Mathematik - Oberstufe

Pflicht- /Wahlteilaufgaben und Musterlösungen zur Integralrechnung

Zielgruppe: Oberstufe Gymnasium

Schwerpunkt: Stammfunktion, Flächenberechnung, Rotationsvolumen

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Letzte Aktualisierung: Dezember 2009

Datei: Pflicht- und Wahlteilaufgaben zur Integralrechnung

Pflichtteilaufgaben zur Integralrechnung

Aufgabe 1:
Gib jeweils eine Stammfunktion an:

a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Aufgabe 2:
Ermittle eine Stammfunktion für

a) $f(x) = \frac{1}{x^{n-2}}$

Für welche Zahl $n \in \mathbb{N}$ lässt sich nach der Potenzregel keine Stammfunktion von f angeben ?

b) $f(x) = \frac{2x^3 - 8x^2 + 1}{4x^2}$ Gib F(x) vereinfacht an.

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x+5}}$ Gib F(x) vereinfacht und wieder mit Wurzel an.

Aufgabe 3:
Gib eine Stammfunktion an:

a) $f(x) = -\sin(x)$ b) $f(x) = (x+6)^7$ c) $f(x) = x^3 - \cos(x)$

d) $f(x) = \frac{1}{3}(4-x)^4$ e) $f(x) = 6x^4 - 4x^3 + 13$ f) $f(x) = -2(4x+1)^3$

g) $f(x) = -\frac{4}{x^2} + \pi$ h) $f(x) = 15 \cdot (\frac{1}{3}x + 6)^{-5}$ i) $f(x) = 2x - \frac{1}{4\sqrt{x}}$

j) $f(x) = -\sin(\frac{1}{3} - \frac{x}{4})$ k) $f(t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{t^2}$ l) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+2}}$

Aufgabe 4:

Die Integralfunktion I ist für alle reellen Zahlen definiert durch $I(x) = \int_1^x (2t+1)dt$.

Entscheide, welche der Aussagen wahr sind und begründe deine Entscheidung.

a) $I(x) = 2 \cdot \int_1^x t dt + x - 1$ b) $I(1) = 0$ c) $I'(x) = 2x + 1$

d) Die Funktion I ist im ganzen Definitionsbereich monoton wachsend.

Aufgabe 5:
Bestimme den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse über dem Intervall [a;b]. (Tipp: Eine Skizze im Vorfeld (ohne GTR) ist hier nicht verkehrt).

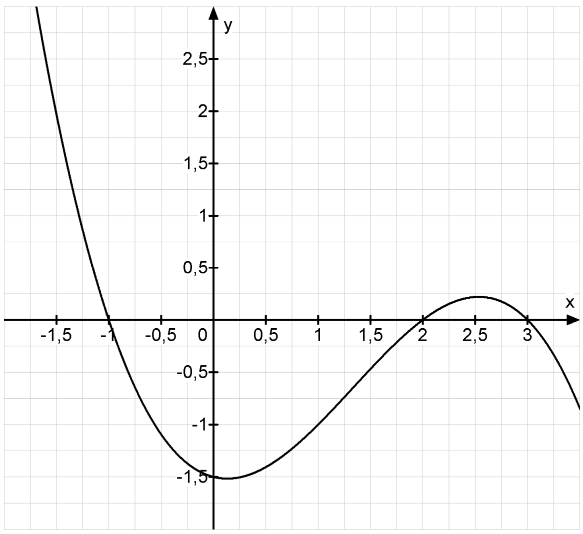
a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$; [-1 ; 2]   b) $f(x) = -x^3$; [1 ; 2]

c) $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$; [-3 ; 3]   d) $f(x) = x^3 - 4x$; [-1 ; 2]

Aufgabe 6:
Für welchen Wert von a gilt:

a) $\int_{2}^{a} \frac{1}{2}x^2 dx = 34\frac{2}{3}$ b) $\int_{0}^{a} (x-a)(x+a)dx = 3$

Aufgabe 7:
In untenstehendem Koordinatensystem ist das Schaubild einer Funktion f eingezeichnet.
Skizziere das Schaubild einer Stammfunktion F von f in diesem Koordinatensystem.



Wahlteilaufgaben zur Integralrechnung

Aufgabe 8:
Bestimme mit Hilfe des GTR (Dokumentiere deine Vorgehensweise):

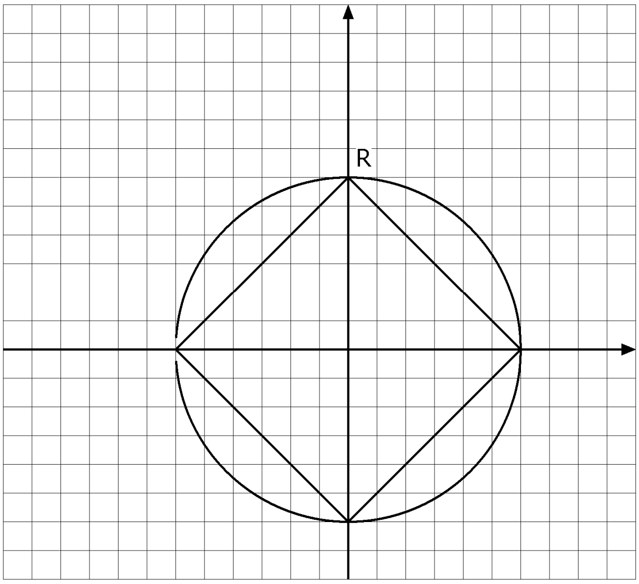
a) Den Flächeninhalt zwischen dem Schaubild von $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}x - 3$ und der x-Achse.

b) Den Flächeninhalt zwischen den Schaubildern der Funktionen $f(x) = x^3 + x^2 + 0{,}25x$ und $g(x) = 1{,}5x^2 + 3{,}25x$

Aufgabe 9:
In einen Kreis mit dem Radius R ist ein Quadrat einbeschrieben (siehe Abbildung unten). Die Flächenstücke zwischen dem Kreis und dem Quadrat rotieren u eine Diagonale des Quadrats (x-Achse).
Gesucht ist das Volumen des zugehörigen Drehkörpers.

a) Beschreibe zwei unterschiedliche Lösungsmöglichkeiten.

b) Berechne das Volumen mit Hilfe der Integralrechnung über geeignete Randfunktionen.



Aufgabe 10:

Die Fläche zwischen dem Schaubild von f mit $f(x)=\frac{2}{x\cdot\sqrt{x}}$ und der x-Achse über dem angegebenen Intervall rotiert um die x-Achse. Untersuche, ob der entstehende Drehkörper einen endlichen Rauminhalt hat; gib diesen gegebenenfalls an:

a) $x\in[2;\infty[$ b) $x\in]0;1]$

Aufgabe 11:

Die Punkte A(0/3), B(6/1), C(6/2) und D(0/5) bilden ein Trapez. Die Trapezfläche rotiert um die x-Achse. Berechne das Volumen des dabei entstehenden Drehkörpers.

Aufgabe 12:

Ein Wasser führender Stollen hat einen parabelförmigen Querschnitt von 6 m Sohlenbreite und 4,5 m Scheitelhöhe.

Wie viel m³ Wasser kann der Stollen in 1 Sekunde führen bei einer Füllung bis zu drei Fünftel der Scheitelhöhe und einer Höchstgeschwindigkeit des Wassers von 4 m/s ?

Aufgabe 13:

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x)=-x^3+4x$ mit D = $\mathbb{R}$. Ihr Schaubild schließt mit der positiven x-Achse eine Fläche ein. Gesucht wird eine Gerade mit der Gleichung y = mx, die diese Fläche halbiert.

Aufgabe 14:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x$ und ihre Kurve K.

a) Bestimme die Gleichung der Tangente t im Hochpunkt von K.
b) Bestimme den Inhalt der Fläche, die K und die Tangente t miteinander einschließen.
c) Für welche(n) Wert(e) von a hat die von den senkrechten Geraden x = 1 und x = a, der Tangente t und K eingeschlossene Fläche den Flächeninhalt 1 ?
d) Prüfe, ob für $a\to\infty$ ein Grenzwert existiert.

Aufgabe 15:

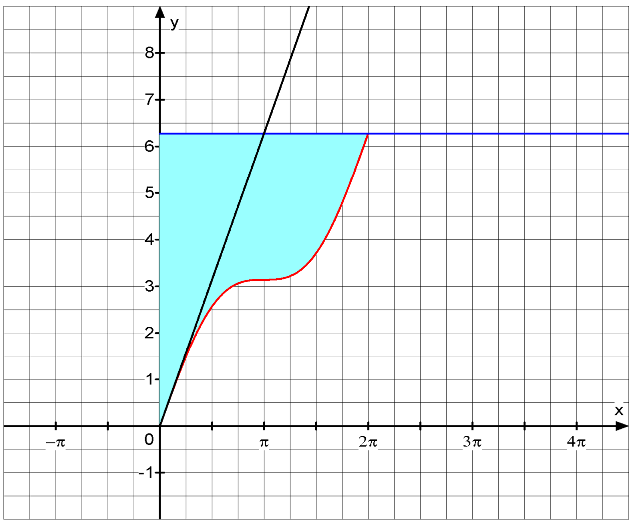
Gegeben sind die Funktionen f, g und h mit $f(x) = x^2 - 3x + 3$, $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{3}{2}$ und $h(x) = x - 1$. Durch ihre Schaubilder werden verschiedene Flächen eingeschlossen. Genau zwei dieser Flächenstücke werden durch alle drei Schaubilder begrenzt. Welchen Inhalt haben diese beiden Flächenstücke zusammen ?

Aufgabe 16:

Wie groß ist die Fläche, die das Schaubild von f mit $f(x) = x^4 - 2x$ mit der Normalen im Punkt $P(\frac{1}{4} / f(\frac{1}{4}))$ einschließt ? Bestimme den Flächeninhalt auf zwei Dezimalen gerundet.

Aufgabe 17:

Das Bild zeigt die Funktion $f(x) = x + \sin(x)$ im Bereich $0 \le x \le 2\pi$ sowie die Gerade mit der Gleichung $y = 2\pi$ und die Tangente an das Schaubild von f im Ursprung.



a) Berechne $\int_0^1 f(x)dx$ und $\int_0^{\pi} f(x)dx$.

b) Berechne den Inhalt des markierten Flächenstücks.

c) In welchem Verhältnis teilt die waagrechte Tangente an das Schaubild von f das Flächenstück aus Teilaufgabe b) ?

d) In welchem Verhältnis teilt die Tangente im Ursprung das Flächenstück aus Teilaufgabe b) ?

Aufgabe 18:

Durch $f_t(x) = \frac{1}{4}x^4 - t^2x^2$ ist für $t \ge 0$ eine Funktionenschar gegeben.

a) Lasse dir die Schaubilder G_t für die Werte t = 0 ; t = 0,5 ; t = 1 ; t = 1,5 zeichnen.

b) Berechne die Gleichung der Kurve T, auf der alle Tiefpunkte der Schar liegen.

c) Berechne den Inhalt des Flächenstücks zwischen der Verbindungsstrecke der Tiefpunkte einer Scharkurve und der Kurve T.
d) In welchem Verhältnis teilt G_t die in c) berechnete Fläche ?

Aufgabe 19:

Die Temperatur eines Tages verlaufe nach der Gleichung $y = 15 - \frac{1}{20}(x-14)^2$.

Dabei bedeute y die Temperatur in ℃ und x die Zeit in Stunden, beginnend um 0 Uhr bei x = 0.
a) Berechne die mittlere Tagestemperatur.
b) Berechne die mittlere Temperatur zwischen 0 Uhr und 12 Uhr.
c) Berechne die mittlere Temperatur zwischen 12 Uhr und 24 Uhr.

Lösung Pflichtteilaufgaben zur Integralrechnung

Aufgabe 1:

a) $F(x) = x^3 - x^2 + x$ b) $f(x) = x^{-2} \Rightarrow F(x) = -1 \cdot x^{-1} = -\frac{1}{x}$

Aufgabe 2:

a) $f(x) = x^{-n+2} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{-n+3} x^{-n+3}$

Für n = 3 kann keine Stammfunktion angegeben werden.

(Hinweis: Für die Funktion $f(x) = x^{-1}$ gibt es eine eigene Stammfunktion F(x) = ln(x)).

b) $f(x) = \frac{2x^3}{4x^2} - \frac{8x^2}{4x^2} + \frac{1}{4x^2} = \frac{1}{2}x - 2 + \frac{1}{4}x^{-2} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x - \frac{1}{4}x^{-1}$

c) $f(x) = (4x+5)^{-0,5} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{0,5}(4x+5)^{0,5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4x+5}$

Aufgabe 3:

a) $F(x) = \cos(x)$ b) $F(x) = \frac{1}{8}(x+6)^8$ c) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \sin(x)$

d) $F(x) = -\frac{1}{15}(4-x)^5$ e) $F(x) = \frac{6}{5}x^5 - x^4 + 13x$

f) $F(x) = -\frac{2}{4}(4x+1)^4 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}(4x+1)^4$

g) $f(x) = -\frac{4}{x^2} + \pi = -4x^{-2} + \pi \Rightarrow F(x) = 4x^{-1} + \pi \cdot x = \frac{4}{x} + \pi \cdot x$

h) $F(x) = \frac{15}{-4} \cdot (\frac{1}{3}x+6)^{-4} \cdot 3 = -11{,}25 \cdot (\frac{1}{3}x+6)^{-4}$

i) $f(x) = 2x - \frac{1}{4\sqrt{x}} = 2x - \frac{1}{4}x^{-0,5} \Rightarrow F(x) = x^2 - \frac{1}{2}x^{0,5} = x^2 - \frac{1}{2}\sqrt{x}$

j) $F(x) = \cos(\frac{1}{3} - \frac{x}{4}) \cdot (-4) = -4 \cdot \cos(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}x)$

k) $f(t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{t^2} = \frac{1}{2}t - t^{-2} \Rightarrow F(t) = \frac{1}{4}t^2 + t^{-1} = \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{t}$

l) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+2}} = (3x+2)^{-0,5} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{0,5} \cdot (3x+2)^{0,5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3x+2}$

Aufgabe 4:

Es gilt $I(x) = \int_1^x (2t+1)dt = [t^2+t]_1^x = x^2 + x - (1+1) = x^2 + x - 2$

a) $I(x) = 2 \cdot \int_1^x t\,dt + x - 1 = 2 \cdot \left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^x + x - 1 = 2 \cdot (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}) + x - 1 = x^2 - 1 + x - 1 = x^2 + x - 2$

also ist Aussage a) richtig.

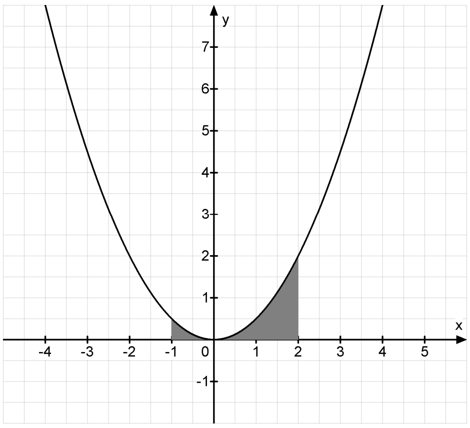
b) Die Aussage I(1) = 0 ist richtig, wie man leicht zu Einsetzen nachprüfen kann.

c) Es gilt $I'(x) = 2x + 1$, also ist c) richtig.

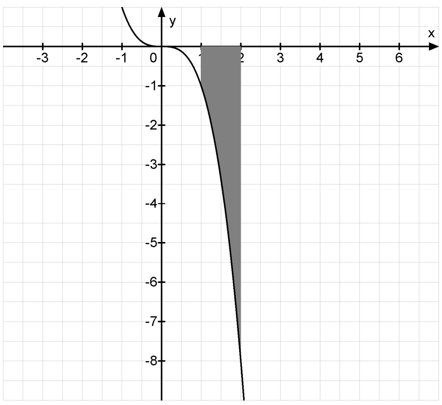
d) Bei dem Schaubild der Funktion I handelt es sich um eine nach oben geöffnete Parabel. Diese Parabel ist links vom Scheitelpunkt streng monoton fallend und rechts vom Scheitelpunkt streng monoton steigend. Also ist die Aussage d) falsch.

Aufgabe 5:

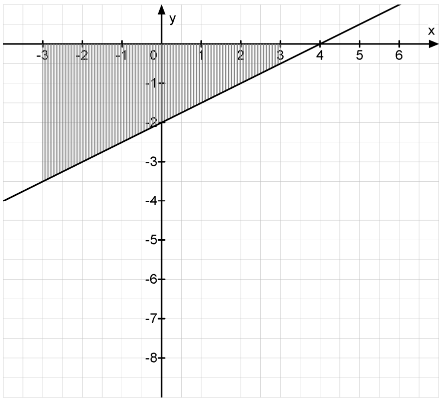
a) $A = \int_{-1}^{2} \frac{1}{2}x^2 dx = \left[\frac{1}{6}x^3\right]_{-1}^{2} = \frac{8}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{2}$



b) $A = \left|\int_{1}^{2} -x^3 dx\right| = \left|\left[-\frac{1}{4}x^4\right]_{1}^{2}\right| = \left|-4-(-0{,}25)\right| = 3{,}75$



c) $A = \left|\int_{-3}^{3} (\frac{1}{2}x - 2)dx\right| = \left|\left[\frac{1}{4}x^2 - 2x\right]_{-3}^{3}\right| = \left|\frac{9}{4} - 6 - (\frac{9}{4} + 6)\right| = 12$



Hinweis: Man hätte die Trapezfläche auch ohne Integralrechnung berechnen können.

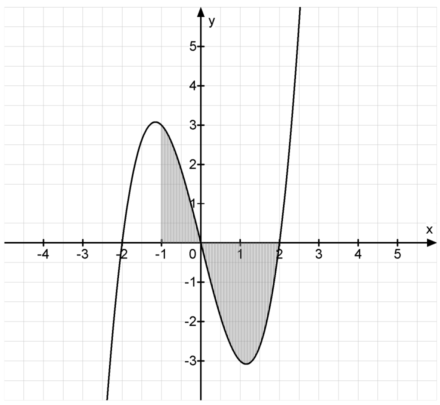
d) Berechnung der Schnittstellen von f(x) mit der x-Achse:
$f(x) = x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x \cdot (x^2 - 4) = 0$
Diese Gleichung besitzt die Lösungen x = -2 ; x = 0 und x = 2.

Die Fläche muss über zwei Integrale berechnet werden, da die Flächen teilweise oberhalb und teilweise unterhalb der x-Achse verlaufen. Dies erkennt man daran, dass innerhalb des Integrationsintervalls Nullstellen von f liegen.

$$A_1 = \int_{-1}^{0} (x^3 - 4x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_{-1}^{0} = 0 - (0{,}25 - 2) = 1{,}75$$

$$A_2 = \int_{0}^{2} -(x^3 - 4x)dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^2\right]_{0}^{2} = -4 + 8 - 0 = 4$$

Gesamtfläche A = 1,75 + 4 = 5,75



Aufgabe 6:

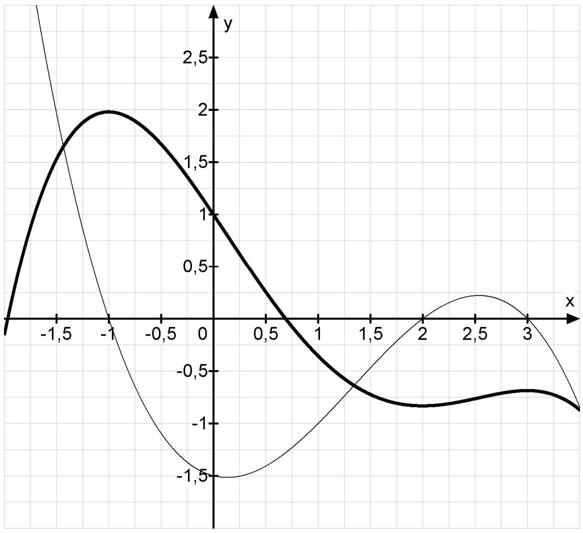
a) $\int_{2}^{a} \frac{1}{2}x^2 dx = 34\frac{2}{3} \Rightarrow \left[\frac{1}{6}x^3\right]_2^a = \frac{1}{6}a^3 - \frac{4}{3} = 34\frac{2}{3} \Rightarrow a^3 = 216 \Rightarrow a = 6$

b) $\int_0^a (x-a)(x+a)dx = 3 \Rightarrow \int_0^a (x^2 - a^2)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - a^2x\right]_0^a = \frac{1}{3}a^3 - a^3 = -\frac{2}{3}a^3 = 3$

$\Rightarrow a = -\sqrt[3]{4{,}5}$

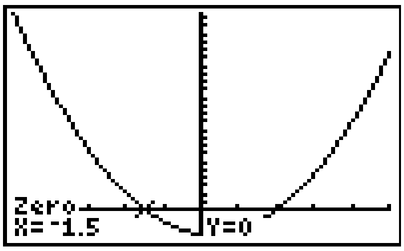
Aufgabe 7:

Das fett eingezeichnete Schaubild, das die Stammfunktion F darstellt, könnte auch beliebig nach oben oder unten verschoben werden. Es gibt somit unendlich viele Möglichkeiten, die Stammfunktion F zu skizzieren.



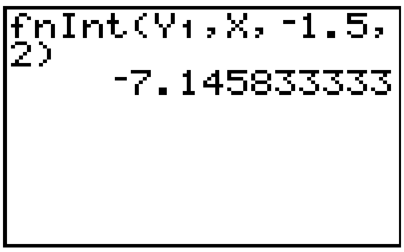
Aufgabe 8:

a) Zeichnung des Schaubildes mit Hilfe des GTR und Ermittlung der Schnittpunkte mit der x-Achse:



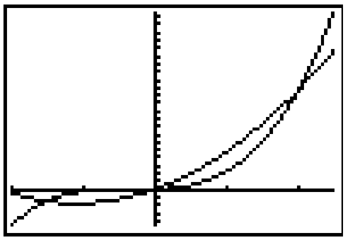
Schnittpunkte sind $N_1(-1{,}5\,/\,0)$ und $N_2(2\,/\,0)$

Fläche mit dem GTR mit folgenden Befehlen:



Die Funktionsgleichung ist unter Y1 abgespeichert. Die Fläche beträgt somit A = 7,146 Flächeneinheiten.

b) Für die Flächenberechnung zwischen den Schaubildern müssen die Schnittpunkte der Schaubilder ermittelt werden:



Als Schnittstellen ergeben sich mit dem GTR: x= -1,5 und x = 0 und x = 2.

Die Fläche wird nun folgendermaßen berechnet:

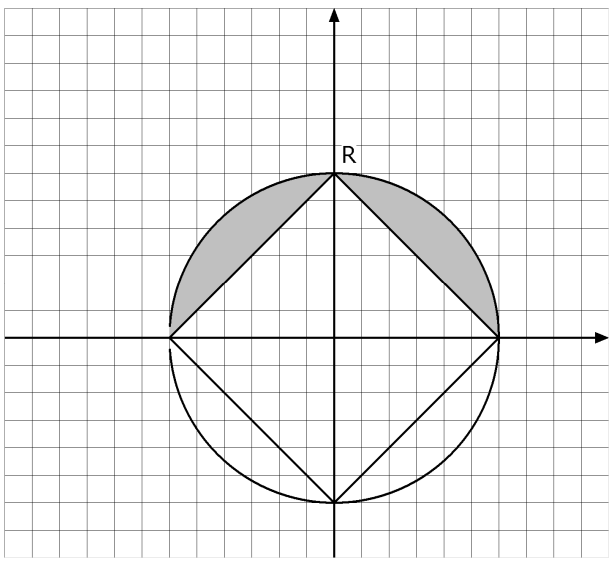
$$A = \int_{-1,5}^{0} (f(x) - g(x))dx + \int_{0}^{2} (g(x) - f(x))dx$$

Mit Y1 = f(x) und Y2 = g(x) ergibt sich mit dem GTR:

```
fnInt(Y1-Y2,X,-1
.5,0)
            1.546875
fnInt(Y2-Y1,X,0,
2)
         3.333333333
```

Die gesamte Fläche beträgt 1,547 + 3,333 = 4,88

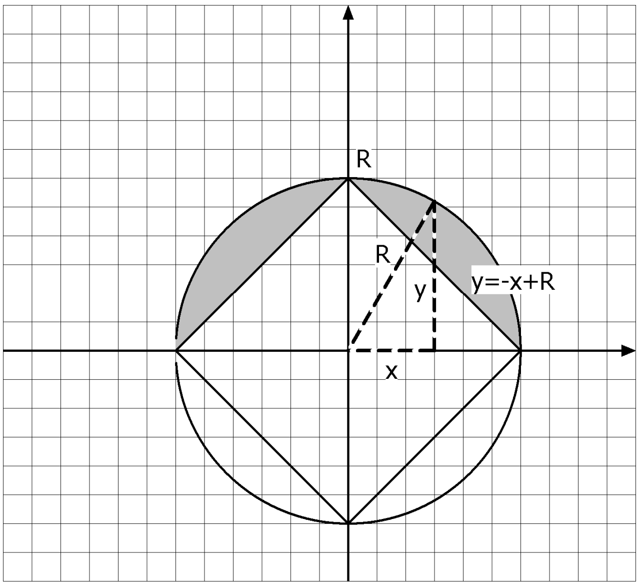
Aufgabe 9:
Aus der Aufgabenstellung ergibt sich, dass das Volumen des Körpers, der sich durch die Rotation der schraffierten Flächenstücke um die x-Achse ergibt, berechnet werden soll:



a) und b) Das Volumen kann auf zwei verschiedene Arten berechnet werden:

<u>1.Methode:</u>
Bei der Randkurve handelt es sich um einen Halbkreis, so dass die Rotation des Halbkreises um die x-Achse eine Kugel mit Radius r ergibt, deren Volumen aus der Formelsammlung entnommen werden kann ($V_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$)
Die Rotation des gleichschenkligen Dreiecks oberhalb der x-Achse ergibt einen Doppelkegel mit Radius r und Höhe h = r. Auch dessen Volumen kann aus der Formelsammlung entnommen werden. ($2 \cdot V_{Kegel} = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot h = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot R^3$)
Das Volumen des gesuchten Körpers ist nun eine Kugel, aus der ein Doppelkegel herausgebohrt wurde.
Das Volumen dieses Körpers beträgt $V = V_{Kugel} - 2 \cdot V_{Kegel} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot R^3$.

<u>2.Methode:</u>
Das Volumen kann mit Hilfe der Rotationsformel der Integralrechnung berechnet werden. Hierzu genügt es aus Symmetriegründen, die Fläche im 1.Quadrant zwischen x = 0 und x = R um die x-Achse rotieren zu lassen.
Die untere Randkurve ist hierbei die Gerade y = -x + R.
Die obere Randkurve ist ein Teilstück eines Kreises mit Radius R.
Die Funktionsgleichung der oberen Randkurve kann mit Hilfe des Satzes von Pythagoras hergeleitet werden:

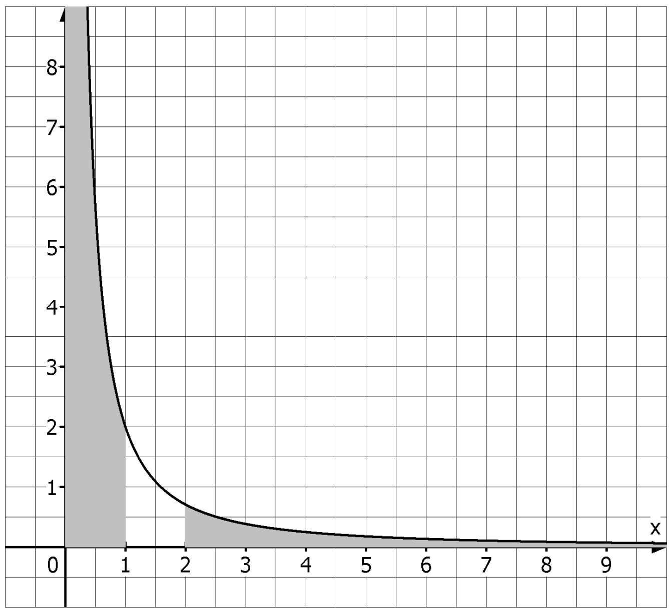


Aus dem rechtwinkligen Dreieck ergibt sich: $R^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow y = \sqrt{R^2 - x^2}$
Also ist die Funktionsgleichung der oberen Randkurve $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$
Als Volumen ergibt sich somit:

$$V = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^R ((\sqrt{R^2 - x^2})^2 - (-x+R)^2)dx = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^R (R^2 - x^2 - (x^2 - 2Rx + R^2))dx = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^R (-2x^2 + 2Rx)dx$$

$$= 2\pi \cdot \left[-\frac{2}{3}x^3 + Rx^2 \right]_0^R = 2\pi \cdot (-\frac{2}{3}R^3 + R^3) = \frac{2}{3}\pi \cdot R^3$$

Aufgabe 10:



a) Da das Intervall nach rechts offen ist, muss für die obere „unendliche“ Grenze eine Variable z benutzt werden:

$$V(z) = \pi \cdot \int_2^z \left(\frac{2}{x \cdot \sqrt{x}} \right)^2 dx = \pi \cdot \int_2^z \frac{4}{x^3} dx = \pi \cdot \int_2^z 4 \cdot x^{-3} dx = \pi \cdot \left[-2 \cdot x^{-2} \right]_2^z = \pi \cdot (-2 \cdot z^{-2} - (-2 \cdot 2^{-2}))$$

$$= \pi \cdot \left(-\frac{2}{z^2} + \frac{1}{2}\right)$$

Für $z \to \infty$ gilt $V(z) \to \pi \cdot \left(0 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\pi$, also besitzt der Drehkörper einen endlichen Rauminhalt.

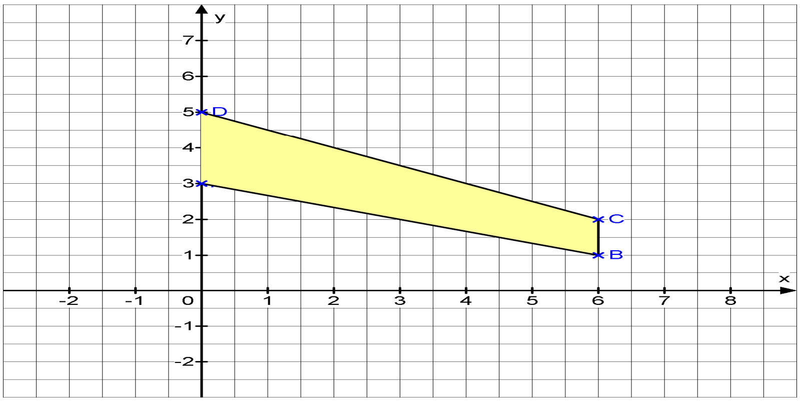
b) Da die Randfunktion f(x) an der Stelle x = 0 nicht definiert ist, muss für diese Grenze eine Variable z benutzt werden:

$$V(z) = \pi \cdot \int_z^1 \left(\frac{2}{x \cdot \sqrt{x}} \right)^2 dx = \pi \cdot \int_z^1 \frac{4}{x^3} dx = \pi \cdot \int_z^1 4 \cdot x^{-3} dx = \pi \cdot \left[-2 \cdot x^{-2} \right]_z^1 = \pi \cdot (-2 \cdot 1^{-2} - (-2 \cdot z^{-2}))$$

$$= \pi \cdot \left(-2 + \frac{2}{z^2}\right)$$

Für $z \to 0$ gilt $V(z) \to \infty$, also besitzt der Drehkörper keinen endlichen Rauminhalt.

Aufgabe 11:



Für die Berechnung des Volumens müssen die Geradengleichungen, die die Trapezfläche nach oben und nach unten begrenzen, ermittelt werden.

Obere Gerade (durch C und D):

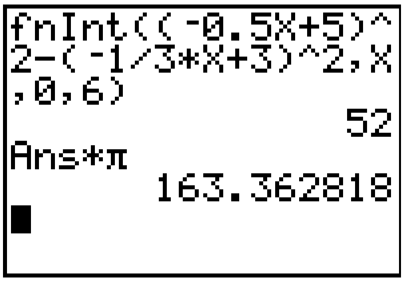
Steigung $m = \frac{5-2}{0-6} = -\frac{1}{2}$ und damit aus dem Schaubild $y = -\frac{1}{2}x + 5$

Untere Gerade (durch A und B):

Steigung $m = \frac{3-1}{0-6} = -\frac{1}{3}$ und damit aus dem Schaubild $y = -\frac{1}{3}x + 3$

Volumen = $\pi \cdot \int_0^6 \left((-\frac{1}{2}x+5)^2 - (-\frac{1}{3}x+3)^2 \right) dx$

GTR:

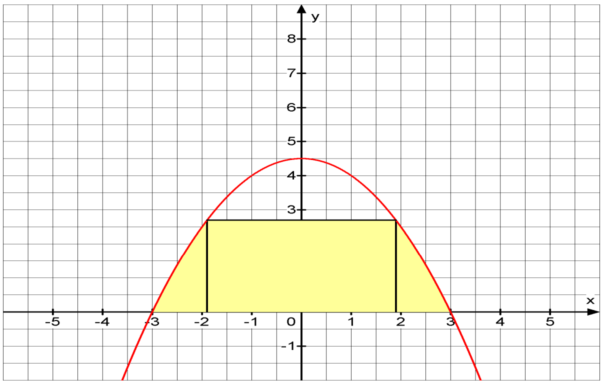


Das Volumen beträgt also 163,36 Volumeneinheiten.

Aufgabe 12:

Im ersten Schritt muss die Funktionsgleichung der Parabel ermittelt werden.

Skizze:



Ansatz für Parabelgleichung: $f(x) = a(x-3)(x+3)$ (da Nullstellen x = 3 und x = -3 bekannt sind)
Einsetzen des bekannten Punktes P(0/4,5): $4{,}5 = a \cdot (-9) \Rightarrow a = -0{,}5$

Parabelgleichung: $f(x) = -0{,}5(x-3)(x+3) = -0{,}5x^2 + 4{,}5$

Außerdem ist die Querschnittsfläche nach oben durch y = 2,7 (drei Fünftel von 4,5) abgegrenzt.
Für die Berechnung der Querschnittsfläche werden die Schnittpunkte der Gerade y = 2,7 mit dem Schaubild von f benötigt:

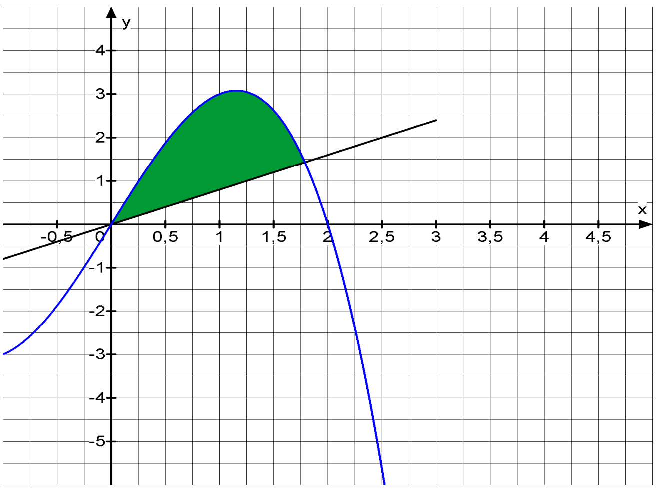
$-0{,}5(x-3)(x+3) = 2{,}7 \Rightarrow -0{,}5x^2 + 4{,}5 = 2{,}7 \Rightarrow x^2 = 3{,}6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3{,}6}$

Querschnittsfläche = $A_{Rechteck} + 2 \cdot \int_{-3}^{-\sqrt{3{,}6}} (-0{,}5x^2 + 4{,}5)dx = 2 \cdot \sqrt{3{,}6} \cdot 2{,}7 + 2 \cdot 1{,}6 = 13{,}45$ m²

(Berechnung mit GTR)

Wasservolumen pro Sekunde: $13{,}45 \cdot 4 = 53{,}8$ m³

Aufgabe 13:



Zunächst wird die komplette Fläche zwischen dem Schaubild von f und der x-Achse berechnet:

Das Schaubild von f schneidet die positive x-Achse bei x = 0 und x = 2.

$$A = \int_0^2 (-x^3 + 4x)dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^2\right]_0^2 = -4 + 8 = 4 \text{ FE}$$

Die markierte Fläche soll nun halb so groß – also 2 FE – sein.

Zunächst muss der Schnittpunkt der Gerade y = mx mit dem Schaubild von f ermittelt werden:

$$-x^3 + 4x = mx \Leftrightarrow x(-x^2 + 4 - m) = 0$$

Daraus folgt x = 0 oder $x^2 = 4 - m \Rightarrow x = \pm\sqrt{4-m}$, wobei hier nur die positive Lösung in Frage kommt.

$$A_{\text{markiert}} = \int_0^{\sqrt{4-m}} (-x^3 + 4x - mx)dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 - \frac{1}{2}mx^2\right]_0^{\sqrt{4-m}}$$

$$= -\frac{1}{4}(4-m)^2 + 2(4-m) - \frac{1}{2}m(4-m) = 2$$

$$\Rightarrow -4 + 2m - 0{,}25m^2 + 8 - 2m - 2m + 0{,}5m^2 = 2$$

$$\Rightarrow 0{,}25m^2 - 2m + 2 = 0 \Rightarrow m_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-2}}{0{,}5}$$

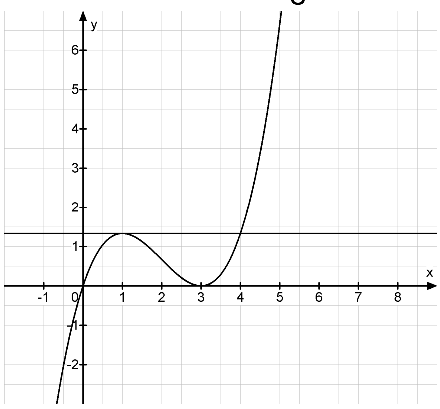
Also $m_1 = 4 + 2\cdot\sqrt{2} \approx 6{,}83$ und $m_2 = 4 - 2\cdot\sqrt{2} \approx 1{,}17$

Die erste Lösung scheidet aus, da ansonsten die Wurzel negativ wäre.
Also ist m = 1,172 und die Gerade lautet $y = (4 - 2\sqrt{2})x$.

Aufgabe 14:

a) Mit dem GTR kann man ermitteln: Der Hochpunkt von K hat die Koordinaten $H(1/\frac{4}{3})$.

Die Tangentengleichung im Hochpunkt lautet $y = \frac{4}{3}$ (waagrechte Tangente).



b) Mit dem GTR kann man die zweite Schnittstelle der Tangente mit dem Schaubild von K berechnen: $S(4/\frac{4}{3})$.

Eingeschlossene Fläche: $A = \int_1^4 \left(\frac{4}{3} - \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right)\right)dx = 2{,}25$ (GTR)

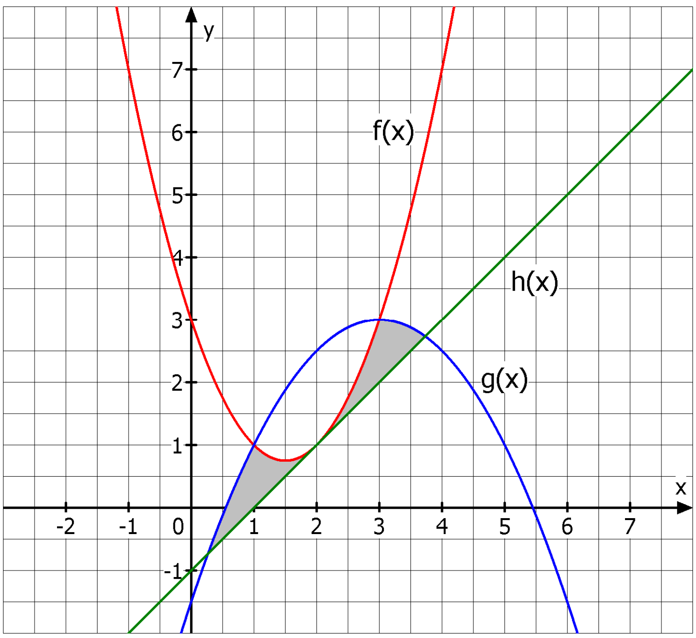
c) $A = \int_1^a \left(\frac{4}{3} - \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right)\right)dx = \left[\frac{4}{3}x - \frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_1^a$

$= \frac{4}{3}a - \frac{1}{2}a^4 + \frac{2}{3}a^3 - \frac{3}{2}a^2 - \frac{5}{12} = 1 \Rightarrow a = 2{,}746$ oder $a = 4{,}78$ (GTR)

Der Wert von a = 4,78 kommt dadurch zustande, dass positive und negative Integralwerte sich gegenseitig aufheben.

d) Für $a \to \infty$ gilt $A \to -\infty$, damit existiert ein Grenzwert nicht.

Aufgabe 15:



Schnittstellen des Schaubildes von g mit h: x = 0,268 und x = 3,73
Schnittstelle des Schaubildes f mit g: x = 1 und x = 3

Linke Fläche: $A_1 = \int_{0,268}^{1} ((g(x) - h(x))dx + \int_1^2 (f(x) - h(x))dx = 0{,}3987 + 0{,}3333 = 0{,}732$

Rechte Fläche: $A_2 = \int_2^3 ((f(x) - h(x))dx + \int_3^{3,73} (g(x) - h(x))dx = 0{,}3333 + 0{,}3987 = 0{,}732$

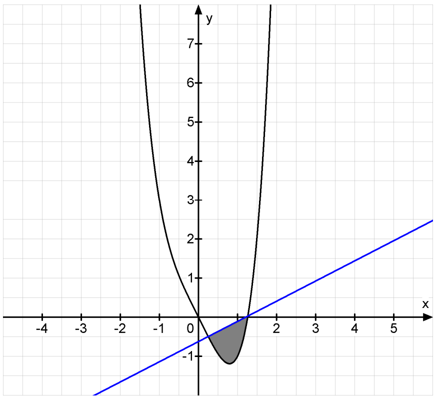
Beide Flächen haben einen gemeinsamen Inhalt von 1,464.

Aufgabe 16:

Bestimmung der Normalengleichung: $f'(x) = 4x^3 - 2 \Rightarrow f'(0{,}25) = -\frac{31}{16} \Rightarrow m_{Norm} = \frac{16}{31}$

Die Normale verläuft durch den Punkt $P(\frac{1}{4} / -\frac{127}{256})$.

Normalengleichung: $y + \frac{127}{256} = \frac{16}{31}(x - \frac{1}{4}) \Rightarrow y = \frac{16}{31}x - \frac{4961}{7936} \Rightarrow y = 0{,}5161x - 0{,}625$



Die Normale schneidet das Schaubild von f bei x = 0,25 und bei x = 1,2645 (GTR).

$$A = \int_{0{,}25}^{1{,}2645} (0{,}5161x - 0{,}625 - (x^4 - 2x))dx = 0{,}65$$

Aufgabe 17:

a) $\int_0^1 f(x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \cos(x)\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \cos(1) - (0 - \cos(0)) = 1{,}5 - \cos(1) = 0{,}96$

$\int_0^{\pi} f(x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \cos(x)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\pi^2 - \cos(\pi) - (0 - \cos(0)) = 0{,}5\pi^2 + 2 = 6{,}93$

b) Flächenstück =

$$\int_0^{2\pi} (2\pi - (x + \sin(x))dx = \left[2\pi \cdot x - \frac{1}{2}x^2 + \cos(x)\right]_0^{2\pi} = 4\pi^2 - 2\pi^2 + \cos(2\pi) - \cos(0) = 2\pi^2$$

c) Punkt mit waagrechter Tangente im Bereich $0 \le x \le 2\pi$:

$f'(x) = 1 + \cos(x) = 0 \Rightarrow \cos(x) = -1 \Rightarrow x = \pi$ (was man auch anschaulich erkennt)

Der Punkt mit waagrechter Tangente besitzt die Koordinaten $P(\pi / \pi)$.

Die Gleichung der waagrechten Tangente lautet $y = \pi$.

Fläche unterhalb der waagrechten Tangente =

$$\int_0^{\pi} (\pi - (x + \sin(x)))dx = \left[\pi \cdot x - \frac{1}{2}x^2 + \cos(x)\right]_0^{\pi} = \pi^2 - \frac{1}{2}\pi^2 + \cos(\pi) - \cos(0) = 0{,}5\pi^2 - 2$$

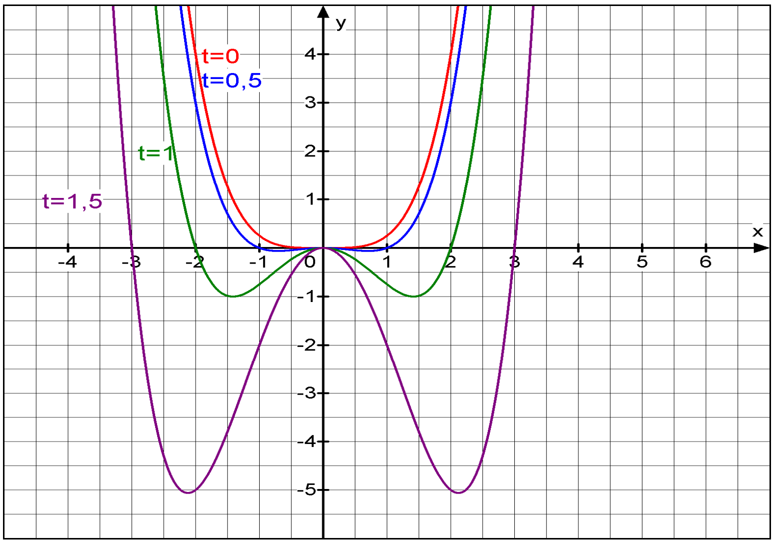
Daraus folgt: Fläche oberhalb der waagrechten Tangente = $2\pi^2 - (0{,}5\pi^2 - 2) = 1{,}5\pi^2 + 2$

Flächenverhältnis: $\frac{A_{oben}}{A_{unten}} = \frac{1{,}5\pi^2 + 2}{0{,}5\pi^2 - 2} \approx \frac{5{,}725}{1} = 5{,}725 : 1$

d) Die Tangente im Ursprung besitzt die Steigung $f'(0) = 2$ und die Tangentengleichung lautet y = 2x.
Schnittpunkt der waagrechten Gerade $y = 2\pi$ mit der Tangente:
$2x = 2\pi \Rightarrow x = \pi$
Linke Fläche = Dreiecksfläche = $\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \pi = \pi^2$
Rechte Fläche $= 2\pi^2 - \pi^2 = \pi^2$
Die Tangente halbiert somit die Fläche, das Aufteilungsverhältnis ist 1:1.

Aufgabe 18:

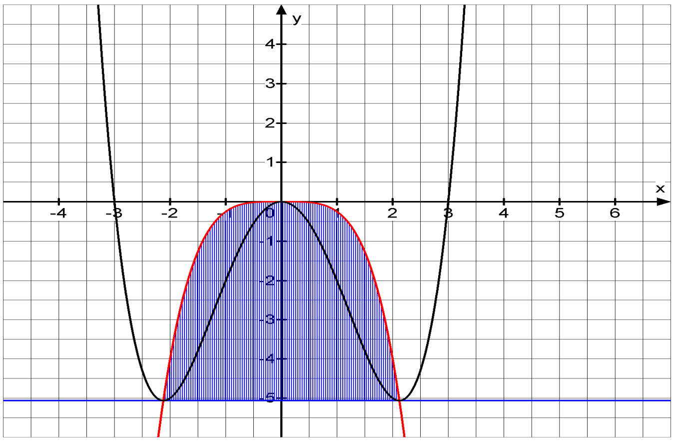
a)



b) Berechnung der Tiefpunkte:
$f_t'(x) = x^3 - 2t^2x \Rightarrow f_t''(x) = 3x^2 - 2t^2$
$f_t'(x) = 0 \Rightarrow x \cdot (x^2 - 2t^2) = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = \pm t \cdot \sqrt{2}$
$f_t''(0) = -2t^2 < 0$ für $t \neq 0$, also Hochpunkt
$f_t''(\pm t \cdot \sqrt{2}) = 4t^2 > 0$ für $t \neq 0$, also Tiefpunkt $T(\pm t \cdot \sqrt{2} / -t^4)$
Für t = 0 liegt bei x = 0 ein Tiefpunkt T(0/0) vor.

Gleichung der Kurve T:
$x = \pm t \cdot \sqrt{2}$ (1) und $y = -t^4$ (2)
Aus (1) folgt: $t = \pm \frac{x}{\sqrt{2}}$ eingesetzt in (2) $\Rightarrow y = -\frac{1}{4}x^4$
Somit liegen auf der Kurve $y = -\frac{1}{4}x^4$ alle Tiefpunkte der Funktionenschar (einschließlich des Ursprungs für den Sonderfall t = 0)

c)



Berechnung der schraffierten Fläche:

$$A = 2\cdot\int_0^{t\cdot\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{4}x^4-(-t^4)\right)dx = 2\cdot\left[-\frac{1}{20}x^5+t^4x\right]_0^{t\cdot\sqrt{2}} = 2\cdot(-\frac{1}{5}t^5\cdot\sqrt{2}+t^5\cdot\sqrt{2}) = \frac{8}{5}t^5\cdot\sqrt{2}$$

d) Unterer Teil der Fläche zwischen G_t und der waagrechten Gerade:

$$A_{unten} = 2\cdot\int_0^{t\cdot\sqrt{2}}\left(\frac{1}{4}x^4-t^2x^2-(-t^4)\right)dx = 2\cdot\left[\frac{1}{20}x^5-\frac{1}{3}t^2x^3+t^4x\right]_0^{t\cdot\sqrt{2}}$$

$$= 2\cdot(\frac{1}{5}t^5\cdot\sqrt{2}-\frac{2}{3}t^5\sqrt{2}+t^5\cdot\sqrt{2}) = \frac{16}{15}t^5\cdot\sqrt{2}$$

Oberer Teil der Fläche: $A_{oben} = \frac{8}{5}t^5\sqrt{2}-\frac{16}{15}t^5\sqrt{2} = \frac{8}{15}t^5\sqrt{2}$

Daraus folgt: $A_{unten} : A_{oben} = 2:1$

Aufgabe 19:

a) Mittlere Tagestemperatur = $\frac{1}{24-0}\cdot\int_0^{24}(15-\frac{1}{20}(x-14)^2)dx = 12{,}4\,℃$ (GTR)

b) Mittlere Temperatur 0 – 12 Uhr = $\frac{1}{12-0}\cdot\int_0^{12}(15-\frac{1}{20}(x-14)^2)dx = 11{,}2\,℃$ (GTR)

c) Mittlere Temperatur 12 – 24 Uhr = $\frac{1}{24-12}\cdot\int_{12}^{24}(15-\frac{1}{20}(x-14)^2)dx = 13.6\,℃$ (GTR)