Analytische Geometrie

Übungsaufgaben
Gegenseitige Lage von Ebenen und Geraden

Oberstufe

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

November 2015

Aufgabe 1:
Bestimme den Schnittpunkt der Ebene E: $-x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$ und der Gerade

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2:
Prüfe rechnerisch, ob die Gerade g in der Ebene E liegt oder die Gerade parallel zur Ebene verläuft.

a) E: $-2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$; g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) E: $-2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$; g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3:
Ein Baum mit dem Fußpunkt F(-2/1/0) und der Spitze S(-2/1/15) wird von der Sonne bestrahlt, deren Sonnenstrahlen parallel zum Vektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ verlaufen.

Der Baum wirft einen Schatten auf einen Hang, der durch die Ebene E: $x_1 + 2x_2 + x_3 = -6$ repräsentiert wird. Wo liegt der Schattenpunkt T der Baumspitze S auf dem Hang und wie lang ist der Schatten des Baumes ?

Aufgabe 4:
Untersuche die gegenseitige Lage von E und g.

a) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$; g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) E: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$; g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) E: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$; g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$

e) E: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$; g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$

Lösungen

Aufgabe 1:

Einsetzen der Zeilen der Geradengleichung in die Ebenengleichung:

$$-(-1+2t)+2(6-t)+(-6+3t)=5$$
$$\Rightarrow 1-2t+12-2t-6+3t=5 \Rightarrow -t=-2 \Rightarrow t=2$$

Einsetzen von t = 2 in die Geradengleichung ergibt den Schnittpunkt S(3/4/0).

Aufgabe 2:

a) Einsetzen der Zeilen der Geradengleichung in die Ebenengleichung:

$$-2(5+2t)+(7+2t)+2(3+t)=3$$
$$\Rightarrow -10-4t+7+2t+6+2t=3 \Rightarrow 3=3 \quad \text{ist eine wahre Aussage}$$

Die Gerade liegt in der Ebene E.

b) Einsetzen der Zeilen der Geradengleichung in die Ebenengleichung:

$$-2(1+t)+(0+4t)+2(2-t)=3$$
$$\Rightarrow -2-2t+4t+4-2t=3 \Rightarrow 2=3 \quad \text{ist eine falsche Aussage}$$

Die Gerade ist parallel zu E.

Aufgabe 3:

Der Schattenpunkt T entspricht dem Schnitt der Ebene E mit der Geraden, die durch S verläuft und den Richtungsvektor der Sonnenstrahlen besitzt.

Geradengleichung: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\1\\15\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\7\end{pmatrix}$

Einsetzen der Zeilen der Geradengleichung in die Ebenengleichung:

$$-2+4r+2(1+5r)+(15+7r)=-6$$
$$\Rightarrow -2+4r+2+10r+15+7r=-6 \Rightarrow 21r=-21 \Rightarrow r=-1$$

Einsetzen von r = -1 in die Geradengleichung ergibt den Schnittpunkt T(-6/-4/8).

Schattenlänge des Baumes: $\left|\overrightarrow{FT}\right|=\left|\begin{pmatrix}-4\\-5\\8\end{pmatrix}\right|=\sqrt{16+25+64}=\sqrt{105}$ LE

Aufgabe 4:

a) Gleichsetzen der beiden Gleichungen:

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\4\\3\end{pmatrix}\quad\Rightarrow t\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\\-3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$$

Lösung des Gleichungssystems (mit GTR): t = -0,5 ; r = 0 ; s = 1,5

Einsetzen von t = -0,5 in die Geradengleichung ergibt den Schnittpunkt S(5,5/-1/0,5).

b) Gleichsetzen der beiden Gleichungen:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\5\\-3\end{pmatrix}\quad\Rightarrow t\cdot\begin{pmatrix}1\\-5\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}$$

Das Gleichungssystem besitzt keine Lösung (GTR).

Die Gerade ist parallel zur Ebene.

c) Umwandlung der Ebenengleichung in eine Koordinatengleichung:
Ansatz: $3x_1 - x_2 + x_3 = d$
Einsetzen des Ebenenpunktes P(2/2/1): $3\cdot 2 - 2 + 1 = d \Rightarrow d = 5$
Koordinatengleichung: $3x_1 - x_2 + x_3 = 5$

Einsetzen der Zeilen der Geradengleichung in die Ebenengleichung:

$3(1+2t)-(-2t)+(2+t)=5$
$\Rightarrow 3+6t+4t+2+t=5 \Rightarrow 11t=0 \Rightarrow t=0$

Einsetzen von t = 0 in die Geradengleichung ergibt den Schnittpunkt S(1/0/2).

d) Umwandlung der Ebenengleichung in eine Koordinatengleichung:
Ansatz: $-2x_1 + x_2 + 2x_3 = d$
Einsetzen des Ebenenpunktes P(2/4/3): $-2\cdot 2 + 4 + 2\cdot 3 = d \Rightarrow d = 6$
Koordinatengleichung: $-2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6$

Einsetzen der Zeilen der Geradengleichung in die Ebenengleichung:

$-2(5+2t)+(6+6t)+2(5-t)=6$
$\Rightarrow -10-4t+6+6t+10-2t=6 \Rightarrow 6=6$ wahre Aussage

Die Gerade liegt in der Ebene.

e) Umwandlung der Ebenengleichung in eine Koordinatengleichung:
Ansatz: $-3x_1 + x_2 = d$
Einsetzen des Ebenenpunktes P(-2/4/-1): $-3 \cdot (-2) + 4 = d \Rightarrow d = 10$
Koordinatengleichung: $-3x_1 + x_2 = 10$

Einsetzen der Zeilen der Geradengleichung in die Ebenengleichung:

$-3(1+2t) + 6t = 10$
$\Rightarrow -3 - 6t + 6t = 10 \Rightarrow -3 = 10$ falsche Aussage

Die Gerade ist parallel zur Ebene.