Analytische Geometrie

Übungsaufgaben
Gegenseitige Lage zweier Ebenen

Oberstufe

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

November 2015

Aufgabe 1:
Untersuche, welche der Ebenen $E: -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 8$, $F: 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 8$ bzw. $G: 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 4$ parallel sind. Bestimme ansonsten die Gleichung der Schnittgerade.

Aufgabe 2:
Untersuche, ob sich die Ebenen E und F schneiden.
Gib gegebenenfalls die Schnittgerade an.

a) $E: 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$, F: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $E: 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2$, F: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3:

Bestimme die Zahlen a, b und c in der Parametergleichung von F: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ a \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} b \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ c \end{pmatrix}$

so, dass die Ebenen F und E: $x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$ identisch sind.

Aufgabe 4:
Überprüfe, ob die beiden Ebenen gemeinsame Punkte haben oder nicht.
Gib gegebenenfalls die Schnittgerade an.

a) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; F: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; F: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lösungen

Aufgabe 1:

Die Ebenen E und G sind parallel, da die Normalenvektoren der beiden Ebenen Vielfache zueinander sind: $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{n_G} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Die Ebenen E und F schneiden sich in einer Schnittgerade:

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 8 \quad | \cdot 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 8 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 8 \\ 8x_2 &= 24 \quad (*) \end{aligned}$$

Lösung des Gleichungssystems:
Aus (*) folgt: $x_2 = 3$
Setze $x_3 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$
$-x_1 + 2 \cdot 3 - 3t = 8 \Rightarrow x_1 = -2 - 3t$

Gleichung der Schnittgerade: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2-3t \\ 3 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Ebenen F und G schneiden sich in einer Schnittgerade:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 8 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 &= 4 \\ 4x_1 + 12x_3 &= 12 \quad (*) \end{aligned}$$

Lösung des Gleichungssystems:
Setze $x_3 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$
Aus (*) folgt: $4x_1 + 12t = 12 \Rightarrow x_1 = 3 - 3t$
$2(3-3t) - 4x_2 + 6t = 4 \Rightarrow x_2 = 0{,}5$

Gleichung der Schnittgerade: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3-3t \\ 0{,}5 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2:

a) Einsetzen der Zeilen der Gleichung F in die Gleichung E:
$3(1-s+t) + 2(1-s+2t) - (s+t) = 3$

$\Rightarrow 3 - 3s + 3t + 2 - 2s + 4t - s - t = 3 \quad \Rightarrow -6s + 6t = -2 \Rightarrow t = -\frac{1}{3} + s$

Einsetzen in die Ebenengleichung von F: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-\frac{1}{3} + s) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schnittgerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) Einsetzen der Zeilen der Gleichung F in die Gleichung E:

$2(-1+4s+t) - 2(1+s+t) + 3(3-2s) = -2$

$\Rightarrow -2+8s+2t-2-2s-2t+9-6s = -2 \Rightarrow 5 = -2$

Da sich ein Widerspruch ergibt, sind die beiden Ebenen echt parallel.
Es gibt keine Schnittgerade.

Aufgabe 3:

Einsetzen der Zeilen der Ebene F in die Ebene E:

$(3+sb) + 2(3+2s-2t) - (a+6s+tc) = 4$

$\Rightarrow 3+sb+6+4s-4t-a-6s-tc = 4$

$\Rightarrow 9-a+s(b-2)+t(-4-c) = 4$

Wenn die Ebenen identisch sind, muss eine wahre Aussage entstehen.
Dies ist der Fall für 9 - a = 4 und b - 2 = 0 und -4-c = 0.
Daraus folgt a = 5, b = 2 und c = -4

Aufgabe 4:

a) Gleichsetzen der beiden Parametergleichungen ergibt folgendes LGS:

$$\begin{array}{lllll} 2r & +3s & -t & -u & =-2 \\ -r & & -t & +2u & =4 \\ 2r & +2s & & -2u & =-7 \end{array}$$

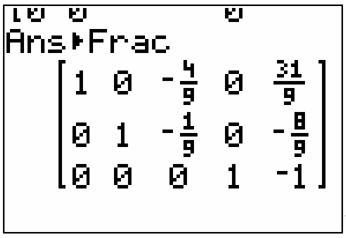
rref([A])

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Da das LGS keine Lösung besitzt, sind die beiden Ebenen echt parallel.

b) Gleichsetzen der beiden Parametergleichungen ergibt folgendes LGS:

$$\begin{array}{rrrrl} r & +5s & -t & -u & =0 \\ 2r & +s & -t & +2u & =4 \\ & & & -2u & =2 \end{array}$$



Es ergibt sich u = -1.

Einsetzen in die Ebenengleichung von F:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$