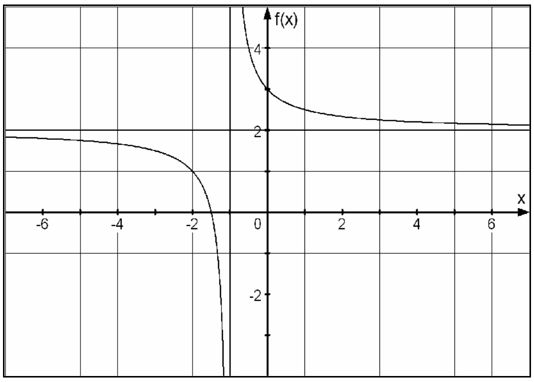
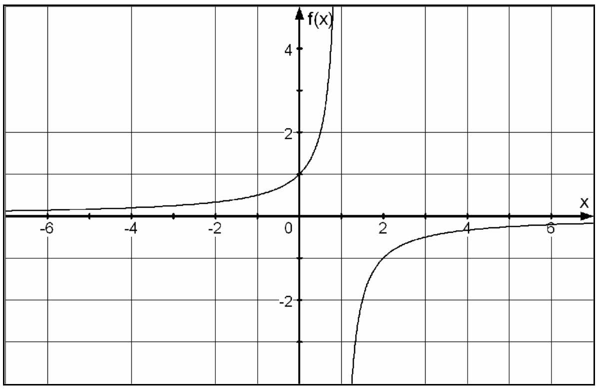
# Lösungen zum Pflichtteil (ohne GTR und Formelsammlung)
# Gebrochenrationale Funktionen

**Aufgabe 1:**

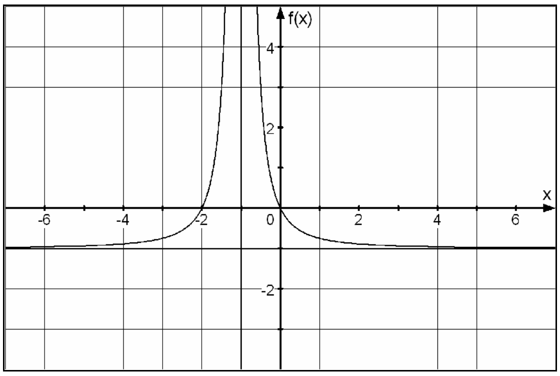
a) waagr. Asymptote: y = 2,
senkr. Asymptote: x = -1 mit VZW



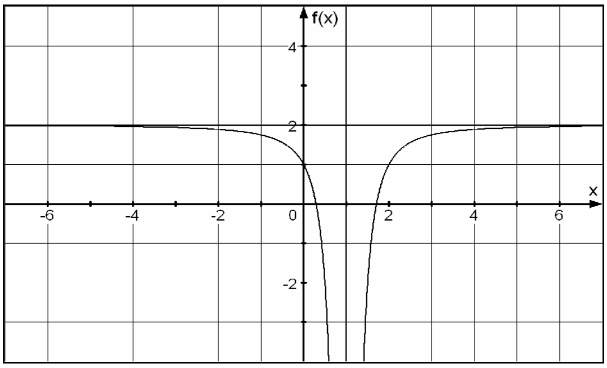

b) waagr. Asymptote: y = 0
senkr. Asymptote: x = 1 mit VZW




c) waagr. Asymptote: y = -1,
senkr. Asymptote: x = -1 ohne VZW




d) waagr. Asymptote: y = 2
senkr. Asymptote: x = 1 ohne VZW




**Aufgabe 2:**

a) Ansatz, in dem nur die Asymptoteninformationen enthalten sind:

$f(x) = \frac{4x + a}{x - 1}$ , a beliebige reelle Zahl

Punktbedingung: $f(2) = 6 \Rightarrow \frac{8 + a}{1} = 6 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow f(x) = \frac{4x - 2}{x - 1}$

b) Ansatz, in dem nur die Asymptoteninformationen enthalten sind:

$f(x) = x + 1 + \frac{a}{(x - 2)^2}$ , a beliebige reelle Zahl

(da der Pol ohne VZW sein soll, muss der Linearfaktor im Nenner quadriert werden)

Punktbedingung: $f(3) = 2 \Rightarrow 4 + \frac{a}{1^2} = 2 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow f(x) = x + 1 + \frac{-2}{(x - 2)^2}$

c) Ansatz, in dem nur die Asymptoteninformationen enthalten sind:

$f(x)=2x-3+\frac{a}{(x-1)(x+1)}$ , a beliebige reelle Zahl

Punktbedingung: $f(2)=3\Rightarrow 4-3+\frac{a}{3}=3\Rightarrow a=6\Rightarrow f(x)=2x-3+\frac{6}{(x-1)(x+1)}$

d) Ansatz, in dem nur die Asymptoteninformationen enthalten sind:

$f(x)=\frac{a}{x-2}$, a beliebige reelle Zahl

Punktbedingung: $f(0)=4\Rightarrow \frac{a}{-2}=4\Rightarrow a=-8\Rightarrow f(x)=\frac{-8}{x-2}$

e) Ansatz, in dem nur die Asymptoten- und Näherungskurveninformationen enthalten sind:

$f(x)=x^2+1+\frac{a}{x+1}$ , a beliebige reelle Zahl

Punktbedingung: $f(2)=4\Rightarrow 4+1+\frac{a}{3}=4\Rightarrow a=-3\Rightarrow f(x)=x^2+1+\frac{-3}{x+1}$

f) $f(x)=\frac{(x-3)}{(x-1)(x-3)}$

Da bei x = 3 eine hebbare Lücke vorliegen soll, muss sich der Linearfaktor (x-3) herauskürzen lassen.

**Aufgabe 3:**

a) senkrechte Asymptote x = -1 mit VZW, waagrechte Asymptote y = -1

Funktionsansatz: $f(x)=\frac{-x+a}{x+1}$, a beliebige reelle Zahl

Punktinformation aus Schaubild: P(0/0), also $f(0)=\frac{a}{1}=0\Rightarrow a=0\Rightarrow f(x)=\frac{-x}{x+1}$

b) schiefe Asymptote y = 0,5x-1, senkrechte Asymptote x = 1 ohne VZW

Funktionsansatz: $f(x)=0{,}5x-1+\frac{a}{(x-1)^2}$, a beliebige reelle Zahl

Punktinformation aus Schaubild: P(0/2), also $f(0)=-1+\frac{a}{1}=2\Rightarrow a=3$

also $f(x)=0{,}5x-1+\frac{3}{(x-1)^2}$

c) senkrechte Asymptoten x = -2 und x = 2 ohne VZW, waagr. Asymptote y = 1

Funktionsansatz: $f(x)=\frac{x^2+a}{(x-2)(x+2)}$ , a beliebige reelle Zahl

Punktinformation aus Schaubild: P(0/0), also $f(0)=\frac{a}{-4}=0\Rightarrow a=0$

also $f(x)=\frac{x^2}{(x-2)(x+2)}$

d) senkrechte Asymptote x = 1 ohne VZW, waagrechte Asymptote y = 1

Funktionsansatz: $f(x)=\frac{x^2+a}{(x-1)^2}$, a beliebige reelle Zahl

Punktinformation aus Schaubild P(0/2), also $f(0)=\frac{a}{1}=2\Rightarrow a=2$

also $f(x)=\frac{x^2+2}{(x-1)^2}$

**Aufgabe 4:**

a) $f'(x)=\frac{0\cdot(3x+1)^2-4\cdot 2(3x+1)\cdot 3}{(3x+1)^4}=\frac{-24}{(3x+1)^3}$

b) $f'(x)=\frac{a(x^2+a)-ax\cdot 2x}{(x^2+a)^2}=\frac{-ax^2+a^2}{(x^2+a)^2}$

c) $f'(x)=\frac{(6x+2)(x^2-1)-(3x^2+2x-1)2x}{(x^2-1)^2}=\frac{-2x^2-4x-2}{(x^2-1)^2}$

d) $f'(x)=\frac{1(4x+2)^3-x\cdot 3(4x+2)^2\cdot 4}{(4x+2)^6}=\frac{(4x+2)-12x}{(4x+2)^4}=\frac{-8x+2}{(4x+2)^4}$

e) $f'(x)=\frac{2(1-\sin(x))-2x\cdot(-\cos(x))}{(1-\sin(x))^2}=\frac{2-2\sin(x)+2x\cos(x)}{(1-\sin(x))^2}$

f) $f'(x)=2x\cdot\sin(4x+3)+x^2\cdot\cos(4x+3)\cdot 4$

g) $f'(x)=3\cdot(x^2-\frac{1}{x})^2\cdot(2x+\frac{1}{x^2})$

h) $f(x)=(x^3-x^2)^{0,5}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}(x^3-x^2)^{-0,5}\cdot(3x^2-2x)$

i) $f'(x)=\cos(\frac{1}{x^2+1})\cdot\frac{0\cdot(x^2+1)-1\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\cos(\frac{1}{x^2+1})\cdot\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$

**Aufgabe 5:**

Für den maximalen Definitionsbereich müssen die Definitionslücken ermittelt werden.

a) $x^2-5x+6=0\Rightarrow x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}$ also x = 3 oder x = 2.
D = R \ {2 ;3 }

b) $x^2+1=0$ besitzt keine Lösung, also D = R

c) $x^3-3x^2+2=0$
Ausklammern und Substitution ist nicht möglich, also muss zunächst eine Lösung erraten werden: $x_1=1$
Polynomdivision: $(x^3-3x^2+2):(x-1)=x^2-2x-2$
$x^2-2x-2=0\Rightarrow x_{2,3}=\frac{2\pm\sqrt{4+8}}{2}=1\pm\sqrt{3}$, also D = R \ {1 ; $1\pm\sqrt{3}$ }

**Aufgabe 6:**

a) Eine Definitionslücke einer gebrochenrationalen Funktion ist eine Nullstelle des Nennerpolynoms. Da man nicht durch Null dividieren darf, muss man diese Nullstellen aus der Definitionsmenge ausschließen.

b) Eine Polstelle ist eine Definitionslücke, bei der eine senkrechte Asymptote auftritt. Dies ist genau dann der Fall, wenn sich der Linearfaktor im Nenner, der diese Definitionslücke verursacht nicht im Nenner komplett herauskürzen lässt.
Es gibt Polstellen mit Vorzeichenwechsel und Polstellen ohne Vorzeichenwechsel.

c) Eine Polstelle ist eine spezielle Definitionslücke.

d) Eine hebbare Lücke ist eine Definitionslücke, die in dem Schaubild anschaulich ein „kleines Loch“ ergibt. Dies ist genau dann der Fall, wenn sich der Linearfaktor im Nenner, der diese Definitionslücke verursacht, im Nenner komplett herauskürzen lässt.

e) Eine waagrechte Asymptote y = 0 liegt vor, wenn der Zählergrad der gebrochenrationalen Funktion kleiner als der Nennergrad ist. Dadurch wächst für $x \to \pm\infty$ der Nenner schneller als der Zähler und der Grenzwert der Funktion ist Null.

**Aufgabe 7:**

a) $f(x) = 6 - 8x^{-3} \Rightarrow F(x) = 6x + 4x^{-2}$

b) $f(x) = 6 \cdot (2x+3)^{-3} \Rightarrow F(x) = -3(2x+3)^{-2} \cdot \frac{1}{2} = -1{,}5(2x+3)^{-2}$

c) $F(x) = 4 \cdot \ln|2x+3| \cdot \frac{1}{2} = 2\ln|2x+3|$

d) $F(x) = \frac{2}{4}(3x+4)^4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}(3x+4)^4$

e) $f(x) = x^4 + 4x^2 + 4 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 + 4x$

f) $F(x) = -\cos(3x-1) \cdot \frac{1}{3}$

g) $f(x) = \frac{2x^2}{3x^4} + \frac{4x}{3x^4} - \frac{1}{3x^4} = \frac{2}{3}x^{-2} + \frac{4}{3}x^{-3} - \frac{1}{3}x^{-4} \Rightarrow F(x) = -\frac{2}{3}x^{-1} - \frac{2}{3}x^{-2} + \frac{1}{9}x^{-3}$

h) $f(x) = \frac{2x^2}{3x^3} + \frac{1}{3x^3} = \frac{2}{3}x^{-1} + \frac{1}{3}x^{-3} \Rightarrow F(x) = \frac{2}{3} \cdot \ln|x| - \frac{1}{6}x^{-2}$

i) $f(x) = 4 \cdot (2x-1)^{-3} \Rightarrow F(x) = -2(2x-1)^{-2} \cdot \frac{1}{2} + C = -\frac{1}{(2x-1)^2} + C$

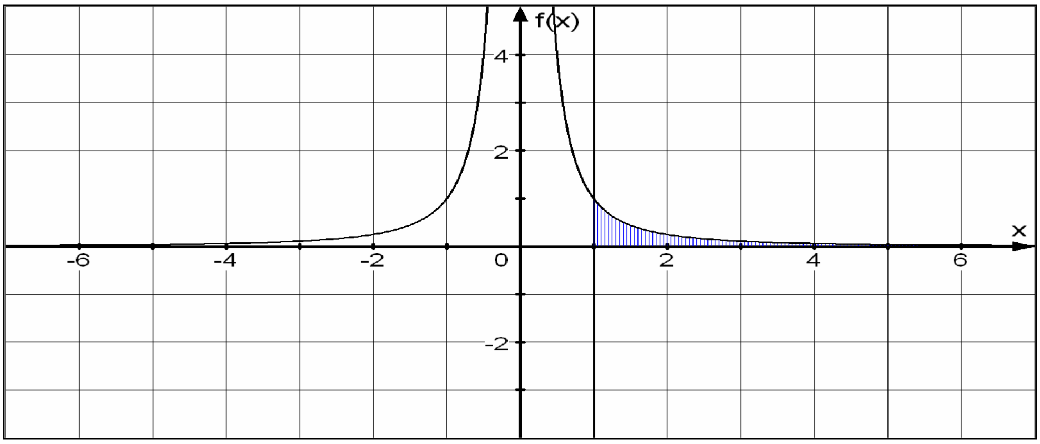
Mit F(1) = 3 folgt $F(1) = -\frac{1}{1} + C = 3 \Rightarrow C = 4 \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{(2x-1)^2} + 4$

**Aufgabe 8:**

a) Volumen des Rotationskörpers:

$$V = \pi \cdot \int_1^2 \left(\frac{2}{x}\right)^2 dx = \pi \cdot \int_1^2 4x^{-2} dx = \pi \cdot \left[-4x^{-1}\right]_1^2 = \pi \cdot \left[-\frac{4}{x}\right]_1^2 = \pi \cdot (-2+4) = 2\pi$$

b)




Die nach rechts offene Fläche wird zunächst durch eine senkrechte Gerade x = z für z > 1nach rechts begrenzt.

$$A(z) = \int_1^z \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^z = -\frac{1}{z} + 1$$

Für $z \to \infty$ git $A(z) \to 1$, also besitzt diese Fläche den endlichen Flächeninhalt 1.

**Aufgabe 9:**

Es gilt $f(x) = \frac{3}{x-1}$. Aus f(2) = 3 folgt P(2/3).

Mit $f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2}$ folgt $m_{tang} = f'(2) = -3$

Tangentengleichung mit Punkt-Steigungs-Form: $y - 3 = -3(x-2) \Rightarrow y = -3x + 9$

Steigung der Normalen: $m_{Norm} = -\frac{1}{m_{tang}} = \frac{1}{3}$

Normalengleichung mit Punkt-Steigungs-Form: $y - 3 = \frac{1}{3}(x-2) \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

**Aufgabe 10:**

a) $f(x) = \frac{3x}{x-1}$

waagrechte Asymptote y = 3, da Zählergrad = Nennergrad
senkrechte Asymptote = Polstelle bei x = 1 (da x = 1 in den Zähler eingesetzt nicht Null ergibt und somit der Linearfaktor im Nenner nicht kürzbar ist)

b) $f(x)=\frac{x^2+4x+5}{x-3}$

schiefe Asymptote mit Polynomdivision: $(x^2+4x+5):(x-3)=x+7+\frac{26}{x-3}$

also y = x+7
senkrechte Asymptote = Polstelle bei x = 3 (Begründung wie in a))

c) $f(x)=x-1+\frac{3}{x}$

schiefe Asymptote: y = x – 1 (es steht schon das Polynomdivisionsergebnis da)
senkrechte Asymptote = Polstelle bei x = 0 (Begründung wie in a))

d) $f(x)=\frac{2(x-2)(x-3)}{3(x-2)(x+4)}$

waagrechte Asymptote $y=\frac{2}{3}$ (da Zählergrad = Nennergrad)

senkrechte Asymptote = Polstelle bei x = -4, da (x+4) nicht kürzbar
hebbare Lücke bei x = 2, da (x-2) aus Nenner komplett kürzbar

e) $f(x)=\frac{x^3+2x}{x-1}$

Näherungskurve mit Polynomdivision: $(x^3+2x):(x-1)=x^2+x+3+\frac{3}{x-1}$

also y = $x^2+x+3$
senkrechte Asymptote = Polstelle bei x = 1 (Begründung wie in a))

f) $f(x)=\frac{3x+1}{(x-4)(x+1)}$

waagrechte Asymptote y = 0 (da Zählergrad < Nennergrad)
senkrechte Asymptoten = Polstellen bei x = -1 und x = 4 (Begründung wie in a))