Analysis

Trigonometrische Funktion
Wahlteilaufgaben

Gymnasium Oberstufe J1 oder J2

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Januar 2015

In einem Küstenort kann der Pegelstand im Hafenbecken durch die Funktion

$$f(t) = 1{,}4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6{,}15} \cdot (t-7)\right) + 5{,}2 \quad \text{mit } t \geq 0$$

angenähert werden (t in Stunden ab 0.00 Uhr des ersten Tages, f(t) in Meter)

a) Skizzieren Sie das Schaubild von f für die ersten 24 Stunden.
Geben Sie die Periode von f an.
Zwischen welchen Werten schwankt der Pegelstand ?
Wie hoch ist der Pegelstand am ersten Tag um 8.30 Uhr ?
Zu welchen Tageszeiten innerhalb der ersten 24 Stunden fließt am meisten Wasser aus dem Hafenbecken ?
Bestimmen Sie den mittleren Pegelstand am ersten Tag.

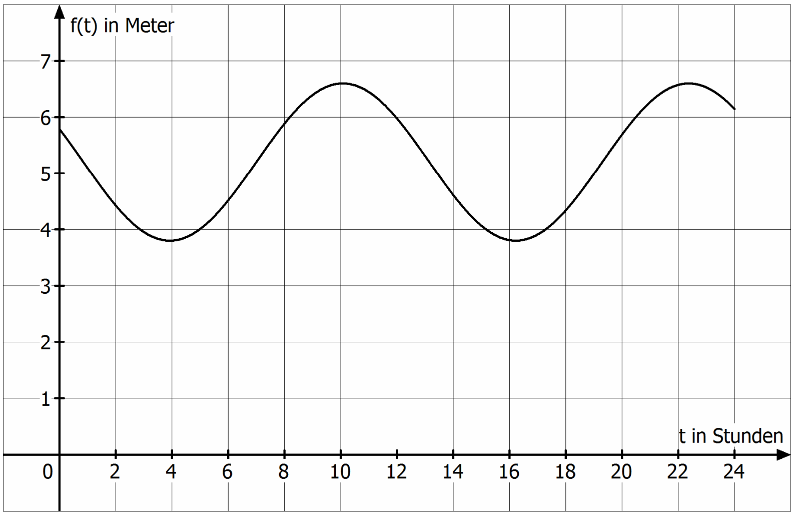
b) Der höchste Pegelstand liegt 1m unterhalb der waagrechten Obekante der Kaimauer.
Für Ausbesserungsarbeiten muss eine Stelle der Kaimauer erreichbar sein, die 2m unterhalb dieser Oberkante liegt.
In welchen Zeiträumen innerhalb der ersten 24 Stunden können die Reparaturarbeiten an der Kaimauer durchgeführt werden ?
Um wie viel Uhr ist am zweiten Tag der Pegelstand zum ersten Mal am höchsten ?
Am wievielten Tag tritt der Pegelhöchststand erstmals zur gleichen Uhrzeit wie am ersten Tag ein ?

c) In einem anderen Küstenort wiederholen sich die Pegelstände mit derselben Periode, aber die Pegelhöchststände treten jeweils 2 Stunden später ein als im ersten Ort.
Um 9.42 Uhr beträgt der Pegelstand im zweiten Ort 5,47m und um 14.36 Uhr 5,31m.
Bestimmen Sie einen Term einer Funktion, die den Pegelstand im zweiten Ort näherungsweise beschreibt.
Zu welchem Zeitpunkt innerhalb der ersten 12 Stunden ist der Unterschied der Pegelstände beider Orte am größten ?

Lösung

Gegeben ist die Funktion $f(t) = 1{,}4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6{,}15} \cdot (t-7)\right) + 5{,}2$

Skizze



Für die Periode gilt $p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\pi/6{,}15} = 12{,}3$ Stunden

Für die Pegelstandswerte benötigt man die y-Werte der Extrempunkte:

y-Wert des Hochpunktes: $y_{HP} = 5{,}2 + 1{,}4 = 6{,}6$

y-Wert des Tiefpunktes: $y_{HP} = 5{,}2 - 1{,}4 = 3{,}8$

Der Pegelstand schwankt zwischen 3,8m und 6,6m.

Pegelstand um 8.30 Uhr: $f(8{,}5) = 6{,}17$ m

Die Geschwindigkeit, mit der das Wasser zu- bzw. abfließt wird durch die Ableitungsfunktion $f'(t)$ beschrieben.

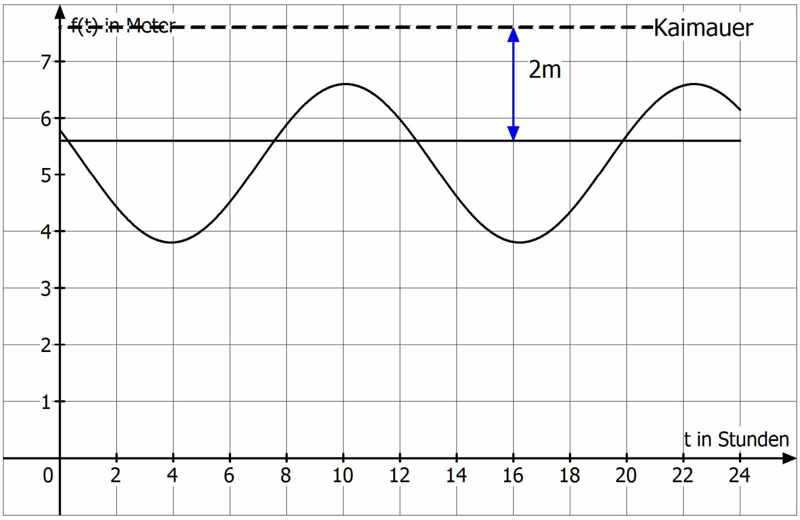
Gesucht ist die Stelle t, bei der die Ableitungsfunktion minimal (negativ) wird. Diese Stelle entspricht beim Schaubild f(t) einer Wendestelle.

GTR: Die Ableitungsfunktion wird bei t = 13,15 minimal.

Dies entspricht der Uhrzeit 13.09 Uhr

Der mittlere Pegelstand am ersten Tag beträgt $\frac{1}{24-0} \cdot \int_0^{24} f(t)dt = 5{,}18$ m b)

Skizze:



Die Höhe der Kaimauer beträgt 6,6m + 1m = 7,6 m
Für die Ausbesserung darf der Pegelstand höchstens 7,6m - 2m = 5,6m sein.

Gesucht sind die Zeitpunkte, für die gilt: $f(t) \leq 5,6$

GTR: f(t) liegt unterhalb von 5,6 m im Intervall [0,283 ; 7,567] und [12,58 ; 19,87].

Das erste Intervall entspricht dem Zeitraum von 0.17 Uhr bis 7.34 Uhr.
Das zweite Intervall entspricht dem Zeitraum 12.35 Uhr bis 19.52 Uhr.
In diesen beiden Intervallen können die Arbeiten durchgeführt werden.

Am zweiten Tag ist der Pegelstand zum ersten Mal am höchsten bei
t = 34,7 (GTR). Dies ist um 10.42 Uhr am zweiten Tag.

Am ersten Tag ist Pegel am höchsten für t = 10,07 und für t = 22,37 (GTR) mit dem Pegelstand 6,6m.
Es genügt bei dieser Aufgabe, sich auf die Uhrzeit 10.04 Uhr (t = 10,07) zu beschränken.
Gesucht ist der Tag, bei dem wieder um 10.04 Uhr der Pegelstand 6,6m beträgt.

Diese Aufgabe wird mit dem GTR folgendermaßen gelöst:
Da die Uhrzeit gleich bleiben soll, muss für den gesuchten Zeitpunkt gelten:
t = 10,07 + 24x wobei x eine natürliche Zahl ist.
Gesucht ist der kleinste x-Wert, für den gilt: $f(10,07 + 24x) = 6,6$

Lösung mit der Wertetabelle des GTR:
Y1 = f(x)
Startwert der Wertetabelle: 10,07, Schrittweite der Tabelle: 24
Nun wird aus der Wertetabelle so lange nach unten gescrollt, bis wieder der y-Wert 6,6 auftaucht.
Dies ist der Fall für t = 994,07.
Es gilt 994,07 : 24 = 41,4 .
Am 42. Tag tritt der Pegelhöchststand erstmals wieder zur gleichen Uhrzeit ein.

c)

Ansatz für die Funktionsgleichung: $g(t) = a \cdot \sin(b \cdot (t - c)) + d$

Da die Periode gleich bleibt, gilt $b = \frac{\pi}{6{,}15}$.

Da die Pegelhöchststände 2 Stunden später auftreten, muss das Schaubild von f(t) um zwei Einheiten nach rechts verschoben werden. Da bei f(t) c = 7 war, ist nun c = 9.

Zwischenergebnis: $g(t) = a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6{,}15} \cdot (t - 9)\right) + d$

9.42 Uhr entspricht t = 9,7 (42: 60 = 0,7)
14.36 Uhr entspricht t = 14,6 (36 : 60 = 0,6)

Nun müssen die bekannten Werte eingesetzt werden:

$$g(9{,}7) = 5{,}47 \Rightarrow a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6{,}15} \cdot (9{,}7 - 9)\right) + d = 5{,}47 \Rightarrow 0{,}35a + d = 5{,}47$$

$$g(14{,}6) = 5{,}31 \Rightarrow a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6{,}15} \cdot (14{,}6 - 9)\right) + d = 5{,}47 \Rightarrow 0{,}2773a + d = 5{,}31$$

Lösung des Gleichungssystems mit dem GTR:

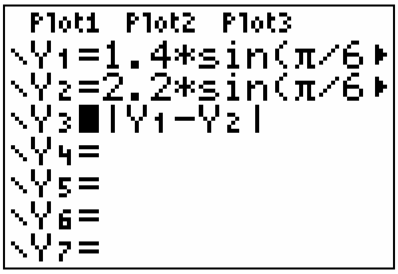
a = 2,2 und d = 4,7.

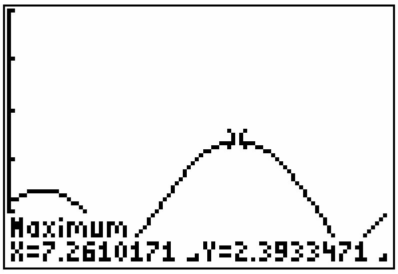
Die gesuchte Funktion lautet $g(t) = 2{,}2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6{,}15} \cdot (t - 9)\right) + 4{,}7$

Der Zeitpunkt, zu dem sich die Funktionen f(t) und g(t) am meisten unterscheiden.

entspricht der Maximalstelle der Funktion $d(t) = |f(t) - g(t)|$

(Die Betragsstriche sind wichtig, da es für die Abstandsberechnung keine Rolle spielt, welche der beiden Schaubilder oberhalb und unterhalb liegt.





Der größte Unterschied existiert bei t = 7,26. Dies entspricht der Uhrzeit von 7.15 Uhr.