Übungsaufgaben zum Aufstellen von ganzrationalen Funktionsgleichungen

Aufgabe 1:
Eine zum Ursprung symmetrische ganzrationale Funktion 5.Ordnung hat im Ursprung die Tangente mit der Gleichung y = 7x und in P(1/0) einen Wendepunkt.
Wie lautet der Funktionsterm der Parabel ?

Aufgabe 2:
Eine ganzrationale Funktion hat in P(-2/2) einen Wendepunkt mit Steigung 0. Von welchem Grad muss die Funktion mindestens sein ? Ist die Funktionsgleichung damit schon eindeutig bestimmt ? (Nur Begründung, keine Rechnung).

Aufgabe 3:
Wie lautet die ganzrationale Funktion 3.Ordnung, die die x-Achse im Ursprung berührt und deren Tangente in P(-3/0) parallel zur Geraden mit der Gleichung y = 6x ist ?

Aufgabe 4:
Eine ganzrationale Funktion 3.Ordnung hat in P(1/4) eine Tangente
a) parallel zur x-Achse und in Q(0/2) ihren Wendepunkt.
b) parallel zur 1.Winkelhalbierenden und in Q(0/2) eine Tangente parallel zur x-Achse.
Wie lautet jeweils die Funktionsgleichung ?

Aufgabe 5:
Eine ganzrationale Funktion 3.Ordnung hat dieselben Nullstellen wie $g(x) = 2x - \frac{1}{2}x^3$. Die Schaubilder der beiden Funktionen stehen im Ursprung senkrecht aufeinander. Wie lautet die Funktionsgleichung ?

Aufgabe 6:
Eine zur y-Achse symmetrische ganzrationale Funktion 4.Ordnung hat in P(2/0) eine Wendetangente mit der Steigung $-\frac{4}{3}$. Wie lautet der Funktionsterm ?

Aufgabe 7:
Eine ganzrationale Funktion 3.Ordnung ist punktsymmetrisch zum Ursprung.
Die Wendetangente hat die Steigung $-\frac{9}{16}$; die 1.Winkelhalbierende schneidet das Schaubild der Funktion für $x = \frac{5}{4}$. Bestimme die Funktionsgleichung.

Aufgabe 8:
Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion dritten Grades geht durch O(0/0) und hat in H(2/4) einen Punkt mit waagrechter Tangente. Für x = 1 ergibt sich ein Wendepunkt. Wie lautet die Funktionsgleichung ?

Aufgabe 9:
Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion 4.Grades verläuft symmetrisch zur y-Achse, hat in P(2/0) eine Tangente mit der Steigung t ($t \neq -2$) und geht durch den Punkt Q(0/2).
Bestimme die Funktionsgleichung.

Aufgabe 10:
Eine ganzrationale Funktion 3.Ordnung durch P(0/-5) und Q(1/0) berührt die x-Achse in R(5/0). Wie lautet die Funktionsgleichung ?

Aufgabe 11:
Eine ganzrationale Funktion 3.Ordnung geht durch O(0/0) und hat ihren Wendepunkt in P(1/-2). Die Wendetangente schneidet die x-Achse in Q(2/0).
Wie lautet die Funktionsgleichung ?

Musterlösungen zum Aufstellen von ganzrationalen Funktionsgleichungen

Aufgabe 1:

Ansatz: $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$ (nur ungerade Hochzahlen wegen der Symmetrie)

Dann gilt: $f'(x) = 5ax^4 + 3bx^2 + c$ und $f''(x) = 20ax^3 + 6bx$

Bedingungen:

$f'(0) = 7 \Rightarrow c = 7$

$f(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$

$f''(1) = 0 \Rightarrow 20a + 6b = 0$

Lösung des Gleichungssystems: a = 3 ; b = -10 ; c = 7 also $f(x) = 3x^5 - 10x^3 + 7x$

Aufgabe 2:

Bedingungen:

$f(-2) = 2$; $f''(-2) = 0$; $f'(-2) = 0$

Aufgrund der Anzahl der Bedingungen benötigt man mindestens 3 Unbekannte in dem Funktionsansatz.

Dies wäre zwar bei einer Funktion 2.Grades mit $f(x) = ax^2 + bx + c$ zwar erfüllt, allerdings handelt sich dabei um Parabeln, die keine Wendepunkte besitzen.

Aus diesem Grund muss es sich um eine Funktion von mindestens Grad 3 handeln.

Da in dem Ansatz $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ jedoch 4 Unbekannte enthalten sind, aber nur 3 Bedingungen vorliegen, ist die ganzrationale Funktion damit nicht eindeutig bestimmt.

Aufgabe 3:

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Bedingungen:

$f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$

$f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$ (Berührung der x-Achse bedeutet gleiche Steigung wie die x-Achse)

$f(-3) = 0 \Rightarrow -27a + 9b - 3c + d = 0$

$f'(-3) = 6 \Rightarrow 27a - 6b + c = 6$

Lösung des Gleichungssystems: $a = \frac{2}{3}$; b = 2 ; c = d = 0 und somit $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2$

Aufgabe 4:

a) Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$

Bedingungen:

$f(1) = 4 \Rightarrow a + b + c + d = 4$

$f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0$

$f(0) = 2 \Rightarrow d = 2$

$f''(0) = 0 \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0$

Lösung des linearen Gleichungssystems: a = -1 ; b = 0 ; c = 3 ; d = 2
$f(x) = -x^3 + 3x + 2$

b) Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
Bedingungen:
$f(1) = 4 \Rightarrow a + b + c + d = 4$
$f'(1) = 1 \Rightarrow 3a + 2b + c = 1$ (1.Winkelhalbierende y = x besitzt die Steigung 1)
$f(0) = 2 \Rightarrow d = 2$
$f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

Lösung des linearen Gleichungssystems: a = -3 ; b = 5 ; c = 0 ; d = 2
$f(x) = -3x^3 + 5x^2 + 2$

Aufgabe 5:
Zunächst benötigt man die Nullstellen der Parabel von g(x):
$g(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot \left(2 - \frac{1}{2}x^2\right) = 0$
Diese Gleichung besitzt die Lösungen $x_1 = 0$ und $x_{2,3} = \pm 2$.
Außerdem gilt: $g'(x) = 2 - \frac{3}{2}x^2$
Ansatz der gesuchten Funktion: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
Bedingungen:
$f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$ (Nullstelle N(0/0))
$f(-2) = 0 \Rightarrow -8a + 4b - 2c + d = 0$ (Nullstelle N(-2/0))
$f(2) = 0 \Rightarrow 8a + 4b + 2c + d = 0$ (Nullstelle N(2/0))
$f'(0) \cdot g'(0) = -1 \Rightarrow c \cdot 2 = -1 \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$
Lösung des Gleichungssystems: $a = \frac{1}{8}$; b = 0 ; c = -0,5 ; d = 0
$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x$

Aufgabe 6:
Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ (nur gerade Hochzahlen aufgrund der Symmetrie)
$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$ und $f''(x) = 12ax^2 + 2b$

Bedingungen:
$f(2) = 0 \Rightarrow 16a + 4b + c = 0$
$f''(2) = 0 \Rightarrow 48a + 2b = 0$
$f'(2) = -\frac{4}{3} \Rightarrow 32a + 4b = -\frac{4}{3}$
Lösung des Gleichungssystems: $a = \frac{1}{48}$; $b = -\frac{1}{2}$; $c = \frac{5}{3}$

$f(x) = \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}$

Eine Parabel 3.Ordnung ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Die Wendetangente hat die Steigung $-\frac{9}{16}$; die 1.Winkelhalbierende schneidet die Parabel für $x = \frac{5}{4}$.
Bestimme die Funktionsgleichung.

Aufgabe 7:
Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx$ (nur ungerade Hochzahlen aufgrund der Symmetrie)
$f'(x) = 3ax^2 + b$

Auf den ersten Blick fehlt hier die Information, wo sich der Wendepunkt befindet.
Hier muss man die Regel kennen, dass eine Funktion 3.Grades, die symmetrisch zum Ursprung ist, immer den Wendepunkt W(0/0) besitzt.

Bedingungen:
$f'(0) = -\frac{9}{16} \Rightarrow b = -\frac{9}{16}$
$f(\frac{5}{4}) = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{125}{64}a + \frac{5}{4}b = \frac{5}{4}$ (die erste Winkelhalbierende besitzt die Gleichung y = x , somit ist der x-Wert und der y-Wert gleich)

Lösung des Gleichungssystems: a = 1, $b = -\frac{9}{16}$

Funktionsgleichung: $f(x) = x^3 - \frac{9}{16}x$

Aufgabe 8:
Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ und $f''(x) = 6ax + 2b$
Bedingungen:
$f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$
$f(2) = 4 \Rightarrow 8a + 4b + 2c + d = 4$
$f'(2) = 0 \Rightarrow 12a + 4b + c = 0$
$f''(1) = 6a + 2b = 0$

Lösung des Gleichungssystems: a = -1, b = 3
Funktionsgleichung: $f(x) = -x^3 + 3x$

Aufgabe 9:
Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ (wegen der Symmetrie zur y-Achse nur gerade Hochzahlen)
$\Rightarrow f'(x) = 4ax^3 + 2bx$

Bedingungen:
$f(0) = 2 \Rightarrow c = 2$
$f(2) = 0 \Rightarrow 16a + 4b + 2 = 0$ (1)
$f'(2) = t \Rightarrow 32a + 4b = t$ (2)

Aus (1): $b=-0{,}5-4a$ in (2)

$\Rightarrow 32a+4(-0{,}5-4a)=t \Rightarrow 16a-2=t \Rightarrow a=\frac{1}{16}t+\frac{1}{8}$

$\Rightarrow b=-0{,}5-4(\frac{1}{16}t+\frac{1}{8})=-\frac{1}{4}t-1$

Funktionsgleichung: $f_t(x)=(\frac{1}{16}t+\frac{1}{8})\cdot x^4+(-\frac{1}{4}t-1)\cdot x^2$

Aufgabe 10:

Ansatz: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$\Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$

Bedingungen:

$f(0)=-5 \Rightarrow d=-5$

$f(1)=0 \Rightarrow a+b+c+d=0$

$f(5)=0 \Rightarrow 125a+25b+5c+d=0$

$f'(5)=0 \Rightarrow 75a+10b+c=0$ (Berührung der x-Achse bedeutet Steigung 0)

Lösung des Gleichungssystems: a = 0,2 ; b = -2,2 ; c = 7 ; d = - 5

Funktionsgleichung: $f(x)=0{,}2x^3-2{,}2x^2+7x-5$

Aufgabe 11:

Ansatz: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ mit $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ und $f''(x)=6ax+2b$

Bedingungen:

$f(0)=0 \Rightarrow d=0$

$f(1)=-2 \Rightarrow a+b+c+d=-2$

$f''(1)=0 \Rightarrow 6a+2b=0$

Die letzte Bedingung ergibt sich aus der bekannten Schnittstelle der Wendetangente mit der x-Achse in Q.

Da die Wendetangente durch die Punkte P und Q verläuft, kann die Steigung der Wendetangente berechnet werden: $m=\frac{y_P-y_Q}{x_P-x_Q}=\frac{-2-0}{1-2}=2$

Damit gilt noch $f'(1)=m=2 \Rightarrow 3a+2b+c=2$

Lösung des Gleichungssystems: a = -4 ; b = 12 ; c = -10 ; d = 0

Funktionsgleichung: $f(x)=-4x^3+12x^2-10x$