Analytische Geometrie

Übungsaufgaben
Abstand windschiefer Geraden

Oberstufe

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

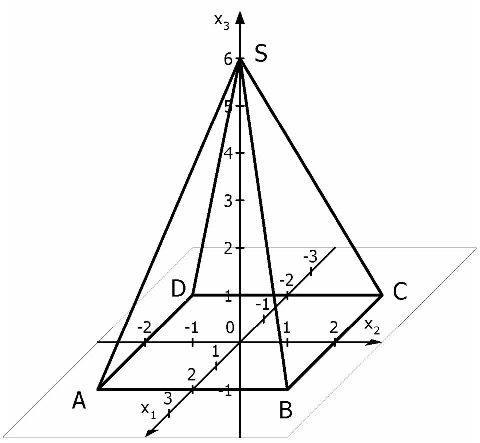
November 2015

Aufgabe 1:
Berechne den Abstand der windschiefen Geraden g und h.

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2:
Die Figur zeigt eine quadratische Pyramide mit der Grundseite 4 cm und der Höhe 6 cm.
Bestimme den Abstand der Grundflächenkante $\overline{AB}$ von der Seitenkante $\overline{CS}$



Aufgabe 3:
Eine Kugel rollt auf einer Schiene, der im Koordinatensystem die Gerade
g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ entspricht. Wie groß darf der Radius der Kugel höchstens sein, damit sie unter einer zweiten Schiene durchrollen kann, der im Koordinatensystem die Gerade
h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ entspricht ?

Lösungen

Aufgabe 1:

a) allgemeiner Geradenpunkt auf g: G(-1/-7+2s/6-s)
allgemeiner Geradenpunkt auf h: H(6+3t/1+2t/2t)

Bedingung: Der Vektor $\overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} 7+3t \\ 8+2t-2s \\ -6+2t+s \end{pmatrix}$ muss orthogonal zu den Richungsvektoren der Geraden g und h stehen:

$$\begin{pmatrix} 7+3t \\ 8+2t-2s \\ -6+2t+s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 16+4t-4s+6-2t-s=0 \Rightarrow 22+2t-5s=0$$

$$\begin{pmatrix} 7+3t \\ 8+2t-2s \\ -6+2t+s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 21+9t+16+4t-4s-12+4t+2s=0 \Rightarrow 25+17t-2s=0$$

Das Gleichungssystem besitzt die Lösung t = -1 und s = 4 (GTR).

Einsetzen der Parameterwerte in die Punkte ergibt
G(-1/1/2) und H(3/-1/-2).

Abstand der windschiefen Geraden = $\left|\overrightarrow{GH}\right| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+4+16} = 6$

b) allgemeiner Geradenpunkt auf g: G(2+s/1+s/-8-s)
allgemeiner Geradenpunkt auf h: H(-4-t/2-4t/-1+6t)

Bedingung: Der Vektor $\overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} -6-t-s \\ 1-4t-s \\ 7+6t+s \end{pmatrix}$ muss orthogonal zu den Richungsvektoren der Geraden g und h stehen:

$$\begin{pmatrix} -6-t-s \\ 1-4t-s \\ 7+6t+s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -6-t-s+1-4t-s-7-6t-s=0 \Rightarrow -12-11t-3s=0$$

$$\begin{pmatrix} -6-t-s \\ 1-4t-s \\ 7+6t+s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 6+t+s-4+16t+4s+42+36t+6s=0 \Rightarrow 44+53t+11s=0$$

Das Gleichungssystem besitzt die Lösung t = 0 und s = -4 (GTR).

Einsetzen der Parameterwerte in die Punkte ergibt
G(-2/-3/-4) und H(-4/2/-1).

Abstand der windschiefen Geraden = $\left|\overrightarrow{GH}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+25+9} = \sqrt{38}$

Aufgabe 2:

Der Abstand der beiden Kanten entspricht dem Abstand der windschiefen Geraden durch A(2/-2/0) und B(2/2/0) bzw. durch C(-2/2/0) und S(0/0/6).

Geradengleichung durch A und B: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Geradengleichung durch C und S: h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$

allgemeiner Geradenpunkt auf g: G(2/-2+4s/0)
allgemeiner Geradenpunkt auf h: H(-2+2t/2-2t/6t)

Bedingung: Der Vektor $\overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} -4+2t \\ 4-2t-4s \\ 6t \end{pmatrix}$ muss orthogonal zu den Richtungsvektoren der Geraden g und h stehen:

$$\begin{pmatrix} -4+2t \\ 4-2t-4s \\ 6t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 16-8t-16s=0$$

$$\begin{pmatrix} -4+2t \\ 4-2t-4s \\ 6t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -8+4t-8+4t+8s+36t=0 \Rightarrow -16+8s+44t=0$$

Das Gleichungssystem besitzt die Lösung s = 0,9 und t = 0,2 (GTR).

Einsetzen der Parameterwerte in die Punkte ergibt
G(2/1,6/0) und H(-1,6/1,6/1,2).

Abstand der windschiefen Geraden = $\left|\overrightarrow{GH}\right| = \left|\begin{pmatrix} -3{,}6 \\ 0 \\ 1{,}2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{12{,}96+1{,}44} = \sqrt{14{,}4}$

Aufgabe 3:

Den Radius der Kugel erhält man aus dem Abstand der beiden Geraden g und h.

Zunächst muss geprüft werden, wie die Geraden zueinander liegen.

Die Richtungsvektoren der beiden Geraden sind keine Vielfachen zueinander, daher sind die Geraden nicht parallel.

Prüfung, ob sich die beiden Geraden schneiden:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aus der 2.Zeile folgt: $2 = -6 + 2t \Rightarrow t = 4$
Aus der 1.Zeile folgt: $-1 - s = 2t \Rightarrow s = -1 - 2t = -9$
Aus der 3.Zeile folgt: $-7 + (-9) = 6 - 4$ dies ist ein Widerspruch

Somit sind die beiden Geraden zueinander windschief und es ist der Abstand zweier windschiefer Geraden gesucht.

allgemeiner Geradenpunkt auf g: G(-1-s/2/-7+s)
allgemeiner Geradenpunkt auf h: H(2t/-6+2t/6-t)

Bedingung: Der Vektor $\overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} 1 + 2t + s \\ -8 + 2t \\ 13 - t - s \end{pmatrix}$ muss orthogonal zu den Richtungsvektoren der Geraden g und h stehen:

$$\begin{pmatrix} 1 + 2t + s \\ -8 + 2t \\ 13 - t - s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -1 - 2t - s + 13 - t - s = 0 \Rightarrow 12 - 3t - 2s = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 + 2t + s \\ -8 + 2t \\ 13 - t - s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2 + 4t + 2s - 16 + 4t - 13 + t + s = 0 \Rightarrow -27 + 9t + 3s = 0$$

Das Gleichungssystem besitzt die Lösung s = 3 und t = 2 (GTR).

Einsetzen der Parameterwerte in die Punkte ergibt
G(-4/2/-4) und H(4/-2/4).

Abstand der windschiefen Geraden = $\left|\overrightarrow{GH}\right| = \left|\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{64 + 16 + 64} = 12$

Dieser Abstand entspricht dem maximalen Durchmesser der Kugel.
Der Radius der Kugel darf maximal 6 LE betragen.