Analysis

Klausur zu Ableitung, Extrem- und Wendepunkten, Interpretation von Graphen von Ableitungsfunktionen, Tangenten und Normalen
(Bearbeitungszeit: 90 Minuten)

Gymnasium J1

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

November 2013

Pflichtteil - ohne Hilfsmittel

Aufgabe P1: (3 VP)
Bestimme die ersten beiden Ableitungen der Funktion f:

a) $f(x) = 2x^5 + 3\cos(x)$

b) $f_a(x) = a^{-3} \cdot \sqrt[3]{x} + \frac{1}{6}a^2 \cdot x^2$

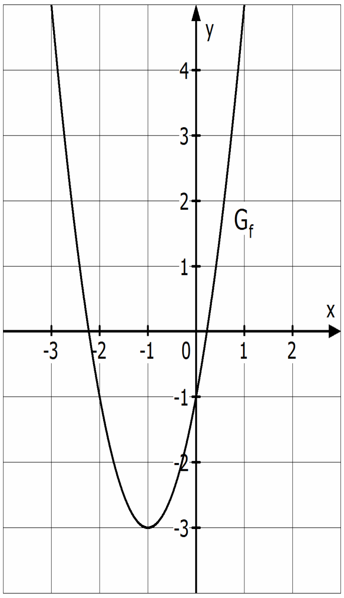
c) $f_x(a) = a^{-3} \cdot \sqrt[3]{x} + \frac{1}{6}a^2 \cdot x^2$

Aufgabe P2: (5 VP)
Bestimme alle lokalen Extremstellen von $f(x) = -x^3 + x^2 + x$
Gib die Intervalle an, in denen der Graph von f eine Rechtskurve bzw. eine Linkskurve ist.

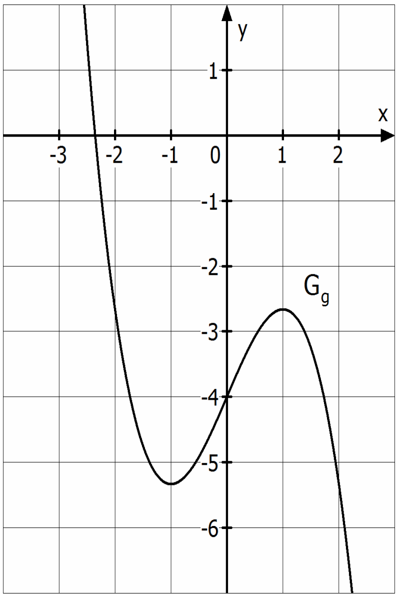
Aufgabe P3: (4 VP)
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2x^2 + 4$.
Bestimme die Punkte des Graphen, dessen Tangenten durch den Punkt P(1/-2) verlaufen.

Aufgabe 4: (4,5 VP)
Gegeben sind die Graphen dreier Funktionen f, g, h sowie sechs weitere Graphen, darunter auch die Graphen der Ableitungsfunktionen dieser drei Funktionen. Ordne den drei Funktionen jeweils ihre Ableitungsfunktion zu und begründe deine Entscheidung ausführlich und gründlich. Argumentiere unter Verwendung der Fachsprache.

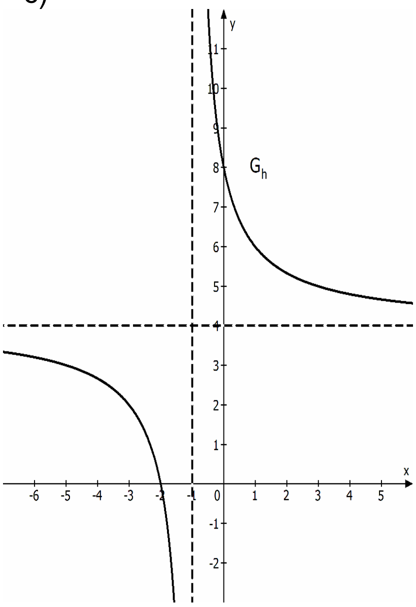
a)



b)



c)



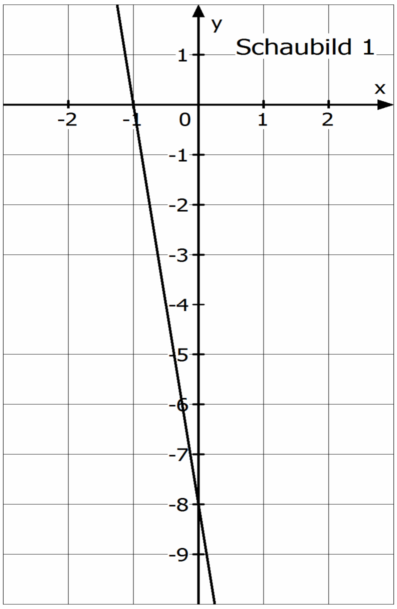


Schaubild 1

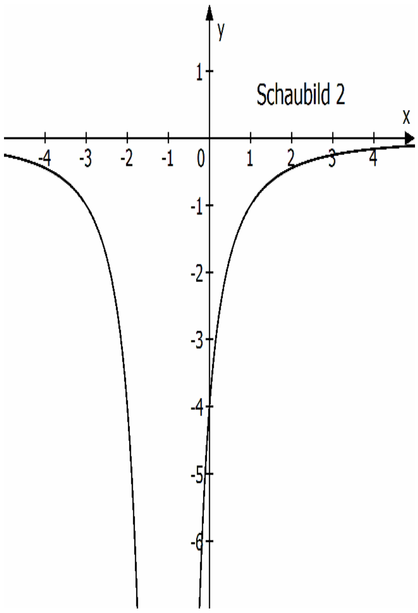


Schaubild 2

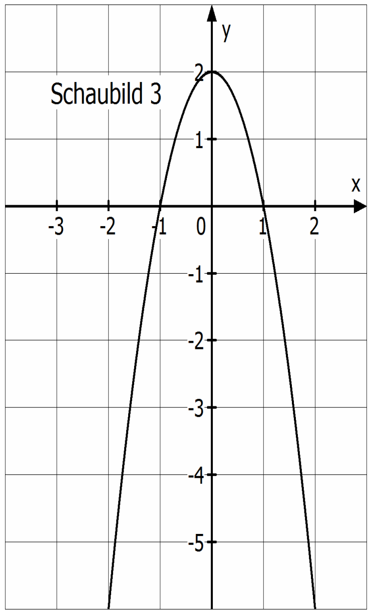


Schaubild 3

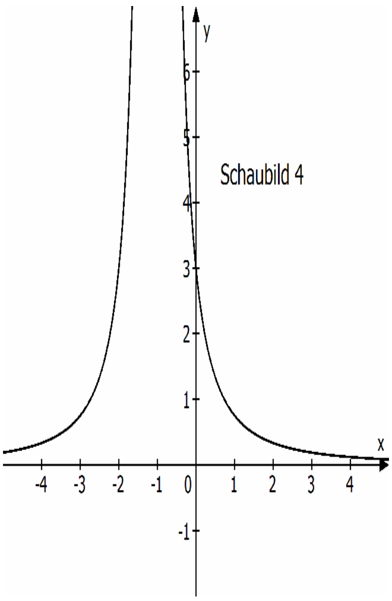


Schaubild 4

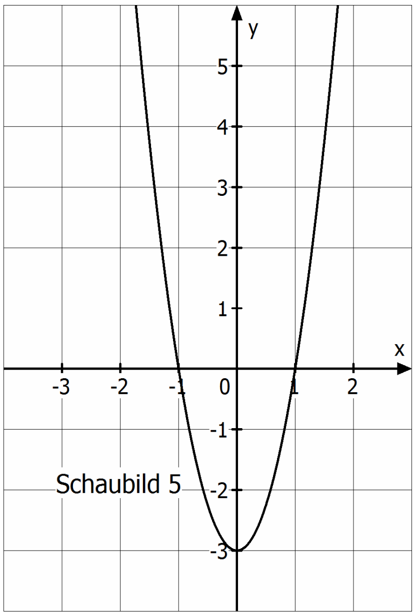


Schaubild 5

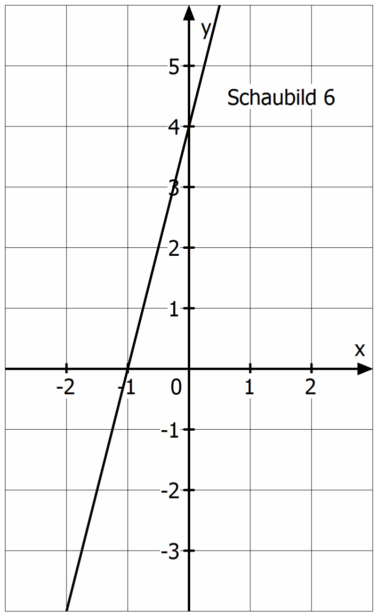


Schaubild 6

Wahlteil - mit GTR und Formelsammlung

Aufgabe W1: (5,5 VP)
Die Gerade t mit der Gleichung $y = -3x + 13$ ist Tangente an den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 14$.

a) Weise diese Behauptung rechnerisch nach.
b) Die Tangente t, die Normale an den Graphen von f im Berührpunkt von t und die x-Achse bilden ein rechtwinkliges Dreieck. Berechne den Flächeninhalt dieses Dreiecks.
c) Zeige, dass der Berührpunkt B der Tangente mit dem Graphen von f auch Wendepunkt des Graphen der Funktion ist.

Aufgabe W2: (3 VP)
Die Temperaturmessung einer Wetterstation kann zwischen 7 und 18 Uhr durch die Funktion $f(t) = -0{,}04t^3 + 1{,}31t^2 - 12{,}3t + 38{,}4$ angenähert werden.
Dabei gibt t die Uhrzeit in Stunden an.

a) Bestimme die höchste und die niedrigste Temperatur im Verlauf der Messung.
b) Bestimme den Zeitpunkt, an dem die Temperatur am stärksten ansteigt.

Aufgabe W3: (5 VP)
Die Funktion mit $g(x) = 0{,}15x^2 - 1{,}6x + 3$ beschreibt für einen Zeitraum von 10 Tagen modellhaft den Zu- bzw. Ablauf von Wasser aus einem Stausee (x in Tagen, g(x) in 1 Mio m³ pro Tag).

a) Wann läuft Wasser in den See hinzu, wann läuft Wasser aus dem See ab ?
b) Wann verändert sich der Wasserstand am stärksten ?

Lösungen

Aufgabe P1:

a) $f(x) = 2x^5 + 3\cos(x)$ $f'(x) = 10x^4 - 3\sin(x)$ $f''(x) = 40x^3 - 3\cos(x)$

b) $f_a(x) = a^{-3} \cdot x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{6}a^2 \cdot x^2$ $f_a'(x) = \frac{1}{3}a^{-3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{3}a^2 \cdot x$ $f_a''(x) = -\frac{2}{9}a^{-3} \cdot x^{-\frac{5}{3}} + \frac{1}{3}a^2$

c) $f_x(a) = a^{-3} \cdot \sqrt[3]{x} + \frac{1}{6}a^2 \cdot x^2$ $f_x'(a) = -3a^{-4} \cdot \sqrt[3]{x} + \frac{1}{3}ax^2$ $f_x''(a) = 12a^{-5} \cdot \sqrt[3]{x} + \frac{1}{3}x^2$

Aufgabe P2:

Lokale Extremstellen von $f(x) = -x^3 + x^2 + x$:
Es gilt $f'(x) = -3x^2 + 2x + 1$ und $f''(x) = -6x + 2$
Notwendige und hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$f'(x) = 0: \ -3x^2 + 2x + 1 = 0 \ \overset{\text{MNF}}{\Rightarrow} x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-3) \cdot 1}}{-6} = \frac{-2 \pm 4}{-6} \Rightarrow x_1 = 1$ und $x_2 = -\frac{1}{3}$

$f''(1) = -6 + 2 = -4 < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum bei x = 1

$f''(-\frac{1}{3}) = 2 + 2 = 4 > 0 \Rightarrow$ lokales Minimum bei $x = -\frac{1}{3}$.

Bedingung für Rechtskrümmung: $f''(x) < 0 \Rightarrow -6x + 2 < 0 \Rightarrow x > \frac{1}{3}$

Bedingung für Linkskrümmung: $f''(x) > 0 \Rightarrow -6x + 2 > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{3}$

Aufgabe P3:

Es gilt $f(x) = 2x^2 + 4$ mit $f'(x) = 4x$.
Die allgemeine Tangentengleichung lautet: $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$

Es ist bekannt, dass der Punkt P(1/-2) auf der Tangente liegen soll.

Einsetzen von P in die allgemeine Tangentengleichung:
$-2 = 4u \cdot (1 - u) + 2u^2 + 4 \quad \Leftrightarrow -2 = 4u - 4u^2 + 2u^2 + 4 \quad \Leftrightarrow -2u^2 + 4u + 6 = 0$

$\overset{\text{MNF}}{\Rightarrow} u_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot (-2) \cdot 6}}{-4} = \frac{-4 \pm 8}{-4} \Rightarrow u_1 = -1$ und $u_2 = 3$

Mit $f(-1) = 6$ und $f(3) = 22$ folgt:
Die Berührpunkte der Tangenten am Graph von f(x) lauten R(-1/6) und S(3/22).

Aufgabe P4:

a) Schaubild von f(x):
Die Parabel hat an der Stelle x = -1 ein lokales Minimum.
Das bedeutet, dass die Ableitungsfunktion an der Stelle x = -1 eine Nullstelle mit einem Vorzeichenwechsel von - nach + besitzen muss.
Hier kommen nur die Schaubilder 3 und 6 in Frage.
Es ist jedoch **Schaubild 6.**
1.Argument: f(x) ist eine Parabel (Funktion 2.Grades) und das Schaubild der Ableitungsfunktion ist daher eine Gerade
2.Argument: Da f(x) bei x = 1 keinen Punkt mit waagrechter Tangente besitzt, kann Schaubild 3 nicht die Ableitungsfunktion von f(x) sein.

b) Schaubild von g(x):
Das Schaubild hat bei x = -1 und x = 1 zwei Extremstellen.
Das bedeutet, dass die Ableitungsfunktion an den Stellen x = -1 und x = 1 eine Nullstelle mit einem Vorzeichenwechsel besitzen muss.
An der Stelle x = -1 ist es ein VZW von - nach +.
An der Stelle x = 1 ist es ein VZW von + nach -.
Die zugehörige Ableitungsfunktion ist in **Schaubild 3** zu sehen.

c) Schaubild von h(x):
Das Schaubild besitzt keinen Punkt mit waagrechter Tangente und ist bei x = -1 unterbrochen.
Folglich besitzt die Ableitungsfunktion keine Nullstellen und ist ebenfalls bei x = -1 unterbrochen.
Hier kommen nur die Schaubilder 2 und 4 in Frage.
Da das Schaubild von h(x) streng monoton fallend ist, befindet sich das Schaubild der Ableitungsfunktion komplett unter der x-Achse.
Die zugehörige Ableitungsfunktion ist in **Schaubild 2** zu sehen.

Aufgabe W1:

a) Die Tangente besitzt die Steigung m = -3.
Zunächst werden die Stellen des Schaubildes von f(x) bestimmt, bei denen die Steigung m = -3 ist.

Es ist $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$.

Ansatz: $f'(x) = -3 \Rightarrow 3x^2 - 18x + 24 = -3 \Rightarrow 3x^2 - 18x + 27 = 0$

$$\overset{\text{MNF}}{\Rightarrow} x_{1,2} = \frac{18 \pm \sqrt{(-18)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 27}}{6} = \frac{18 \pm 0}{6} = 3$$

Die Berührstelle der Tangente ist x = 3.
Die Koordinaten des Berührpunkts lauten B(3/f(3)) = B(3/4)

Kontrolle, ob B(3/4) auf der Gerade t liegt: $4 = -3 \cdot 3 + 13$ ist eine wahre Aussage.

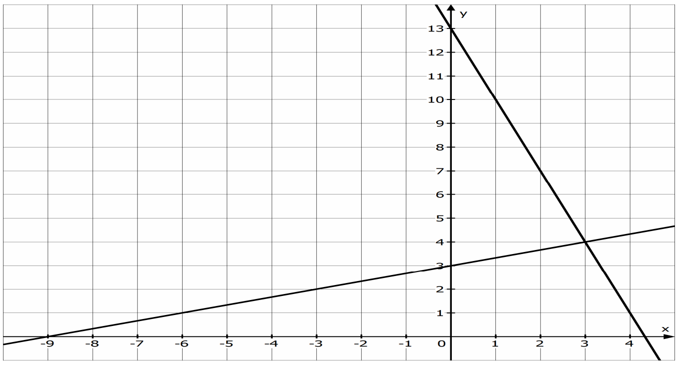
Damit ist die Gerade t eine Tangente an den Graphen von f.

b) Berechnung der Normalen im Punkt B(3/4):

Allgemeine Normalengleichung: $y = -\frac{1}{f'(u)} \cdot (x-u) + f(u)$

Mit u = 3 folgt: $y = -\frac{1}{f'(3)}(x-3) + f(3) \quad \Rightarrow y = \frac{1}{3}(x-3) + 4 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + 3$

Flächeninhalt des Dreiecks:



Nullstelle der Tangente: $-3x + 13 = 0 \Rightarrow x = \frac{13}{3}$

Nullstelle der Normale: $\frac{1}{3}x + 3 = 0 \Rightarrow x = -9$

Länge der Grundseite des Dreiecks: $g = 9 + \frac{13}{3} = \frac{40}{3}$

Höhe des Dreiecks: h = 4

$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot \frac{40}{3} \cdot 4 = \frac{80}{3}$ Flächeneinheiten

c) Nachweis, dass B Wendepunkt ist.

Notwendige und hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

Es ist $f''(x) = 6x - 18$ und $f'''(x) = 6$.

$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 18 = 0 \Rightarrow x = 3$

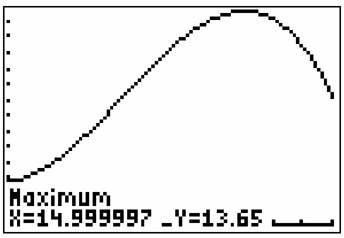
$f'''(3) = 6 \neq 0$ daher existiert bei x = 3 eine Wendestelle.

Damit ist B der Wendepunkt von f.

Aufgabe W2:

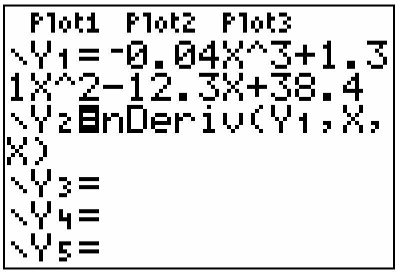
a) Zu berechnen ist das absolute Maximum und Minimum von f(t) im Intervall $7 \leq t \leq 18$.

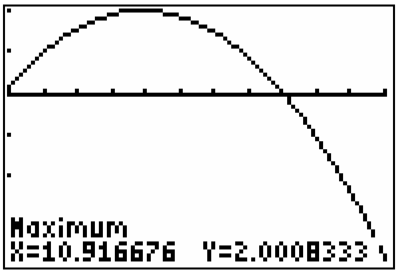
Berechnung mit dem GTR:



Die höchste Temperatur wird um t = 15 Uhr erreicht mit 13,65°C.
Die tiefste Temperatur wird um t = 7 Uhr erreicht mit $f(7) = 2{,}77°C$.
Es handelt sich hierbei um ein Randminimum.

b) Die Temperatur steigt am stärksten an, wenn die Ableitungsfunktion ihr Maximum annimmt.

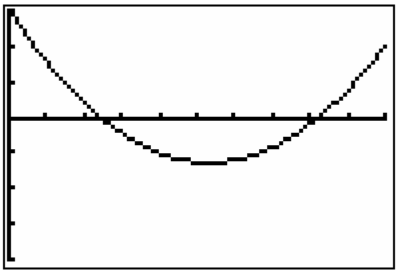




Die Ableitungsfunktion wird maximal für t = 10,92.
Die Temperatur steigt um ca. 10.55 Uhr am stärksten an.

Aufgabe W3:

Skizze von g(x):



a) Es läuft Wasser hinzu, wenn g(x) oberhalb der x-Achse verläuft.
Nullstellen von g(x) mit dem GTR bei x = 2,43 und bei x = 8,24
Im Zeitraum $0 \le x < 2{,}43$ und $8{,}24 < x \le 10$ fließt Wasser hinzu.
Im Zeitraum $2{,}43 < x < 8{,}24$ fließt Wasser ab.

b) Da g(x) eine momentane Änderungsrate des Wasserstandes darstellt, ändert sich der Wasserstand am stärksten, wenn g(x) ein Maximal bzw. ein Minimum annimmt.

g(x) wird maximal bei x = 0 (Randmaximum) mit g(0) = 3.
g(x) wird minimal bei x = 5,33 mit g(5,33) = -1,267.

Nach 0 Tagen (also zu Beginn) steigt der Wasserstand am stärksten.
Nach 5,33 Tagen fällt der Wasserstand am stärksten.