Stochastik

Pfadregeln
Erwartungswert einer Zufallsvariablen
bedingte Wahrscheinlichkeit

berufliche Gymnasien Oberstufe

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Oktober 2015

Aufgabe 1:
Eine Urne enthält fünf schwarze, drei rote und zwei weiße Kugeln, die sich nur in ihrer Farbe unterscheiden. Aus dieser Urne werden zwei Kugeln nacheinander mit Zurücklegen zufällig gezogen.

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden gezogenen Kugeln unterschiedliche Farben haben.
b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine der beiden gezogenen Kugeln schwarz ist, wenn bekannt ist, dass mindestens eine der beiden gezogenen Kugeln rot ist.

Aufgabe 2:
Ein Glücksrad besteht aus vier Feldern, die mit den Buchstaben A, B, C und D versehen sind. Die Mittelpunktswinkel der verschiedenen Sektoren betragen
A: 30° B: 60° C: 90° D: 180°

a) Wie oft muss man das Glücksrad drehen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 97% mindestens einmal das Feld D gedreht wird ?
b) Wie groß muss der zum Feld A gehörende Mittelpunktswinkel sein, damit bei dreimaligem Drehen mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,9% höchstens zweimal das Feld A gedreht wird ?

Aufgabe 3:
In der Produktion eines Reifenherstellers fallen Kosten von 8 € pro Reifen an. Beim Verkauf an den Händler erhält der Reifenhersteller 24 € pro Stück.
Der Händler macht Mängel in der Produktion zu hundert Prozent ausfindig. Bei 25% aller Händler treten Produktionsmängel auf. Mängelbehaftete Reifen nimmt der Hersteller zurück und erstattet den vollen Kaufpreis. Durch den Rücktransport der mängelbehafteten Reifen entstehen dem Hersteller zusätzlich Auslagen in Höhe von 4 € pro Stück.

a) Bestimme den Gewinn G, den der Reifenhersteller auf lange Sicht im Mittel pro Reifen erwarten kann.
b) Indem die Reifen vor dem Verkauf an den Händler geprüft werden, gelingt es dem Hersteller, ohne Fehldiagnose 90% aller mängelbehafteten Reifen zu identifizieren. Diese werden dann nicht verkauft, sondern kostenfrei entsorgt. Ermittle, wie viel der Prüfvorgang pro Reifen maximal kosten darf, wen der Hersteller den auf lange Sicht im Mittel pro Reifen erwarteten Gewinn G durch Anwendung des Prüfverfahrens erhöhen will.

Aufgabe 4:
In einer Urne befinden sich Kugeln, die sich nur in ihrer Farbe unterscheiden. Zwei der Kugeln sind rot, die restlichen drei Kugeln in der Urne sind blau.

a) Aus der Urne werden nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen zufällig gezogen. Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden gezogenen Kugeln nicht unterschiedliche Farben haben.

b) Eine neben der Urne stehende Schale enthält drei rote und zwei gelbe Kugeln, die sich untereinander und von den Kugeln in der Urne nur durch ihre Farbe unterscheiden. Zunächst wird zufällig eines der beiden Behältnisse Urne oder Schale ausgewählt. Aus diesem werden dann zwei Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen zufällig gezogen. Beide Kugeln sind rot.
Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden Kugeln aus der Schale stammen.

Aufgabe 5:
Jan und Anna spielen mit einer 1-Euro-Münze. Die beiden werfen die Münze insgesamt maximal viermal, wobei sie sich nach jedem Wurf abwechseln. Derjenige, bei dessen Wurf die Münze zuerst die Wertseite ("1 Euro") zeigt, hat gewonnen.

a) Anna lässt Jan den Vortritt. Bestimme jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Jan bzw. Anna gewinnt.

b) Nach einiger Zeit variieren Anna und Jan die Spielregeln leicht. Sie wechseln sich nun nicht mehr nach jedem Wurf ab, sondern werfen in der Reihenfolge Anna - Jan - Jan - Anna. Sonst bleibt alles beim Alten. Bestimme jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Jan bzw. Anna gewinnt.

Aufgabe 6:
In einem Behälter befinden sich zwei weiße und zwei schwarze Kugeln. Es werden zwei Kugeln nacheinander mit Zurücklegen zufällig gezogen.

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden gezogenen Kugeln weiß sind.

Dem Behälter wird eine zusätzliche weiße Kugel hinzugefügt. Anschließend werden erneut zwei Kugeln nacheinander mit Zurücklegen zufällig gezogen.

b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden gezogenen Kugeln weiß sind.

Bevor zum dritten Mal zwei Kugeln nacheinander mit Zurücklegen zufällig gezogen werden, wird die Anzahl der weißen Kugeln in dem Behälter weiter erhöht.

c) Bestimme, auf wie viel die Anzahl der weißen Kugeln in dem Behälter insgesamt mindestens erhöht werden muss, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden gezogenen Kugeln weiß sind, mindestens 64% beträgt.

Aufgabe 7:
Ein Behälter enthält sechs Kugeln, die jeweils mit genau einer der Zahlen 1 bis 6 bedruckt sind und sich nur durch diesen Aufdruck unterscheiden.
Aus dem Behälter werden so lange zufällig nacheinander ohne Zurücklegen Kugeln entnommen, bis eine Kugel mit einer geraden Zahl als Aufdruck gezogen wird.
Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der gezogenen Kugeln bis zum Ende der Ziehung an.
Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und den Erwartungswert von X.

Aufgabe 8:
Bei einem Glücksspiel wird ein Glücksrad benutzt, das wie folgt beschriftet ist:
1 € - Feld mit Mittelpunktswinkel 180°
2 € - Feld mit Mittelpunktswinkel 120°
3 € - Feld mit Mittelpunktswinkel 60°
Als Einsatz bezahlt man 2€. Das Glücksrad wird einmal gedreht. Der Betrag, auf dem das Glücksrad stehen bleibt, bekommt man ausbezahlt.

a) Die Zufallsvariable X ordnet jeder Drehung des Glücksrads den ausbezahlten Betrag in Euro zu. Berechne E(X) und zeige, dass das Glücksspiel nicht fair ist.
b) Auf welchen Betrag müsste man das 2 € - Feld ändern, damit das Spiel bei ansonsten gleichen Bedingungen fair wird ?

Aufgabe 9:

a) An einem Wochenende sagt der Wetterbericht für Samstag und Sonntag jeweils eine Regenwahrscheinlichkeit von 50% voraus. Ein Fernseh-Meteorologe schlussfolgert daraus, dass es an diesem Wochenende mit hundertprozentiger Sicherheit regnet. Beurteile, ob die Schlussfolgerung des Meteorologen korrekt ist.

b) Eine Zufallsvariable X hat die in der Tabelle angegebene Verteilung, wobei a eine reelle Zahl ist.

k	0	1	2	3	4
P(X = k)	a	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Begründe, dass der Wert von a keinen Einfluss auf den Erwartungswert E(X) hat. Berechne a.

Aufgabe 10:

Eine Klasse veranstaltet beim Schulfest für einen guten Zweck ein Glücksspiel. Dabei wird ein Würfel geworfen, der nur die beiden Farben Grün und Rot zeigt.
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Würfel bei einem Wurf Grün zeigt, beträgt p.

a) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Würfel bei vier Würfen stets Grün zeigt, beträgt $\frac{1}{81}$. Untersuche, ob die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Würfel bei einem Wurf Rot zeigt, doppelt so groß ist wie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Würfel bei einem Wurf Grün zeigt.

b) Betrachtet wird das Ereignis A: Bei fünf Würfen zeigt der Würfel genau zweimal Grün, davon einmal beim mittleren Wurf. Gib einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A an.

Aufgabe 11:

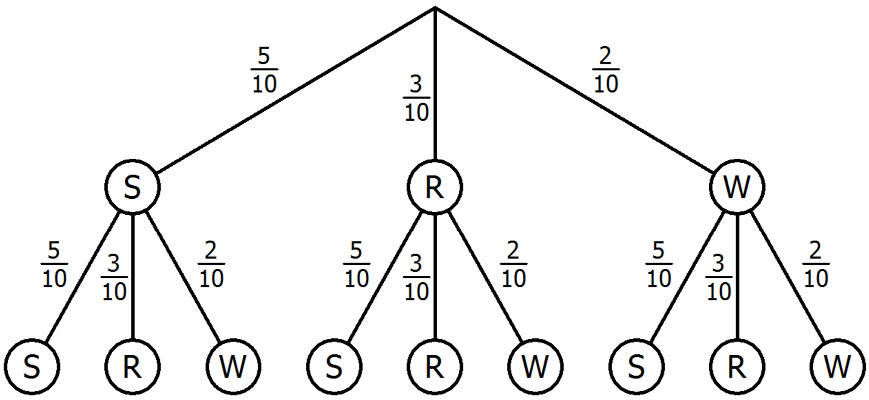
Bei einer Verkehrskontrolle an Fahrrädern überprüft die Polizei, ob die Bremsen und die Beleuchtung der Fahrräder in Ordnung sind. Bei der Überprüfung werden alle Mängel von der Polizei entdeckt.
Insgesamt beanstandet die Polizei im Rahmen der Verkehrskontrolle bei 40% der Fahrräder die Beleuchtung. 50% aller überprüfen Fahrräder sind ganz ohne Mängel und bei 70% der Fahrräder gibt es bei den Bremsen nichts zu beanstanden.
Gib an, bei wie viel Prozent der Fahrräder sowohl die Beleuchtung als auch die Bremsen beanstandet werden.
Gib zudem die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass bei einem Fahrrad mit mangelhafter Beleuchtung auch die Bremsen Mängel haben.

Aufgabe 12:

Aus einer großen Anzahl von Familien mit zwei Kindern wird eine Familie zufällig ausgewählt. Diese Familie hat eine Tochter mit Namen Anna. Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Anna einen Bruder hat.
(Annahme: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Kind eine Junge oder Mädchen ist sei 50%).

Lösungen

Aufgabe 1:



a) P("beide Kugeln haben unterschiedliche Farben")

= 1 - P("beide Kugeln haben gleiche Farben")

P("beide Kugeln haben gleiche Farben")
= P(RR, SS, WW) = $\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{10}+\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{10}+\frac{2}{10}\cdot\frac{2}{10}=\frac{38}{100}$

P("beide Kugeln haben unterschiedliche Farben") = $1-\frac{38}{100}=\frac{62}{100}=0{,}62$

b) Es handelt sich hierbei um eine bedingte Wahrscheinlichkeit $P_B(A)$
B: Mindestens eine der beiden gezogenen Kugeln ist rot.
A: Mindestens eine der beiden gezogenen Kugeln ist schwarz.

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(rs,sr)}{P(rs,sr,rr,rw,wr)}=\frac{\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{10}+\frac{5}{10}\cdot\frac{3}{10}}{\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{10}+\frac{5}{10}\cdot\frac{3}{10}+\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{10}+\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{10}+\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{10}}$$

$$=\frac{\frac{30}{100}}{\frac{51}{100}}=\frac{30}{51}$$

Aufgabe 2:

a) Es gilt: P(D) = $\frac{180}{360} = \frac{1}{2}$ und damit P(nicht D) = $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Das Glücksrad wird n-mal gedreht.

Es soll gelten: P(mindestens einmal D bei n Drehungen) $\approx 0{,}97$

P(mindestens einmal D bei n Drehungen) = 1 – P(niemals D bei n Drehungen)

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \approx 0{,}97 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n \approx 0{,}03 \quad \Rightarrow n \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) \approx \ln(0{,}03) \quad \Rightarrow n \approx \frac{\ln 0{,}03}{\ln 0{,}5} = 5{,}06$$

Man muss das Glücksrad 5-mal drehen.

b) Der Mittelpunktswinkel von A (und damit auch die Wahrscheinlichkeit mit der A gedreht wird) ist gesucht.
Es sei P(A) = p.

Es soll gelten: P(höchstens zweimal A bei dreimaligem Drehen) = 0,999

P(höchstens zweimal A) = 1 – P(AAA) $= 1 - p^3$

$$1 - p^3 = 0{,}999 \Rightarrow p^3 = 0{,}001 \Rightarrow p = 0{,}1$$

Da P(A) = 0,1 ist, beträgt der Mittelpunktswinkel von A $\alpha = 360° \cdot 0{,}1 = 36°$

Aufgabe 3:

a) Die Zufallsvariable X sei der Gewinn, den ein zufällig ausgewählter Reifen erzieht.

Es ist X = 24 € - 8 € = 16 €, wenn der Reifen ohne Mängel ist.
Es ist X = -8 € - 4 € = -12 € , wenn der reifen Mängel hat.

Es gilt $P(X = 16) = 0{,}75$ und $P(X = -12) = 0{,}25$
Erwartungswert $E(X) = 16€ \cdot 0{,}75 - 12€ \cdot 0{,}25 = 9€$

Der Hersteller kann auf lange Sicht mit einem Gewinn von 9 € pro Reifen rechnen.

b) Die Zufallsvariable X sei der Gewinn, den ein zufällig ausgewählter Reifen erzielt.

Es ist X = 16 €, wenn der Reifen ohne Mängel ist.
Es ist X = -8 €, wenn der Reifen mangelhaft ist und vom Hersteller entdeckt wird.
Es ist X = -12 €, wenn der Reifen mangelhaft ist und nicht entdeckt wird

Es ist $P(X = 16) = 0{,}75$ und $P(X = -8) = 0{,}25 \cdot 0{,}9 = 0{,}225$
und $P(X = -12) = 0{,}25 \cdot 0{,}1 = 0{,}025$.

Erwartungswert $E(X) = 16€ \cdot 0{,}75 - 8€ \cdot 0{,}225 - 12€ \cdot 0{,}025 = 9{,}90€$

Da der erwartete Gewinn gegenüber a) um 0,90 € angestiegen ist, darf das Prüfverfahren pro Reifen maximal 0,89 € kosten.

Aufgabe 4:

a) P("beide Kugeln haben keine unterschiedlichen Farben")

=P("beide Kugeln haben dieselbe Farbe") = P(rr, bb) $= \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{2}{5}$

b) Es handelt sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit $P_B(A)$.

Ereignis B: Die beiden Kugeln sind rot.
Ereignis A: Die Kugeln stammen aus der Schale.

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(\text{Schale und rr})}{P(\text{Schale und rr oder Urne und rr})}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}}=\frac{0{,}15}{0{,}2}=0{,}75$$

Aufgabe 5:

Die Münze hat die Seiten E (Wertseite der Münze) und B (Bildseite der Münze).
Es gilt $P(E)=P(B)=0{,}5$.

a) P(Jan gewinnt) = P(E) + P(BBE) = $0{,}5+0{,}5^3=\frac{5}{8}$

P(Anna gewinnt) = P(BE) + P(BBBE) = $0{,}5^2+0{,}5^4=\frac{5}{16}$

Hinweis: Die Wahrscheinlichkeit, dass keiner gewinnt beträgt $P(BBBB)=\frac{1}{16}$

b) P(Jan gewinnt) = P(BE) + P(BBE) = $0{,}5^2+0{,}5^3=\frac{3}{8}$

P(Anna gewinnt) = P(E) + P(BBBE) = $0{,}5+0{,}5^4=\frac{9}{16}$

Aufgabe 6:

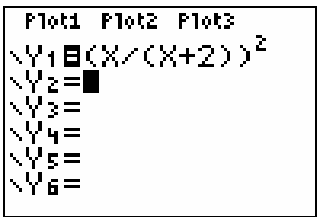
a) P(beide Kugeln sind weiß) = P(ww) = $\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4}=\frac{1}{4}$

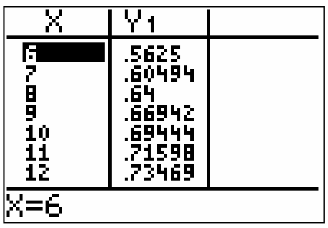
b) P(beide Kugeln sind weiß) = P(ww) = $\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$

c) x sei die Anzahl der weißen Kugeln im Behälter, 2 Kugeln sind weiterhin schwarz.

Insgesamt sind x + 2 Kugeln im Behälter. Es gilt $P(ww)=\left(\frac{x}{x+2}\right)^2$

Es soll gelten: $\left(\frac{x}{x+2}\right)^2\geq 0{,}64$





Anhand der Wertetabelle erkennt man, dass die Anzahl der weißen Kugeln auf mindestens 8 erhöht werden muss.

Aufgabe 7:

Die Zufallsvariable X, die die Anzahl der Ziehungen angibt, kann die Werte 1, 2, 3 und 4 annehmen.
Die Abkürzung "g" steht für eine gerade Zahl und "u" für eine ungerade Zahl.

Wahrscheinlichkeitsverteilung von X:

$P(X=1)=P(g)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ $\quad$ $P(X=2)=P(ug)=\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$

$P(X=3)=P(uug)=\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{20}$ $\quad$ $P(X=4)=P(uuug)=\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}=\frac{1}{20}$

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{3}{10}+3\cdot\frac{3}{20}+4\cdot\frac{1}{20}=1{,}75$$

Aufgabe 8:

a) Es gilt $P(X=1)=\frac{180}{360}=\frac{1}{2}$ und $P(X=2)=\frac{120}{360}=\frac{1}{3}$ und $P(X=3)=\frac{60}{360}=\frac{1}{6}$

Erwartungswert $E(X)=1€\cdot\frac{1}{2}+2€\cdot\frac{1}{3}+3€\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{3}€\approx 1{,}67€<2€$

Da die erwartete Auszahlung kleiner als der Einsatz 2€ ist, ist das Spiel nicht fair.

b) Die Auszahlung des bisherigen "2 € - Feldes" sei nun a €.

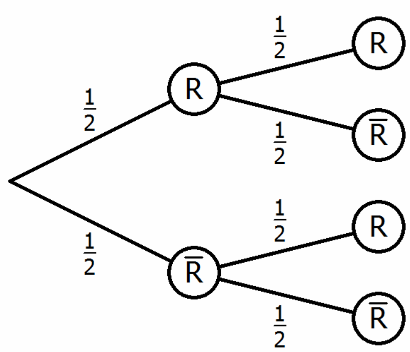
Damit das Spiel fair ist, muss E(X) = 2 € gelten.

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{2}+a\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{6}=2\Rightarrow 1+\frac{1}{3}a=2\Rightarrow a=3$$

Die Beschriftung müsste von 2 € auf 3 € geändert werden, damit das Spiel fair ist.

Aufgabe 9:

a) Die Schlussfolgerung des Meteorologen ist falsch.



P(es regnet am Wochende) = 1 - P(es regnet nicht am Wochenende)

$=1-P(\overline{R}\overline{R})=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=0{,}75=75\%$

Es regnet am Wochenende mit einer Wahrscheinlichkeit von 75%.

b) Der Erwartungswert wird folgendermaßen berechnet:

$E(X) = 0 \cdot a + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4}$.

Da die Zahl a mit 0 multipliziert wird, hat der Wert von a keinen Einfluss auf E(X).

Die Zahl a kann berechnet werden, da die Summe über alle Wahrscheinlichkeiten bei einer Wahrscheinlichkeitsverteilung 1 ergibt.

$$a + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{8}$$

Aufgabe 10:

a) Es gilt: P(Würfel zeigt grün) = p

P(Würfel zeigt viermal grün bei vier Würfen) = p^4

Es soll gelten: $p^4 = \frac{1}{81} \Rightarrow p = \sqrt[4]{\frac{1}{81}} = \frac{1}{3}$

Die Wahrscheinlichkeit für Rot ist daher $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Würfel Rot zeigt, ist daher mit $\frac{2}{3}$ doppelt so groß wie Grün mit $\frac{1}{3}$.

b) Das Ereignis A beschreibt folgende 4 Möglichkeiten: grgrr , rggrr, rrggr, rrgrg
Grün wird mit Wahrscheinlichkeit p gewürfelt und Rot mit Wahrscheinlichkeit 1 - p.

Der Term lautet $P(A) = 4 \cdot p^2 \cdot (1-p)^3$

Aufgabe 11:

Die Prozentzahlen werden in eine Vierfeldertafel eingetragen:

	Bremsen ok	Bremsen nicht ok	Summe
Beleuchtung ok	**50%**	10%	60%
Beleuchtung nicht ok	20%	20%	**40%**
Summe	**70%**	30%	**100%**

Aus der Vierfeldertafel kann man ablesen, dass bei 20% aller Fahrräder sowohl die Beleuchtung als auch die Bremsen nicht ok sind.

Bei der gesuchten Wahrscheinlichkeit handelt es sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit $P_B(A)$.

B: Fahrrad hat mangelhafte Beleuchtung
A: Fahrrad hat mangelhafte Bremsen

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,2}{0,4} = 0,5$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Fahrrad mit mangelhafter Beleuchtung auch die Bremsen Mängel haben, beträgt 50%.

Aufgabe 12:

Bei der gesuchten Wahrscheinlichkeit handelt es sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit $P_B(A)$.

B: Die Familie hat ein weibliches Kind.
A: Die Familie hat ein männliches Kind.

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(mw, wm)}{P(ww, wm, mw)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}5 + 0{,}5 \cdot 0{,}5}{1 - 0{,}5 \cdot 0{,}5} = \frac{0{,}5}{0{,}75} = \frac{2}{3}$$