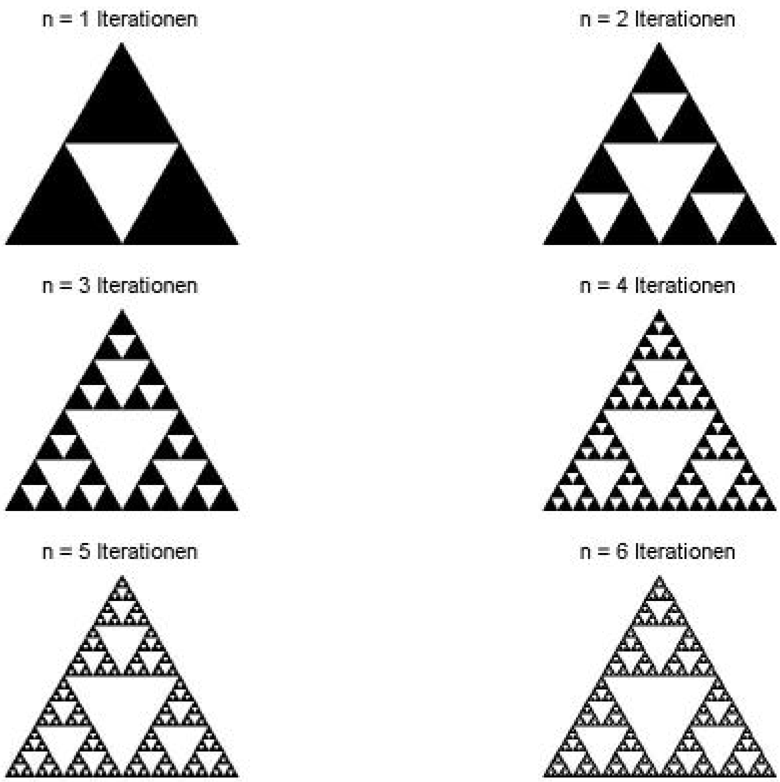
Klausur 1 über Folgen

Hinweis: Der GTR darf für alle Aufgaben eingesetzt werden.

Aufgabe 1:
Bestimme eine explizite und eine rekursive Darstellung !
a) für eine arithmetische Folge mit $a_5 = 16{,}3$; $a_{10} = 27{,}8$
b) für eine geometrische Folge mit $g_4 = 40$; $g_6 = 0{,}4$
.

Aufgabe 2:
Die Figur verdeutlicht die Entwicklung eines gleichseitigen „Sierpinski-Dreiecks".
Die <u>schwarzen</u> Flächeninhalte stellen eine Folge $A_0, A_1, A_2, A_3, ...$ dar, wobei $A_0 = 1$ der Fläche des großen Ausgangsdreiecks entspricht.



a) Gib eine explizite und eine rekursive Darstellung der Folge an.
b) Erläutere anschaulich, welche Eigenschaften die Folge bzgl. Monotonie, Beschränktheit und Grenzwert hat (kein Beweis erforderlich!).

Aufgabe 3:
Gib (falls möglich) jeweils eine Folge an, die…
a) eine Nullfolge ist.
b) zwei Grenzwerte besitzt.
c) nicht monoton ist und den Grenzwert 3 hat.

Aufgabe 4:

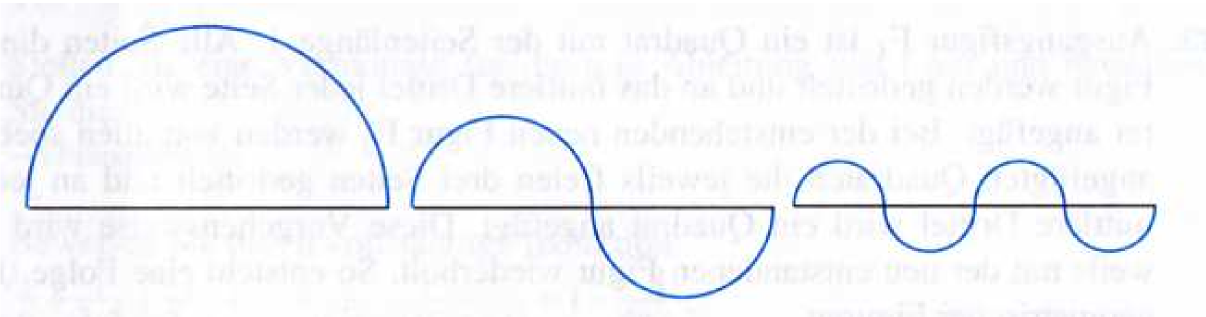
Die rekursiv beschriebene Folge (a_n) mit $a_1 = 1$ und $a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 2}{2 \cdot a_{n-1}}$ konvergiert.

Berechne den Grenzwert dieser Folge.

Aufgabe 5:

Gegeben ist die Folge (a_n) durch $a_n = \frac{n-2}{1+2n}$; $n \in \mathbb{N}^*$. Gib die ersten 5 Folgeglieder als Bruch an. Untersuche die Folge auf Monotonie und Beschränktheit. Ermittle den Grenzwert und führe einen ε-Beweis durch! Ab dem wievielten Folgeglied ist die Abweichung vom Grenzwert sicher kleiner als 0,01 ?

Aufgabe 6:
Über einer Strecke der Länge 1 ist in der ersten Figur F_1 ein Halbkreis gezeichnet.
In der zweiten Figur F_2 wird diese Strecke halbiert und über jeder Hälfte wird ein Halbkreis gezeichnet. In der dritten Figur F_3 wird wieder jede Strecke halbiert und darüber wird je ein Halbkreis gezeichnet usw.



Bestimme den Umfang U_n der „Schlangenlinie" sowie den zwischen Strecke und „Schlangenlinie" eingeschlossenen Flächeninhalt A_n der Figur F_n.
Untersuche, ob die Folge (U_n) bzw. (A_n) einen Grenzwert besitzt und gib diesen ggf. an.

Musterlösung zur Klausur 1 über Folgen

Aufgabe 1:

a) Explizite Darstellung einer arithmetischen Folge: $a_n = a_0 + n \cdot d$

Es gilt: $a_5 + 5 \cdot d = a_{10} \Rightarrow 16{,}3 + 5 \cdot d = 27{,}8 \Rightarrow d = 2{,}3$

Nun gilt: $a_0 = a_5 - 5 \cdot d = 16{,}3 - 5 \cdot 2{,}3 = 4{,}8$

Explizite Darstellung: $a_n = 4{,}8 + 2{,}3 \cdot n$ für n = 0,1,2,3,…

Rekursiv Darstellung: $a_n = a_{n-1} + 2{,}3$ mit $a_0 = 4{,}8$

b) Explizite Darstellung einer geometrischen Folge: $g_n = g_0 \cdot q^n$

Es gilt $g_4 \cdot q^2 = g_6 \Rightarrow 40 \cdot q^2 = 0{,}4 \Rightarrow q^2 = 0{,}01 \Rightarrow q = \pm 0{,}1$

Da es ausreicht, eine Folge anzugeben, wird q = 0,1 gewählt.

Nun gilt: $g_0 = g_4 : q^4 = 40 : 0{,}1^4 = 400.000$

Explizite Darstellung: $g_n = 400.000 \cdot 0{,}1^n$ für n = 0,1,2,3…

Rekursive Darstellung: $g_n = g_{n-1} \cdot 0{,}1$ mit $g_0 = 400.000$

Aufgabe 2:

a) Es gilt $A_0 = 1$ (gemäß Vorgabe).

Bei A_1 sind ist nur noch $\frac{3}{4}$ der Fläche von A schwarz: $A_1 = \frac{3}{4} \cdot A_0 = \frac{3}{4}$.

Bei A_2 sind ist nur noch $\frac{3}{4}$ der Fläche von A_1 schwarz: $A_2 = \frac{3}{4} \cdot A_1 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$.

Bei A_3 sind ist nur noch $\frac{3}{4}$ der Fläche von A_2 schwarz: $A_3 = \frac{3}{4} \cdot A_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{16} = \frac{27}{64}$.

Man kann nun erkennen, dass es sich um eine geometrische Folge handelt mit $q = \frac{3}{4}$.

Explizite Darstellung: $A_n = 1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$ für n = 0,1,2,3,…

Rekursive Darstellung: $A_n = A_{n-1} \cdot \frac{3}{4}$ mit $A_0 = 1$.

b) Die Folge ist streng monoton fallend, da $q = \frac{3}{4} < 1$ ist.

Die Folge ist beschränkt: Eine obere Schranke ist $S = A_0 = 1$, eine untere Schranke ist s = 0, da alle Folgeglieder positiv sind.

Grenzwert der Folge: $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$, das heißt die Folge konvergiert.

Aufgabe 3:

a) Nullfolge: $a_n = \frac{1}{n}$

b) zwei Grenzwerte: ist nicht möglich

c) nicht monoton und Grenzwert 3: $a_n = 3 + \frac{1}{n} \cdot (-1)^n$

Aufgabe 4:
Da die Folge gemäß Voraussetzung konvergiert, sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$.

Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n-1}^2+2)}{\lim\limits_{n\to\infty}(2\cdot a_{n-1})}$ und damit $g = \dfrac{g^2+2}{2\cdot g}$.
Die Berechnung des Grenzwertes erfolgt durch die Lösung der obigen Gleichung:

$2g^2 = g^2 + 2 \Rightarrow g^2 = 2 \Rightarrow g = \pm\sqrt{2}$.
Eine der beiden Lösungen entspricht dem tatsächlichen Grenzwert.
Aufgrund des positiven Startwertes und der rekursiven Folgengleichung ist erkennbar, dass die Folgeglieder niemals negativ werden können. Somit kann der Grenzwert nur $g = \sqrt{2}$ sein.
Dies kann auch mit der Wertetabelle des GTR geprüft werden.
(Hinweis: Wäre der Startwert z.B. $a_1 = -1$ gewesen, hätte sich als Grenzwert $g = -\sqrt{2}$ ergeben)

Aufgabe 5:
Die Folgengleichung $a_n = \dfrac{n-2}{1+2n}$ liefert $a_1 = -\dfrac{1}{3}$; $a_2 = 0$; $a_3 = \dfrac{1}{7}$; $a_4 = \dfrac{2}{9}$; $a_5 = \dfrac{3}{11}$
Monotonie:
Aufgrund der ersten Folgeglieder ist zu vermuten, dass die Folge streng monoton wachsend ist.
Beweis: $a_{n+1} - a_n = \dfrac{n-1}{2n+3} - \dfrac{n-2}{2n+1} = \dfrac{(n-1)(2n+1)-(n-2)(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)} = \dfrac{5}{(2n+3)(2n+1)} > 0$
für $n \in \mathbb{N}^*$. Damit ist die vermutete Monotonie bewiesen.

Beschränktheit:
Aufgrund der Monotonie ist $s = a_1 = -\dfrac{1}{3}$ eine untere Schranke.
Wegen $\dfrac{n-2}{2n+1} < \dfrac{n+1}{2n+1} < \dfrac{2n+1}{2n+1} = 1$ ist S = 1 eine obere Schranke.

Damit ist die Folge beschränkt.

Grenzwert: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-2}{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\cdot(1-\frac{2}{n})}{n\cdot(2+\frac{1}{n})} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-\frac{2}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{2}$

ε-Beweis:
$$|a_n - g| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{n-2}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n-4-(2n+1)}{2(2n+1)}\right| = \left|\frac{-5}{2(2n+1)}\right| = \frac{5}{2(2n+1)} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow 5 < (4n+2)\cdot\varepsilon \Rightarrow \frac{5}{\varepsilon} < 4n+2 \Rightarrow n > \frac{\frac{5}{\varepsilon}-2}{4}$$
Damit existiert für jedes $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N, so dass für alle Zahlen n > N gilt:
$|a_n - g| < \varepsilon$. Dabei entspricht $N = \dfrac{\frac{5}{\varepsilon}-2}{4}$ (falls dies eine Kommazahl ist, wird auf die nächste Zahl aufgerundet).

Für $\varepsilon = 0{,}01$ gilt $N = \dfrac{\dfrac{5}{0{,}01} - 2}{4} = 124{,}5$.

Ab dem 125. Folgeglied ist die Abweichung vom Grenzwert kleiner als 0,01.

Aufgabe 6:

a) Der Umfang eines Halbkreises beträgt $U = \pi \cdot r$

Daraus folgt nun:

$U_1 = \pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$; $U_2 = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$; $U_3 = 4 \cdot \pi \cdot \frac{1}{8} = \frac{\pi}{2}$; … ; $U_n = 2^{n-1} \cdot \pi \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{\pi}{2}$

Der Umfang bleibt somit immer konstant und es gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} U_n = \frac{\pi}{2}$.

b) Die Fläche eines Halbkreises beträgt $A = \frac{1}{2}\pi \cdot r^2$.

Daraus folgt nun:

$A_1 = \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8}$; $A_2 = 2 \cdot \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{\pi}{16}$; $A_3 = 4 \cdot \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{\pi}{32}$; … ;

$A_n = 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 = \frac{\pi}{2^{n+2}}$

Die eingeschlossenen Flächeninhalte werden immer kleiner und es gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} A_n = 0$