0) > 0{,}999 \quad \Leftrightarrow -P(X = 0) > -0{,}001 \quad \Leftrightarrow P(X = 0) < 0{,}001$
(Im letzten Schritt dreht sich das Ungleichheitszeichen um, da durch eine negative Zahl dividiert wurde).

Es gilt $P(X = 0) = 0{,}97^n$, da P(X = 0) bedeutet, dass bei n Versuchen kein Teil falsch beurteilt wird.

$0{,}97^n < 0{,}001 \quad \overset{\log}{\Leftrightarrow} \quad \log(0{,}97)^n < \log(0{,}001) \quad \Leftrightarrow n \cdot \log(0{,}97) < \log(0{,}001)$
$\overset{:\log 0{,}97}{\Leftrightarrow} \quad n > \frac{\log(0{,}001)}{\log(0{,}97)}$
(Im letzten Schritt dreht sich das Ungleichheitszeichen um, da durch eine negative Zahl dividiert wurde).

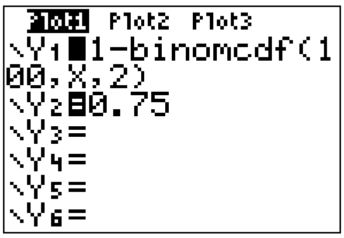
$\Leftrightarrow n > 226{,}8$

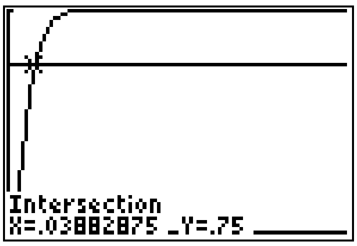
Die Kontrolleurin muss mindestens 227 Teil beurteilen.

b) Die Zufallsvariable X ist die Anzahl der Teile, die falsch beurteilt werden.
X ist binomialverteilt mit n = 100 und unbekanntem p.

Es gilt $P(X \ge 3) \approx 0{,}75$.
Daraus folgt $1 - P(X \le 2) \approx 0{,}75$.

Mit dem GTR kann nun p berechnet werden:




Es ist p = 0,0388.
Die Kontrolleurin beurteilt ein von ihr untersuchtes Teil mit einer Wahrscheinlichkeit von 3,9% falsch.

**Aufgabe 11:**

a) Ereignisse A und B:
Die Zufallsvariable X ist die Anzahl der gezogenen weißen Kugeln.
X ist binomialverteilt mit n = 5 und $p = 0,6$.

$P(A) = P(X = 0) + P(X = 5) = 0,01024 + 0,07776 \approx 0,088$

$P(B) = P(X \le 2) = 0,31744$

Ereignis C:
Damit das Ereignis C eintritt, müssen in den ersten drei Zügen mindestens zwei weiße Kugeln gezogen worden sein.
Im vierten Zug muss eine weiße Kugel gezogen werden.

Wahrscheinlichkeit, dass in den ersten drei Zügen mindestens zwei weiße Kugeln gezogen werden:
Die Zufallsvariable X ist die Anzahl der gezogenen weißen Kugeln.
X ist binomialverteilt mit n = 3 und p = 0,6.

P(in drei Zügen mindestens zwei weiße Kugeln) = $P(X \ge 2) = 1 - P(X \le 1) = 0,648$

$P(C) = 0,648 \cdot 0,6 = 0,3888$

b) Die Zufallsvariable X ist die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln.
X ist binomialverteit mit n = 100 und p = 0,4.

Der Erwartungswert von X beträgt $E(X) = n \cdot p = 100 \cdot 0,4 = 40$.

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln zwischen 35 und 45 liegt.

$P(35 \le X \le 45) = P(X \le 45) - P(X \le 34) = 0,8689 - 0,1303 = 0,7386$