Analysis

Ableitung, Änderungsrate, Tangente Teil 1

Gymnasium Klasse 10

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

April 2014

Aufgabe 1:
Bestimme die Ableitungsfunktion unter Verwendung bekannter Ableitungsregeln:
a) $f(x) = 4x^5 - 2\sqrt{x} + \frac{3}{x} + 8$ b) $f(x) = ax^b - a^b$ c) $f(t) = (2-3t)^2$ d) $f(a) = \frac{5a^2 - 4}{2a^2}$

Aufgabe 2:
Bestimme für die Funktion $f(x) = x^2 - x$, $x \in \mathbb{R}$ die Ableitung an der Stelle x durch eine Grenzwertbetrachtung.

Aufgabe 3:
Ein Bestand werde im Intervall $0 \le x \le 5$ durch die Funktion $f(x) = -0{,}5x \cdot (x-8)$ beschrieben.
Zeichne das Schaubild. Bestimme die mittlere Änderungsrate im Intervall $0 \le x \le 5$.
Bestimme die momentane Änderungsrate zum Zeitpunkt x = 3 näherungsweise zeichnerisch.
Bestimme sie mit Hilfe der Ableitung. Wann ist die momentane Änderungsrate 2 ?
Wann ist die momentane Änderungsrate am größten ?

Aufgabe 4:
Ein Wachstumsprozess werde durch die Funktion $f(t) = 0{,}5t^2 - t + 1$, $t \ge 0$ beschrieben.
a) Bestimme die mittlere Änderungsrate im Intervall [1;5].
b) Bestimme die momentane Änderungsrate zum Zeitpunkt t = 2.
c) Bestimme die Gleichung der Tangente an das Schaubild im Punkt P(3/f(3)).

Aufgabe 5:
a) Welche Tangente an das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = x^2 - 2x - 2$ hat die Steigung 2 ?
b) Berechne den Inhalt des Dreiecks, das von der Tangente aus a), der zugehörigen Normalen und der y-Achse begrenzt wird.

Aufgabe 6:
Bestimme eine Funktion f, deren Ableitungsfunktion
a) $f'(x) = 0{,}5$ b) $f'(x) = x - 1$ c) $f'(x) = \sqrt{x}$ ist.
Zeichne die Schaubilder von f' und f in ein Koordinatensystem.

Aufgabe 7:
Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2$. Ihr Schaubild sei K.
a) Zeichne K im Bereich $-1{,}5 \le x \le 4{,}5$. Verwende den GTR (Wertetabelle). Bestimme alle Punkte von K mit waagrechter Tangente.
b) Unter welchem Winkel schneidet die Tangente an K im Punkt N(4/0) die x-Achse ? Wie lautet die Gleichung der Orthogonalen zur Tangente durch N?

Aufgabe 8:
Warum lassen sich mit Hilfe der 1.Ableitung einer Funktion f Aussagen über Hoch- Tief- und Wendepunkte des Schaubildes von f machen ?
Erkläre anhand der Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x$.
Zeichne dazu ein Schaubild von f und das der Ableitungsfunktion in ein gemeinsames Koordinatensystem. Verwende den GTR.

Lösungen

Aufgabe 1:

a) $f(x)=4x^5-2\cdot x^{\frac{1}{2}}+3x^{-1}+8 \quad \Rightarrow f'(x)=20x^4-x^{-\frac{1}{2}}-3x^{-2}=20x^4-\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{3}{x^2}$

b) $f(x)=ax^b-a^b \quad \Rightarrow f'(x)=b\cdot ax^{b-1}$ (a^b fällt beim Ableiten weg !)

c) $f(t)=(2-3t)^2=4-12t+9t^2 \quad \Rightarrow f'(t)=-12+18t$

d) $f(a)=\frac{5a^2-4}{2a^2}=\frac{5a^2}{2a^2}-\frac{4}{2a^2}=\frac{5}{2}-\frac{2}{a^2}=\frac{5}{2}-2a^{-2} \quad \Rightarrow f'(a)=4a^{-3}=\frac{4}{a^3}$

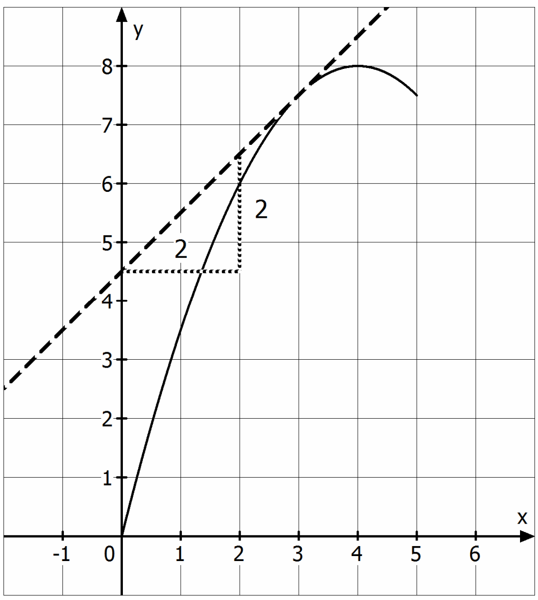
Aufgabe 2:

Die Berechnung der Ableitung erfolgt mit dem Ausdruck $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-(x+h)-(x^2-x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x-h-x^2+x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2-h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h\cdot(2x+h-1)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h-1)=2x-1=f'(x)$$

Aufgabe 3:



Mittlere Änderungsrate im Intervall $0\le x\le 5$: $\frac{f(5)-f(0)}{5-0}=\frac{7,5-5}{5-0}=1,5$

Momentane Änderungsrate bei x = 3 (zeichnerisch): $m_{Tangente}=\frac{2}{2}=1$

Es ist $f(x)=-0,5x^2+4x$ mit der Ableitungsfunktion $f'(x)=-x+4$

Momentane Änderungsrate bei x = 3 (rechnerisch): $f'(3)=1$

Die momentane Änderungsrate ist 2, wenn gilt $f'(x) = 2$
$-x + 4 = 2 \Leftrightarrow x = 2$

Die momentane Änderungsrate ist an der Stelle am größten, an der die Tangentensteigung an die Parabel maximal wird.
Dies ist an der Stelle x = 0 der Fall.

Andere Überlegung:
Gesucht ist der Wert von x, bei dem das Schaubild von $f'(x) = -x + 4$ maximal wird.
Diese Gerade hat im Intervall $0 \le x \le 5$ ihr Maximum bei x = 0.

Aufgabe 4:

Es ist $f(t) = 0,5t^2 - t + 1$ mit der Ableitungsfunktion $f'(t) = t - 1$

a) Mittlere Änderungsrate im Intervall $1 \le t \le 5$: $\frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{8,5 - 0,5}{4} = 2$

b) Momentane Änderungsrate bei t = 2: $f'(2) = 1$

c) Die allgemeine Tangentenformel lautet $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$
Die Berührstelle soll u = 3 sein.

Gleichung der Tangente: $y = f'(3) \cdot (x - 3) + f(3)$ mit $f'(3) = 2$ und $f(3) = 2,5$
$\Rightarrow y = 2(x - 3) + 2,5$
Die Tangentengleichung in P lautet $y = 2x - 3,5$

Aufgabe 5:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 - 2x - 2$ mit der Ableitungsfunktion $f'(x) = 2x - 2$

a) Anhand der gegebenen Tangentensteigung kann die Berührstelle berechnet werden.
Ansatz: $f'(x) = 2 \quad \Leftrightarrow 2x - 2 = 2 \Leftrightarrow x = 2$

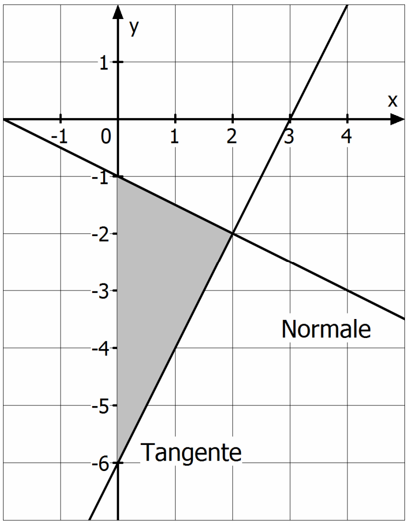
Ansatz für die Tangentengleichung: $y = f'(2) \cdot (x - 2) + f(2)$ mit $f'(2) = 2$ und $f(2) = -2$
$\Rightarrow y = 2(x - 2) - 2$
Die Tangentengleichung lautet $y = 2x - 6$

b) Zunächst wird die Gleichung der Normalen ermittelt:

Ansatz für die Normalengleichung: $y = -\frac{1}{f'(2)}(x - 2) + f(2)$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}(x - 2) - 2$
Die Normalengleichung lautet $y = -0,5x - 1$

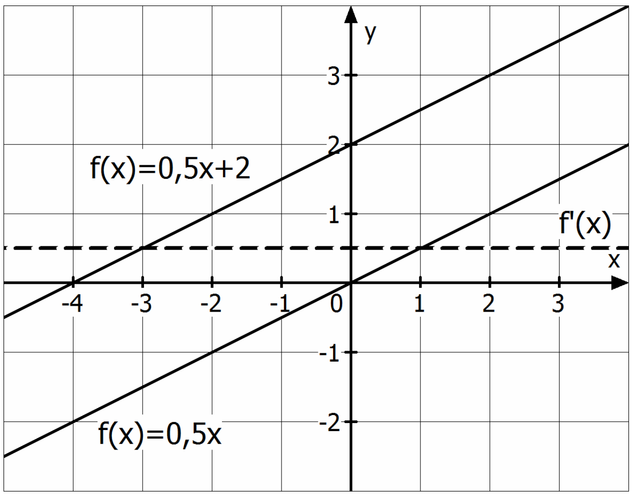
Um die Dreiecksfläche zu berechnen, zeichnet man die Tangente und die Normale in ein Koordinatensystem ein:



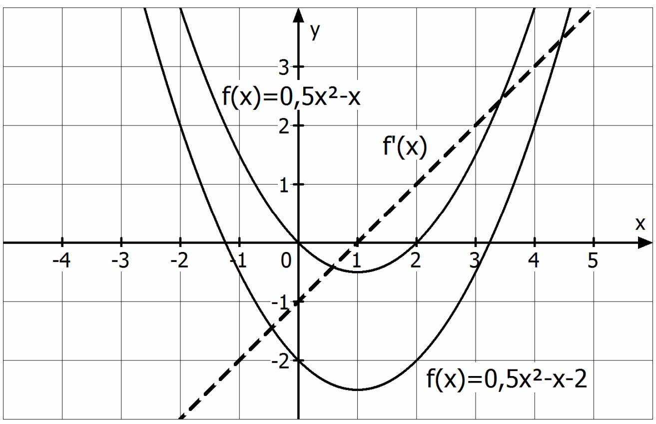
$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 = 5$ Flächeneinheiten

Aufgabe 6:

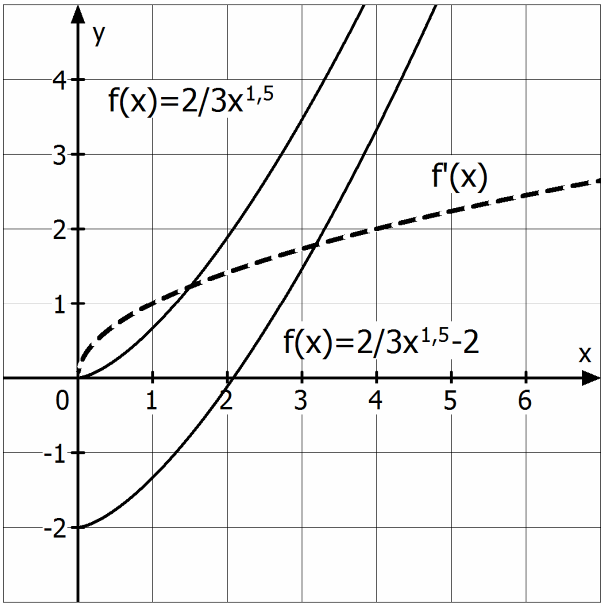
a) Wenn $f'(x) = 0,5$ ist, dann ist $f(x) = 0,5x + C$, wobei C eine beliebige Zahl sein kann.
Es gibt daher unendlich viele Funktionen f.



b) Wenn $f'(x) = x - 1$ ist, dann ist $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + C$, wobei C eine beliebige Zahl sein kann.
Es gibt daher unendlich viele Funktionen f.



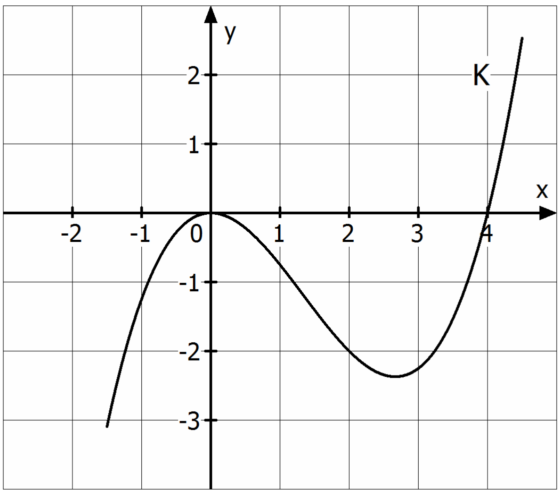
c) Wenn $f'(x) = \sqrt{x} = x^{0,5}$ ist, dann ist $f(x) = \frac{2}{3}x^{1,5} + C$, wobei C eine beliebige Zahl sein kann.
Es gibt daher unendlich viele Funktionen f.



Aufgabe 7:

Es ist $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2$ und $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x$

a) Zeichnung:



Berechnung der Punkte mit waagrechter Tangente:

Die Bedingung lautet $f'(x) = 0$: $\frac{3}{4}x^2 - 2x = 0 \quad \Leftrightarrow x \cdot (\frac{3}{4}x - 2) = 0$

Mit dem Satz vom Nullprodukt folgt x = 0 oder $\frac{3}{4}x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$

Mit $f(0) = 0$ lautet der erste Punkt P(0/0).

Mit $f(\frac{8}{3}) = -\frac{64}{27}$ lautet der zweite Punkt $Q(\frac{8}{3} / -\frac{64}{27})$

b) Gleichung der Tangente an der Berührstelle x = 4: $y = f'(4) \cdot (x-4) + f(4)$
Es ist f(4) = 0 und $f'(4) = 4$.

Die Tangentengleichung lautet $y = 4(x-4) + 0 \Rightarrow y = 4x - 16$

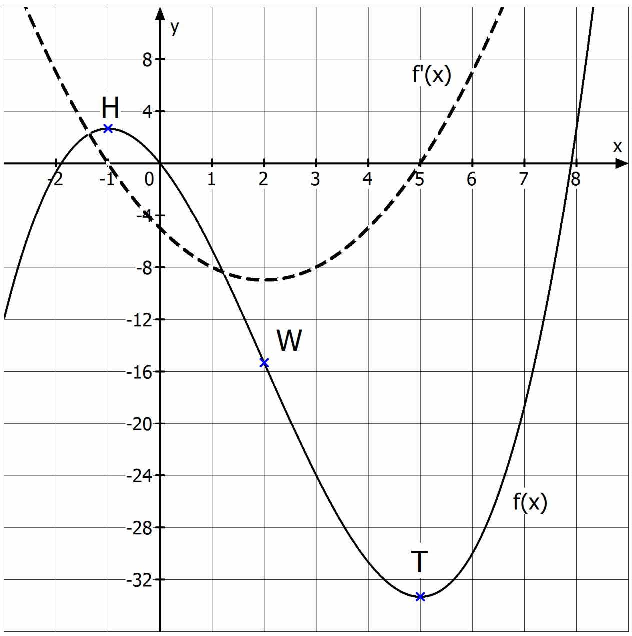
Der Winkel der Tangente mit der x-Achse ergibt sich aus dem Ansatz $\tan\alpha = m_{Tangente}$
$\tan\alpha = 4 \Rightarrow \alpha \approx 76°$

Gleichung der Orthogonalen zur Tangente durch N:
Dies ist die Normale zur Tangente mit der Gleichung $y = -\frac{1}{f'(4)}(x-4) + f(4)$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{4}(x-4) + 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x + 1$

Aufgabe 8:

Zeichnung der Funktionen $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x$ und $f'(x) = x^2 - 4x - 5$



Der Hochpunkt H von f(x) befindet sich an der Stelle x = -1.
Dort besitzt das Schaubild der Ableitungsfunktion eine Nullstelle mit einem Vorzeichenwechsel von + nach -

Der Tiefpunkt T von f(x) befindet sich an der Stelle x = 5.
Dort besitzt das Schaubild der Ableitungsfunktion eine Nullstelle mit einem Vorzeichenwechsel von - nach +.

Der Wendepunkt W von f(x) befindet sich an der Stelle x = 2.
In einem Wendepunkt besitzt das Schaubild eine minimale oder maximale Steigung.
Dort besitzt das Schaubild der Ableitungsfunktion somit ein Minimum (was hier der Fall ist) oder ein Maximum.