Analysis

Trigonometrische Funktionen
Pflicht- und Wahlteilaufgaben

Gymnasium Oberstufe J1 oder J2

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Dezember 2013

Pflichtteilaufgaben (ohne GTR):

Aufgabe 1:
Leite die folgenden Funktionen einmal ab:

a) $f(x) = -\sin(4x-5) + \cos(x^2)$
b) $f(x) = -x^2 \cdot \cos(2x)$
c) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$
d) $f(x) = \sin(2x) \cdot \cos(4x)$

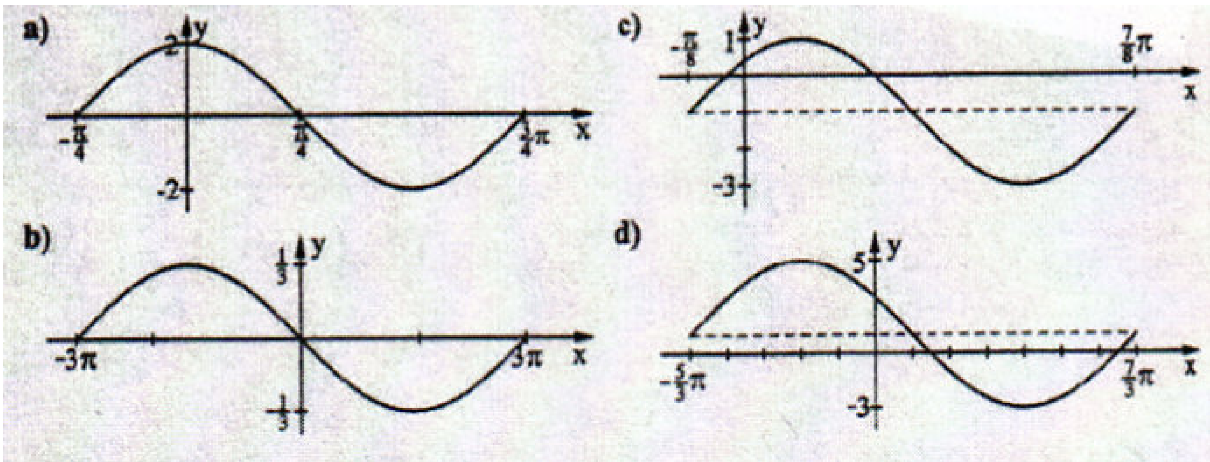
Aufgabe 2:
Wie entsteht das Schaubild von f aus dem Schaubild der Sinusfunktion $g(x) = \sin(x)$?

a) $f(x) = \sin(2x)$
b) $f(x) = \sin(2(x-\pi))$
c) $f(x) = \sin(2x-\pi)$
d) $f(x) = 3\sin(x)$
e) $f(x) = \sin(x) - 2$
f) $f(x) = 4 \cdot \sin(x) + 4$

Aufgabe 3:
Skizziere die folgenden Funktionen in ein Koordinatensystem:

a) $f(x) = 2 \cdot \sin(\frac{1}{2}x) - 1$
b) $f(x) = -\frac{3}{2} \cdot \cos(x) + 1$
c) $f(x) = 2 \cdot \sin(2x - \pi)$

Aufgabe 4:
Gib zu den folgenden Schaubildern mögliche Funktionsterme einer allgemeinen Sinusfunktion [Kosinusfunktion] an.



Aufgabe 5:
Gib zu der Funktion $f(x) = \sin(2x - \pi)$ eine Stammfunktion F(x) an, die den Punkt P(π /5) enthält.

Aufgabe 6:
Löse die folgenden trigonometrischen Gleichungen für $x \in \mathbb{R}$ bzw. für $-\pi \le x \le \pi$

a) $\cos(2x) = 0$
b) $\sin^2(x) + \sin(x) - 2 = 0$
c) $\cos(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}$

Wahlteilaufgaben (mit GTR):

Aufgabe 7:
Die Temperaturschwankungen in Grad Celsius innerhalb eines Tages können durch die Funktion $T(x) = 5{,}2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot x\right)$; x in Stunden, beschrieben werden. Dabei entspricht x = 0 der Tageszeit 08.00 Uhr.

a) Welche Temperatur herrschte um 14 Uhr ? Zu welchen Uhrzeiten lag die Temperatur bei etwa -2 °C ?

b) Wie hoch war die Durchschnittstemperatur an diesem Tag ?

Aufgabe 8:
Die Pegelstände in Wertheim beim Hochwasser des Mains Anfang Januar 2003 können näherungsweise durch eine trigonometrische Funktion beschrieben werden.
Auf den Höchststand von 6,07 Meter am 4.Januar um 8.00 Uhr folgte der nächste Tiefststand von 5,48 Meter am 5. Januar um 15.00 Uhr.

Skizziere den Verlauf des Pegelstandes im angegebenen Zeitraum.
Ermittle einen Term der Funktion.
Welchen Pegelstand hatte demnach der Main in Wertheim am 6.Januar 2003 um 12.00 Uhr ?
Bestimme den mittleren Pegelstand für den 4.Januar zwischen 0.00 Uhr und 24.00 Uhr.

Aufgabe 9:
Der Wasserstand h (in m) bei Spiekeroog an der Nordseeküste schwankt zwischen 1 m bei Niedrigwasser und etwa 3 m bei Hochwasser. Er lässt sich in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden nach Niedrigwasser) modellhaft beschreiben durch

$$h(t) = a + b \cdot \cos\left(\frac{1}{6}\pi \cdot t\right)$$

a) Bestimme die Parameter a und b. Skizziere den Graphen von h.
b) Wie lange liegt der Wasserpegel unter 1,5 m ?
c) Wie viel Zentimeter je Minute steigt das Wasser maximal ?
d) Überprüfe die Richtigkeit der Faustregel: Der Wasserstand steigt im zweiten Drittel der Zeitspanne zwischen Niedrig- und Hochwasser um die Hälfte der Gesamtzunahme.

Lösungen

Aufgabe 1:

a) $f'(x) = -\cos(4x-5)\cdot 4 - \sin(x^2)\cdot 2x = -4\cos(4x-5) - 2x\cdot\sin(x^2)$

b) $f'(x) = -2x\cdot\cos(2x) - x^2\cdot(-\sin(2x))\cdot 2 = -2x\cdot\cos(2x) + 2x^2\cdot\sin(2x)$

c) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \sin(x)\cdot(\cos(x))^{-1}$

$$f'(x) = \cos(x)\cdot(\cos(x))^{-1} + \sin(x)\cdot(-1)\cdot(\cos(x))^{-2}\cdot(-\sin(x))$$

$$= \frac{\cos(x)}{\cos(x)} + \frac{(\sin(x))^2}{(\cos(x))^2} = 1 + \frac{(\sin(x))^2}{(\cos(x))^2}$$

d) $f'(x) = 2\cos(2x)\cdot\cos(4x) + \sin(2x)\cdot(-4\sin(4x))$

Aufgabe 2:

a) Das Schaubild von g(x) wurde mit dem Faktor 0,5 in x-Richtung gestaucht.

b) Das Schaubild von g(x) wurde mit dem Faktor 0,5 in x-Richtung gestaucht und um π nach rechts verschoben.

c) Es gilt $f(x) = \sin(2(x-\frac{\pi}{2}))$. Das Schaubild von g(x) wurde mit dem Faktor 0,5 in x-Richtung gestaucht und um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts verschoben.

d) Das Schaubild wurde mit dem Faktor 3 in y-Richtung gestreckt.

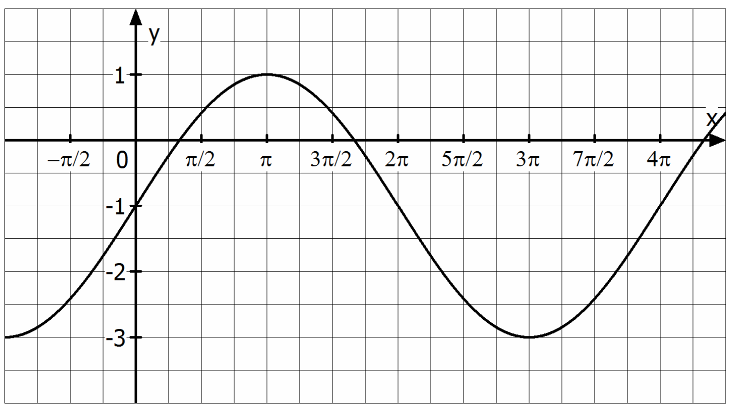
e) Das Schaubild wurde um 2 Einheiten nach unten verschoben.

f) Das Schaubild wurde mit dem Faktor 4 in y-Richtung gestreckt und anschließend um 4 Einheiten nach oben verschoben.

Aufgabe 3:

a) $f(x) = 2\cdot\sin(\frac{1}{2}x) - 1$

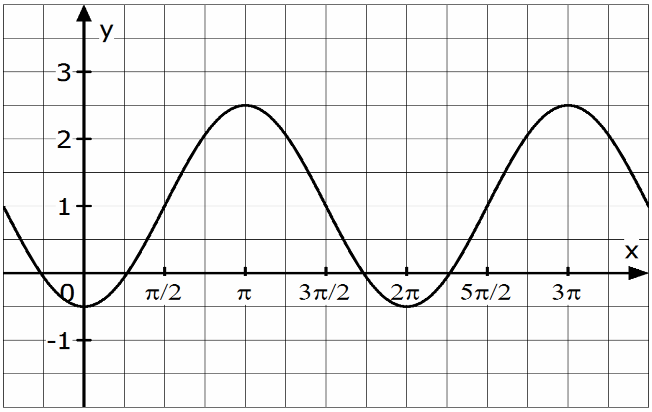
Amplitude ist 2, Schaubild ist um 1 nach unten verschoben und besitzt die Periode $p = \dfrac{2\pi}{b} = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.



b) $f(x) = -\frac{3}{2}\cdot\cos(x) + 1$

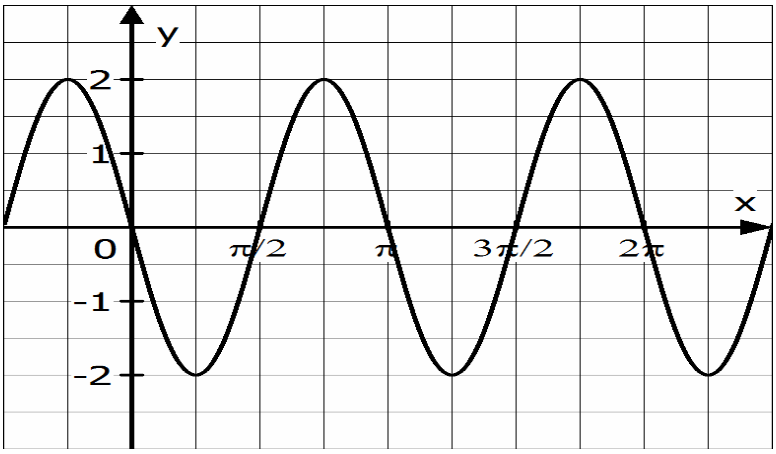
Schaubild besitzt Amplitude $\frac{3}{2}$ und ist um 1 nach oben verschoben.

Das negative Vorzeichen der Amplitude bedeutet dass das Schaubild noch zusätzlich an der x-Achse gespiegelt wird. Die Periode ist 2π.



c) $f(x) = 2 \cdot \sin(2x - \pi) = 2\sin(2(x - \frac{\pi}{2}))$

Die Amplitude ist 2, die Periode ist $\frac{2\pi}{2} = \pi$ und das Schaubild ist um π nach rechts verschoben.



Aufgabe 4:

Für die Schaubilder gibt es folgende Funktionsansätze:
$y = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$ bzw. $y = a \cdot \cos(b \cdot (x - c)) + d$

a) Amplitude a = 2
keine Verschiebung nach oben/unten, also d = 0
Periode = π, also $b = \frac{2\pi}{2} = \pi$
bei Kosinusfunktion: keine Verschiebung links/rechts: $y = 2 \cdot \cos(2x)$
bei Sinusfunktion: Verschiebung um $\frac{\pi}{4}$ nach links: $y = 2 \cdot \sin(2(x + \frac{\pi}{4}))$

b) Amplitude $a = \frac{1}{3}$
keine Verschiebung nach oben/unten, also d = 0

Periode = 6π , also $b = \frac{2\pi}{6\pi} = \frac{1}{3}$

bei Kosinusfunktion: Verschiebung um $\frac{3}{2}\pi$ nach links: $y = \frac{1}{3}\cos(\frac{1}{3}(x + \frac{3}{2}\pi))$

bei Sinusfunktion: Verschiebung um 3π nach links: $y = \frac{1}{3}\sin(\frac{1}{3}(x + 3\pi))$

c) Amplitude a = 2
Verschiebung um 1 nach unten, also d = -1
Periode = π , also $b = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

bei Kosinusfunktion: Verschiebung um $\frac{\pi}{8}$ nach rechts: $y = 2 \cdot \cos(2(x - \frac{\pi}{8})) - 1$

bei Sinusfunktion: Verschiebung um $\frac{\pi}{8}$ nach links: $y = 2 \cdot \sin(2(x + \frac{\pi}{8})) - 1$

d) Amplitude a = 4
Verschiebung um 1 nach oben, also d = 1
Periode = 4π , also $b = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$

bei Kosinusfunktion: Verschiebung um $\frac{2}{3}\pi$ nach links: $y = 4 \cdot \cos(\frac{1}{2}(x + \frac{2}{3}\pi)) + 1$

bei Sinusfunktion: Verschiebung um $\frac{5}{3}\pi$ nach links_ $y = 4 \cdot \sin(\frac{1}{2}(x - \frac{5}{3}\pi)) + 1$

Aufgabe 5:

Die allgemeine Stammfunktion von f(x) lautet $F(x) = -\cos(2x - \pi) \cdot \frac{1}{2} + C$

Nun muss C so gewählt werden, dass $F(\pi) = 5$ gilt: $F(\pi) = -\cos(\pi) \cdot \frac{1}{2} + C = \frac{1}{2} + C = 5$

also C = 4,5 und somit $F(x) = -\cos(2x - \pi) \cdot \frac{1}{2} + 4{,}5$ **.**

Aufgabe 6:

a) $\cos(2x) = 0$. Substituiere u = 2x.

$\cos(u) = 0 \Rightarrow u = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ = {…-3,-2,-1,0,1,2,…}

Rücksubstitution: $2x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$ sind die Lösungen für $x \in \mathbb{R}$

Lösung für $-\pi \le x \le \pi$:
Welche Werte können für k eingesetzt werden, damit x in dem Intervall liegt ?

k = 0: $x = \frac{\pi}{4}$ k = 1: $x = \frac{3}{4}\pi$ k = -1: $x = -\frac{\pi}{4}$ k = -2: $x = -\frac{3}{4}\pi$

also insgesamt 4 Lösungen.

b) $\sin^2(x)+\sin(x)-2=0$.
Substitution: u = sin(x).

$u^2+u-2=0 \Rightarrow u_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}$, also $u_1=1$ und $u_2=-2$

Rücksubstitution: $1=\sin(x) \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi$ mit $k\in\mathbb{Z}$ = {…-3,-2,-1,0,1,2,…}

$-2=\sin(x)$ liefert keine Lösung

$x=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi$ mit $k\in\mathbb{Z}$ sind Lösungen für $x\in\mathbb{R}$

Lösung für $-\pi\le x\le\pi$:
Welche Werte können für k eingesetzt werden, damit x in dem Intervall liegt ?

k = 0: $x=\frac{\pi}{2}$ ist einzige Lösung.

c) $\cos(x)=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$

$x=\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi$ (*) und $x=(2\pi-\frac{\pi}{4})+k\cdot 2\pi=\frac{7}{4}\pi+k\cdot 2\pi$ (**) mit $k\in\mathbb{Z}$
sind Lösungen für $x\in\mathbb{R}$

Lösung für $-\pi\le x\le\pi$:
Welche Werte können für k eingesetzt werden, damit x in dem Intervall liegt ?

Bei Lösungen (*): k = 0: $x=\frac{\pi}{4}$

Bei Lösungen (**): k= -1: $x=-\frac{\pi}{4}$

Aufgabe 7:

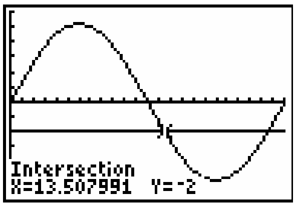
a) <u>Temperatur um 14 Uhr:</u>

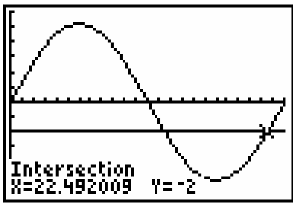
$T(6)=5{,}2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{12}\cdot 6\right)=5{,}2\ °C$

<u>Uhrzeit mit -2°C:</u>

$-2=5{,}2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{12}\cdot x\right)$

Lösung der Gleichung mit dem GTR:





Nach 13,5 Stunden, also um 21.30 Uhr sowie nach 22,5 Stunden, also um 6.30 Uhr beträgt die Temperatur -2°C.

b) Durchschnittstemperatur von 0 Uhr bis 24 Uhr entspricht dem Zeitraum t = -8 bis t = 16:

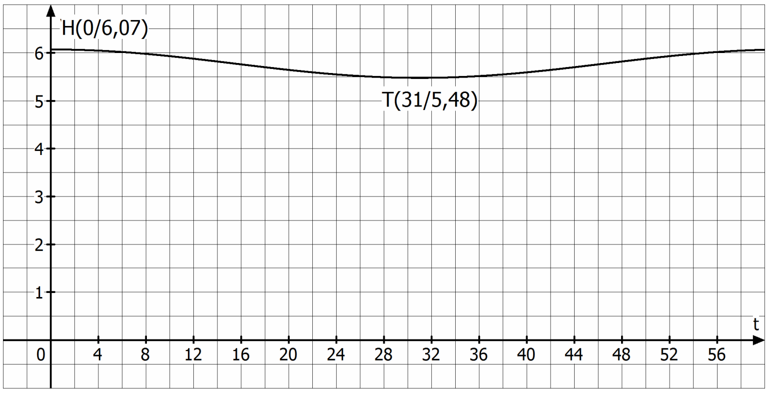
$$\frac{1}{24-0}\cdot\int_{-8}^{16} T(x)dx = 0\,°C \text{ (GTR).}$$

Aufgabe 8:

t sei die Zeit in Stunden seit dem 4.Januar um 8 Uhr.

Die aufzustellende Funktion beginnt bei t = 0 im Hochpunkt HP(0/6,07).
Der 5.Januar um 15 Uhr ist 31 Stunden später als der 4.Januar um 8 Uhr.
Der nächste Tiefpunkt liegt bei t = 31: TP(31/5,48).

Skizze des Verlaufs des Pegelstandes:



Da das Schaubild auf der y-Achse im Hochpunkt beginnt, sollte eine allgemeine Kosinusfunktion aufgestellt werden: $f(t) = a\cdot\cos(b\cdot t) + d$

Die Mittellinie des Schaubildes liegt bei $\frac{6{,}07+5{,}48}{2} = 5{,}775$.
Das Schaubild ist um d = 5,775 nach oben verschoben.
Die Amplitude beträgt $a = 6{,}07 - 5{,}775 = 0{,}295$.
Die Periode beträgt 62 (doppelte Entfernung vom Hochpunkt zum Tiefpunkt).
Damit gilt $b = \frac{2\pi}{62} = \frac{\pi}{31}$ und folglich ist $f(t) = 0{,}295\cdot\cos\left(\frac{\pi}{31}\cdot t\right) + 5{,}775$

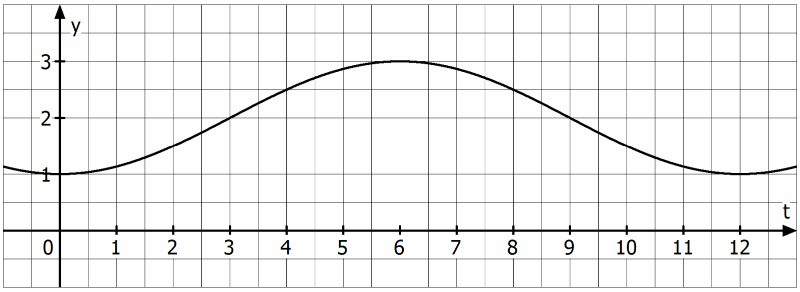
Pegelstand am 6.Januar 2003 um 12.00 Uhr:
Dies entspricht dem Zeitpunkt t = 52: $f(52) = 0{,}295\cdot\cos\left(\frac{\pi}{31}\cdot 52\right) + 5{,}775 = 5{,}93$ Meter
Mittlerer Pegelstand für 4.Januar zwischen 0.00 Uhr und 24.00 Uhr:

$$\frac{1}{16-(-8)}\cdot\int_{-8}^{24} f(t)dt = 5{,}98 \text{ Meter}$$

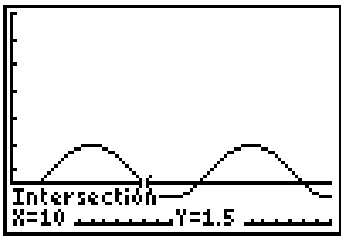
Aufgabe 9:

a) Die Mittellinie der Funktion liegt bei $\frac{1+3}{2} = 2$ Meter. Das heißt, dass das Schaubild um 2 Einheiten nach oben verschoben wurde, also a = 2.
Die Amplitude ist der Abstand vom Hochpunkt bzw. Tiefpunkt von der Mittellinie, also $|b| = 1$. Nun ist die Frage, ob b = 1 oder b = -1 gilt.
Da an der Stelle t = 0 (auf der y-Achse) ein Tiefpunkt der Funktion vorliegen soll, muss b = -1 sein: $h(t) = 2 - \cos\left(\frac{1}{6}\pi \cdot t\right)$

Skizze:

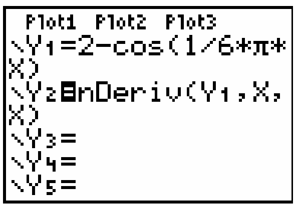


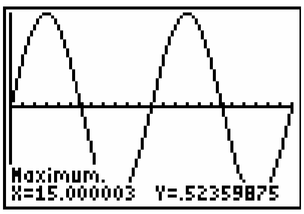
b) Gesucht sind die Schnittpunkte von h(t) mit der waagrechten Gerade y = 1,5 innerhalb von 24 Stunden.
Die Lösungen liefert der GTR: t = 2 und t = 10 und t = 14 und t = 22.



Der Wasserpegel liegt unterhalb von 1,5 m im Intervall [0;2] und [10;14] und [22;24], also insgesamt 8 Stunden.

c) Der Punkt des maximalen Anstiegs je Minute entspricht dem Wendepunkt des Schaubildes.





An der Stelle t = 15 ist der Anstieg maximal, d.h. bei t = 15 besitzt das Schaubild von h einen Wendepunkt mit maximaler Steigung.
Die maximale Steigung ist gemäß GTR 0,524 Meter pro Stunde.
Die maximale Änderungsrate beträgt 52,4 Zentimeter pro Stunde und damit $\frac{52,4}{60} \approx 0,873$ Zentimeter pro Minute.

d) Niedrigwasser bei t = 0 , Hochwasser bei t = 6.
Das zweite Drittel dieser Zeitspanne wäre das Intervall [2;4].

Es gilt: $h(4) - h(2) = 2{,}5 - 1{,}5 = 1$ Meter.
Die Gesamtzunahme zwischen Niedrig- und Hochwasser beträgt 2 m.
Da 1 Meter die Hälfte der Gesamtzunahme ist, ist die Faustregel korrekt.