Analytische Geometrie

Übungsaufgaben
Spiegelung und Symmetrie

Oberstufe

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

November 2015

Aufgabe 1:

a) Der Punkt P(4/2/-5) wird am Punkt Z(3/-1/-8) gespiegelt.
Berechne die Koordinaten des Bildpunktes P*.

b) Der Punkt P(-1/-2/-3) wird am Punkt Z gespiegelt. Man erhält den Bildpunkt P*(8/-8/6).
Berechne die Koordinaten des Punktes Z.

Aufgabe 2:

Der Punkt A(-1/-3/5) wird an einer Ebene E gespiegelt. Sein Bildpunkt ist A'(6/0/5).
Bestimme eine Gleichung der Symmetrieebene E.

Aufgabe 3:

Der Punkt P(7/5/3) wird an der Ebene E: $-3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 30$ gespiegelt.
Bestimme die Koordinaten des Bildpunktes P*.

Aufgabe 4:

Der Punkt P(3/3/3) wird an der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ gespiegelt.

Bestimme die Koordinaten des Bildpunktes P*.

Lösungen

Aufgabe 1:

a) Es gilt $\overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OP} + 2\cdot\overrightarrow{PZ} = \begin{pmatrix}4\\2\\-5\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}-1\\-3\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4-2\\2-6\\-5-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-4\\-11\end{pmatrix}$

Koordinaten von P*(2/-4/-11).

b) Z ist der Mittelpunkt von P und P*:

$$\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{PP^*} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}9\\-6\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1+4,5\\-2-3\\-3+4,5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3,5\\-5\\1,5\end{pmatrix}$$

Koordinaten von Z(3,5/-5/1,5).

Aufgabe 2:

Der Normalenvektor der Symmetrieebene lautet $\vec{n} = \overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix}7\\3\\0\end{pmatrix}$.

Außerdem liegt der Mittelpunkt Z der Strecke AA' auf der Ebene:

$$\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix}-1\\-3\\5\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}7\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1+3,5\\-3+1,5\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2,5\\-1,5\\5\end{pmatrix}$$

Gleichung der Symmetrieebene: E: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}2,5\\-1,5\\5\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}7\\3\\0\end{pmatrix} = 0$

Aufgabe 3:

Aufstellen einer Hilfsgerade h, die durch P und orthogonal zu E verläuft:

h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}7\\5\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\\4\end{pmatrix}$

Schnittpunkt von h mit E: $-3(7-3r)+2(5+2r)+4(3+4r)=30$

$\Rightarrow -21+9r+10+4r+12+16r=30 \Rightarrow 29r+1=30 \Rightarrow r=1$

Einsetzen von r = 1 in die Gerade ergibt den Schnittpunkt S(4/7/7).

$\overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OP} + 2\cdot\overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix}7\\5\\3\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\9\\11\end{pmatrix}$ Koordinaten von P*(1/9/11).

Aufgabe 4:

Der Punkt P(3/3/3) wird an der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ gespiegelt.

Bestimme die Koordinaten des Bildpunktes P*.

Im ersten Schritt muss der Lotfußpunkt F auf der Geraden g bestimmt werden.
Ein allgemeiner Punkt auf g hat die Koordinaten F(2+5t/10-3t/-3+2t).

Es ist $\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} -1+5t \\ 7-3t \\ -6+2t \end{pmatrix}$

Der Lotfußpunkt ergibt sich mit der Bedingung $\overrightarrow{PF} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$.

$$\begin{pmatrix} -1+5t \\ 7-3t \\ -6+2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = -5+25t-21+9t-12+4t = 0 \Rightarrow -38+38t = 0 \Rightarrow t = 1$$

Der Lotfußpunkt hat die Koordinaten F(7/7/-1).

$\overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ -5 \end{pmatrix}$ Koordinaten von P*(11/11/-5).