Analytische Geometrie

Übungsaufgaben
Ebenengleichung
(Normalengleichung, Koordinatengleichung)

Oberstufe

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

November 2015

Aufgabe 1:

a) Der Punkt P(3/1/-2) liegt in der Ebene E, $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor von E.

Bestimme eine Normalengleichung von E.

b) Überprüfe, ob die Punkte P(2/2/2) bzw. Q(0/5/-1) in E liegen.

Aufgabe 2:

Der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ steht orthogonal auf der Ebene E, in der auch der Punkt P(1/4/0) liegt.

a) Stelle eine Koordinatengleichung von E auf.

b) Bestimme, falls möglich, die Zahlen a, b, c so, dass die Punkte P(a/3/2), Q(b/b/2), R(c/c/c) in der Ebene E liegen.

Aufgabe 3:

Die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ verläuft orthogonal zur Ebene E, der Punkt P(2/3/3) liegt in E.

Bestimme eine Normalengleichung von E.

Aufgabe 4:

Ein Tischfuß zeigt von einem Punkt F(2/3/0) des Fußbodens aus nach oben, die Tischplatte ist 10 Einheiten vom Boden entfernt. Bestimme eine Normalengleichung der Ebene, in der die Tischplatte liegt.

Aufgabe 5:

Bestimme eine Koordinatengleichung der x_1x_2-Ebene.

Aufgabe 6:

a) Wandle die Ebene E: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$ in eine Koordinatengleichung um.

b) Wandle die Ebene E: $2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 8$ in eine Normalengleichung um.

Aufgabe 7:

Die beiden Punkte P(3/2/1) und Q(7/-4/11) liegen spiegelbildlich zur Ebene E.
Stellen eine Normalengleichung von E auf und wandle diese in eine Koordinatengleichung um.

Lösungen

Aufgabe 1:

a) Normalengleichung von E: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$.

b) Einsetzen von P(2/2/2) in E: $\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = -1 + 0 + 12 \neq 0$

P liegt nicht auf E.

Einsetzen von Q(0/5/-1) in E: $\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = -3 + 0 + 3 = 0$

Q liegt auf E.

Aufgabe 2:

a) Ansatz für die Koordinatengleichung: $2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = d$
Einsetzen von P(1/4/0): $2 \cdot 1 - 2 \cdot 4 + 5 \cdot 0 = d \Rightarrow -6 = d$
Koordinatengleichung: $2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -6$

b) Einsetzen von P(a/3/2): $2a - 6 + 10 = -6 \Rightarrow a = -5$

Einsetzen von Q(b/b/2): $2b - 2b + 10 = -6 \Rightarrow 10 = -6$
Es gibt keinen Wert von b, für den Q auf der Ebene E liegt.

Einsetzen von R(c/c/c): $2c - 2c + 5c = -6 \Rightarrow c = -1{,}2$

Aufgabe 3:

Der Richtungsvektor von g entspricht dem Normalenvektor von E: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

Aufgabe 4:

Ein Punkt der Tischplatte hat die Koordinaten A(2/3/10).

Da die Ebene parallel zur $x_1 - x_2$-Ebene ist, besitzt die Ebene den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ebene der Tischplatte: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$.

Aufgabe 5:
Die x_1x_2-Ebene besitzt die Koordinatengleichung $x_3 = 0$

Aufgabe 6:

a) Ansatz für die Koordinatengleichung: $-3x_1 + x_2 + 5x_3 = d$
Einsetzen des Punktes P(0/2/2): $-3 \cdot 0 + 2 + 10 = d \Rightarrow 12 = d$
Koordinatengleichung: $-3x_1 + x_2 + 5x_3 = 12$

b) Ein Punkt auf der Ebene ist A(4/0/0).

Normalengleichung: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

Aufgabe 7:

Ein Normalenvektor von E lautet $\vec{n} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Ein Punkt auf E ist der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{PQ}$: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3+7 \\ 2-4 \\ 1+11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

Normalengleichung von E: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix} = 0$

Ansatz für die Koordinatengleichung: $4x_1 - 6x_2 + 10x_3 = d$
Einsetzen des Punktes M(5/-1/6): $20 + 6 + 60 = d \Rightarrow d = 86$
Koordinatengleichung: $4x_1 - 6x_2 + 10x_3 = 86$