Analysis

Übungsaufgaben zu Extremwertaufgaben (Optimierungsprobleme)

Gymnasium J1

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Dezember 2015

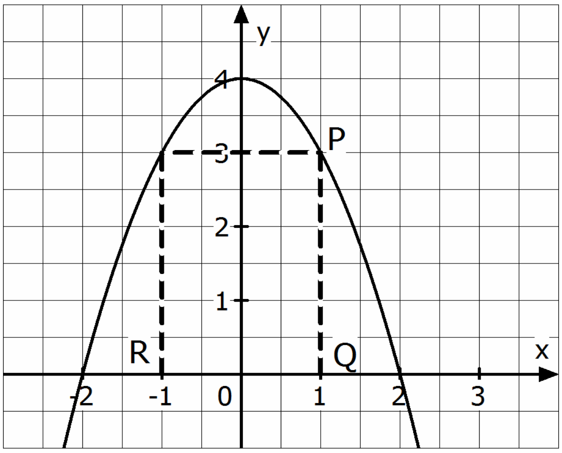
Teil A: Ganzrationale Funktionen

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Funktion mit $f(x) = -x^2 + 4$, $x \in]-2;2[$

Die Abbildung zeigt ihr Schaubild. Dem Schaubild wird ein achsenparalleles Rechteck einbeschrieben, wobei der Punkt P einer der Eckpunktes des Rechtecks ist.
Wie müssen die Koordinaten des Punktes P gewählt werden, damit

a) der Umfang des Rechtecks maximal wird ?
b) der Inhalt des Rechtecks maximal wird ?
c) das Volumen des Drehkörpers, der bei einer Rotation des Rechtecks um die y-Achse entsteht, extremal wird ?
d) das Volumen des Drehkörpers, der bei einer Rotation des Rechtecks um die x-Achse entsteht, extremal wird ?



Aufgabe 2:

P(u/v) sei ein beliebiger Punkt auf der Parabel mit der Gleichung $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ mit $-2 \le x \le 2$. Gemeinsam mit den Punkten A(-2/0) und B(u/0) bildet er ein Dreieck ABP.

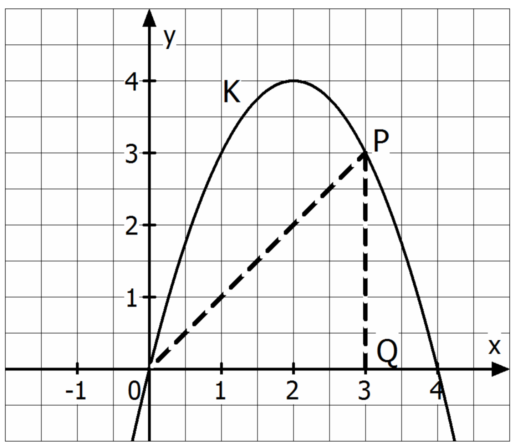
a) Bestimme P so, dass das Dreieck ABP den größtmöglichen Flächeninhalt hat. Wie groß ist der maximale Flächeninhalt ?
b) Für welchen Punkt P ist im Dreieck ABP die Summe der Kathetenlängen maximal ?
c) Wenn sich ein Dreieck ABP um die x-Achse dreht, so entsteht ein Kegel. Wie groß kann der Rauminhalt eines solchen Kegels höchstens werden ?

Aufgabe 3:

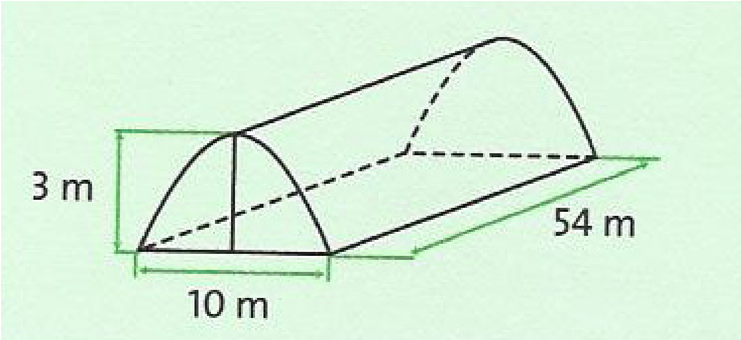
Gegeben ist die Funktion f mit
$f(x) = -x^2 + 4x$, $x \in \mathbb{R}$

Ihr Schaubild ist die Kurve K. Die Punkte O(0/0), Q(a/0) und der Kurvenpunkt P(a/f(a)) mit 0 < a < 4 bilden ein Dreieck.

Wie muss a gewählt werden, damit der Inhalt des Dreiecks OPQ maximal wird ? Gib den maximalen Flächeninhalt an.



Aufgabe 4:
Ein Zelt ist 54 m lang, 10 m breit und in der Mitte 3 m hoch.
Die Begrenzungskurve des Zeltes ist eine Parabel.



a) Bestimme eine Funktionsgleichung für die Begrenzungskurve.

Für die folgenden Aufgaben sei die Begrenzungskurve die Funktion $f(x) = -\frac{3}{25}x^2 + 3$

b) Berechne ohne GTR den Rauminhalt des Zeltes.

c) In die Vorder- und Rückwand des Zeltes soll jeweils eine rechteckige Toröffnung eingebaut werden.
Berechne die exakte Höhe und Breite der Öffnung so, dass diese Fläche maximal wird.

Teil B: Exponentialfunktionen

Aufgabe 5:
Gegeben ist die Funktion f mit der folgenden Funktionsgleichung

$$f(x) = (x+1) \cdot e^{-2x}$$

Das Schaubild von f heißt K.

a) Die Gerade x = u mit $u \in [-1;0]$ schneidet das Schaubild K im Punkt P und die x-Achse in R. Die beiden Punkte bilden gemeinsam mit dem Ursprung und dem Schnittpunkt des Schaubildes von f mit der y-Achse ein Trapez. Für welchen Wert von u wird der Flächeninhalt des Trapezes maximal ?
b) Der Punkt M liegt auf dem Schaubild K im 1.Quadranten. Wie muss der Punkt M gewählt werden, damit sein Abstand zum Ursprung minimal wird ?
c) Das Schaubild G ist gegeben durch die Funktionsgleichung $g(x) = \frac{2}{3}(x+1) \cdot e^{-3x}$.
Die Gerade x = u mit $u \in [-1;3]$ schneidet G in R und K im Punkt P. Für welchen Wert von u ist die Strecke PR maximal ? Gebe die Strecke an.

Aufgabe 6:
Bestimme den x-Wert desjenigen Punktes P auf der Kurve K: $y = e^x$, der vom Koordinatenursprung den kleinsten Abstand hat, auf zwei Dezimalen genau.
Gib den kleinsten Abstand an.

Teil C: Trigonometrische Funktionen

Aufgabe 7:
Gegeben ist das Schaubild der Funktion f mit folgender Funktionsgleichung

$$f(x) = 3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

Das Schaubild von f heißt K.

a) Die Gerade, die durch den Ursprung und den 1.Hochpunkt verläuft heißt g. Die Gerade x = u mit 0 < u < 1 schneidet K im Punkt P und die Gerade g im Punkt Q.
Die beiden Punkte bilden mit dem Ursprung ein Dreieck. Für welchen Wert von u wird die Fläche maximal ?

b) Eine Parallele zur x-Achse schneidet K im 1.Quadranten mehrmals. Die ersten beiden Schnittpunkte bilden mit ihren Projektionen auf die x-Achse ein Rechteck.
Bestimme den maximalen Flächeninhalt des Rechtecks.

Teil D: Allgemein

Aufgabe 8:
Gesucht ist eine positive Zahl, für welche die Summe aus deren Quadrat und deren Kehrwert minimal wird.

Aufgabe 9:
Aus einem 120cm langen Draht soll das Kantenmodell eines Quaders hergestellt werden, bei dem eine Kante dreimal so lang wie eine andere und der Rauminhalt möglichst groß ist. Bestimme das maximale Volumen.

Aufgabe 10:
Ein Draht der Länge 40 cm wird zu einem Rechteck gebogen. Dieses soll dann um eine der Seiten rotieren. Bei welchen Abmessungen hat der entstehende Zylinder größtes Volumen ?

Aufgabe 11:
Einer Halbkugel mit Radius r = 8 cm ist ein gerader Kreiskegel mit größtmöglichem Volumen so einzubeschreiben, dass die Kegelspitze mit dem Kugelmittelpunkt zusammenfällt.
Welche Abmessungen hat der Kegel ?

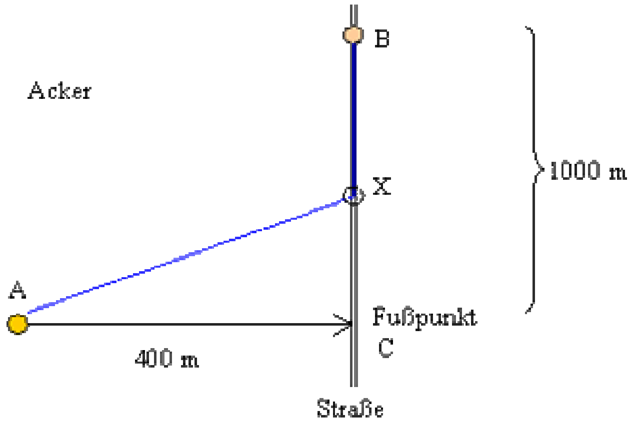
Aufgabe 12:
Einem gleichschenkligen Dreieck mit der Grundseite c = 12 cm und der Schenkellänge a = b = 18 cm ist ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt einzubeschreiben.
Berechne die Seitenlängen des Rechtecks.

Aufgabe 13:
Einem Kegel mit Grundkreisradius R = 5 cm und der Höhe H = 10 cm ist ein Zylinder so einzubeschreiben, dass er ein möglichst großes Volumen hat.

Aufgabe 14:
Der Querschnitt eines Abwasserkanals hat die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis. Wie muss man bei gegebenem Kanalumfang U = 10m die Rechtecksseiten wählen, damit die Querschnittsfläche (d.h. das Fassungsvermögen des Kanals) möglichst groß wird ?

Aufgabe 15:
Eine Elektronikfirma verkauft monatlich 5000 Stück eines Bauteils zum Stückpreis von 25 Euro. Eine Marktforschung hat ergeben, dass sich der monatliche Absatz immer dann um durchschnittlich 250 Stück erhöhen würde, wenn der Stückpreis um 1 Euro gesenkt wird.
Welcher Stückpreis ist für die Firma am günstigsten ?
Welcher Verkauf ist dann zu erwarten ?

Aufgabe 16:
Ein Acker liegt an einer geradlinigen Straße. Ein Fußgänger befindet sich auf dem Acker im Punkt A und möchte möglichst schnell zu einem Punkt B auf der Straße gelangen. Der Fußpunkt C des Lotes von A auf die Straße hat von A die Entfernung 400m und die Entfernung B nach C betrage 1000m.
Auf der Straße kann sich der Fußgänger doppelt so schnell fortbewegen wie auf dem Acker. Welchen Weg soll er einschlagen?



Aufgabe 17:
Die folgende Figur ist aus einem Rechteck und zwei rechtwinkligen Dreiecken zusammengesetzt.

a) Wie lang und wie breit muss das Rechteck sein, wenn der Flächeninhalt der Figur 100 cm^2 ist und der Umfang minimal sein soll ?

b) Wie lang und wie breit muss das Rechteck sein, wenn der Umfang der Figur 50 cm ist und der Flächeninhalt maximal sein soll ?

Lösungen

Aufgabe 1:

Die allgemeinen Koordinaten der Eckpunkte des Rechtecks lauten:
P(a/f(a)) Q(a/0) R(-a/0) wobei $0 < a < 2$ gilt.

Für die Streckenlängen gilt: $\overline{QR} = a - (-a) = 2a$ und $\overline{PQ} = f(a) - 0 = f(a) = -a^2 + 4$

a) Der Umfang des Rechtecks soll maximal werden.
Die Formel für den Umfang lautet $U = 2 \cdot \overline{QR} + 2 \cdot \overline{PR}$
Die Zielfunktion lautet $U(a) = 2 \cdot 2a + 2 \cdot f(a) \Leftrightarrow U(a) = 4a + 2 \cdot (-a^2 + 4)$ mit 0 < a < 2.

Bestimmung des Maximums der Zielfunktion U(a) mit dem GTR.
Bedingung für ein relatives Maximum: $U'(a) = 0$ und $U''(a) < 0$

GTR: Das relative Maximum von U(a) wird für a = 1 erreicht mit U(1) = 10 LE.

Untersuchung der Randwerte: Es gilt U(0) = 8 und U(2) = 8.
Damit ist U(1) = 10 auch das absolute Maximum.
Für P(1/f(1)) = P(1/3) ist der Umfang des Rechtecks maximal.

b) Der Inhalt des Rechtecks soll maximal werden.
Die Formel für den Flächeninhalt lautet $A = \overline{QR} \cdot \overline{PR}$

Die Zielfunktion lautet $A(a) = 2a \cdot f(a) \Leftrightarrow A(a) = 2a \cdot (-a^2 + 4)$ mit 0 < a < 2.

Bestimmung des Maximums der Zielfunktion A(a) mit dem GTR.
Bedingung für ein relatives Maximum: $A'(a) = 0$ und $A''(a) < 0$

GTR: Das relative Maximum von A(a) wird für $a \approx 1{,}15$ erreicht mit A(1,15) = 6,16 FE.

Untersuchung der Randwerte: Es gilt A(0) = 0 und A(2) = 0.
Damit ist A(1,15) = 6,16 FE auch das absolute Maximum.

Für P(1,15/f(1,15)) = P(1,15/2,68) ist der Inhalt des Rechtecks maximal.

c) Bei Rotation des Rechtecks um die y-Achse entsteht ein Zylinder.
Die Formel für das Zylindervolumen lautet $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot \overline{OQ}^2 \cdot \overline{PQ}$

Die Zielfunktion lautet $V(a) = \pi \cdot a^2 \cdot f(a) = \pi \cdot a^2 \cdot (-a^2 + 4)$ mit 0 < a < 2.

Bestimmung des Extremums von V(a) mit dem GTR.
Bedingung für relatives Extremum: $V'(a) = 0$ und $V''(a) \neq 0$

GTR: Für a = 1,41 besitzt für V(a) ein relatives Maximum mit V(1,41) = 12,6 VE.

Untersuchung der Randwerte: Es gilt V(0) = 0 und V(2) = 0.
Damit ist V(1,41) = 12,6 VE auch das absolute Maximum.

Für P(1,41/f(1,41)) = P(1,41/2) ist das Volumen des Zylinders maximal.

d) Bei Rotation des Rechtecks um die x-Achse entsteht ein Zylinder.

Die Formel für das Zylindervolumen lautet $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot \overline{PQ}^2 \cdot \overline{RQ}$

Die Zielfunktion lautet $V(a) = \pi \cdot f(a)^2 \cdot 2a = \pi \cdot (-a^2 + 4)^2 \cdot 2a$ mit $0 < a < 2$.

Bestimmung des Extremums von V(a) mit dem GTR.
Bedingung für relatives Extremum: $V'(a) = 0$ und $V''(a) \neq 0$

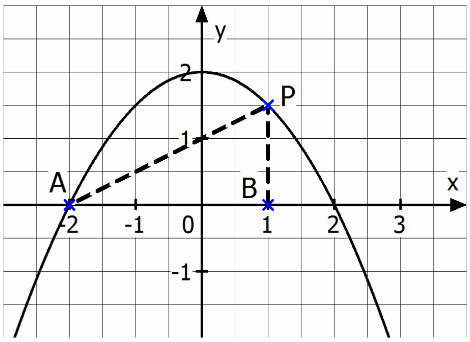
GTR: Für a = 0,89 besitzt für V(a) ein relatives Maximum mit V(0,89) = 57,5 VE.

Untersuchung der Randwerte: Es gilt V(0) = 0 und V(2) = 0.
Damit ist V(0,89) = 57,5 VE auch das absolute Maximum.

Für P(0,89/f(0,89)) = P(0,89/3,2) ist das Volumen des Zylinders maximal.

Aufgabe 2:

Skizze von der Parabel und dem Dreieck:



Die allgemeinen Koordinaten der Punkte lauten: P(u/f(u)) B(u/0) A(-2/0)

a) Die Fläche des Dreiecks soll maximal werden.

Die Formel für die Dreiecksfläche lautet $A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BP}$

Mit den Koordinaten der Punkte ergibt sich $\overline{AB} = u - (-2) = u + 2$ und $\overline{BP} = f(u) - 0 = f(u)$

Die Zielfunktion lautet $A_{Dreieck}(u) = \frac{1}{2}(u+2) \cdot f(u) = \frac{1}{2}(u+2) \cdot (-\frac{1}{2}u^2 + 2)$ mit $-2 \leq u \leq 2$

Bestimmung des Maximums der Zielfunktion A(u) mit dem GTR.
Bedingung für ein relatives Maximum: $A'(u) = 0$ und $A''(u) < 0$

GTR: Das relative Maximum von A(u) wird für $u \approx 0{,}67$ erreicht mit A(0,67)=2,37 FE.

Untersuchung der Randwerte: Es gilt A(-2) = 0 und A(2) = 0.
Damit ist A(0,67) = 2,37 FE auch das absolute Maximum.

Für P(0,67/f(0,67)) = P(0,67/1,78) ist der Inhalt des Dreiecks maximal.

b) Die Summe der Kathetenlängen soll maximal werden.
Die Formel für die Summe der Kathetenlängen lautet $L = \overline{AB} + \overline{BP}$
Mit den Koordinaten der Punkte ergibt sich $\overline{AB} = u - (-2) = u + 2$ und $\overline{BP} = f(u) - 0 = f(u)$

Die Zielfunktion lautet $L(u) = u + 2 + f(u) = u + 2 - \frac{1}{2}u^2 + 2 = -\frac{1}{2}u^2 + u + 4$ mit $-2 \le u \le 2$

Bestimmung des Maximums der Zielfunktion L(u) mit dem GTR.
Bedingung für ein relatives Maximum: $L'(u) = 0$ und $L''(u) < 0$

GTR: Das relative Maximum von L(u) wird für u = 1 erreicht mit L(1) = 4,5 LE.

Untersuchung der Randwerte: Es gilt L(-2) = 0 und L(2) = 4.
Damit ist L(1) = 4,5 LE auch das absolute Maximum.

Für P(1/f(1)) = P(1/1,5) ist die Summe der Kathetenlängen maximal.

c) Das Volumen des Kegels soll maximal werden.
Die Formel für das Kegelvolumen lautet $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot \overline{BP}^2 \cdot \overline{AB}$
Mit den Koordinaten der Punkte ergibt sich $\overline{AB} = u - (-2) = u + 2$ und $\overline{BP} = f(u) - 0 = f(u)$

Die Zielfunktion lautet $V(u) = \frac{1}{3}\pi \cdot f(u)^2 \cdot (u + 2) = \frac{1}{3}\pi \cdot (-\frac{1}{2}u^2 + 2)^2 \cdot (u + 2)$ mit $-2 \le u \le 2$

Bestimmung des Maximums der Zielfunktion V(u) mit dem GTR.
Bedingung für ein relatives Maximum: $V'(u) = 0$ und $V''(u) < 0$

GTR: Das relative Maximum von V(u) wird für u = 0,4 erreicht mit V(0,4) = 9,26 VE.

Untersuchung der Randwerte: Es gilt V(-2) = 0 und V(2) = 0.
Damit ist V(0,4) = 9,26 VE auch das absolute Maximum.

Für P(0,4/f(0,4)) = P(0,4/1,92) ist das Kegelvolumen maximal.

Aufgabe 3:

Die Formel zur Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks lautet $A = \frac{1}{2} \cdot \overline{OQ} \cdot \overline{QP}$.
Die Streckenlängen betragen $\overline{OQ} = a - 0 = a$ und $\overline{QP} = f(a) - 0 = -a^2 + 4a$

Die Zielfunktion lautet $A = \frac{1}{2}a \cdot (-a^2 + 4a) = -\frac{1}{2}a^3 + 2a^2$ mit 0 < a < 4.

Gesucht ist das absolute Maximum der Zielfunktion.

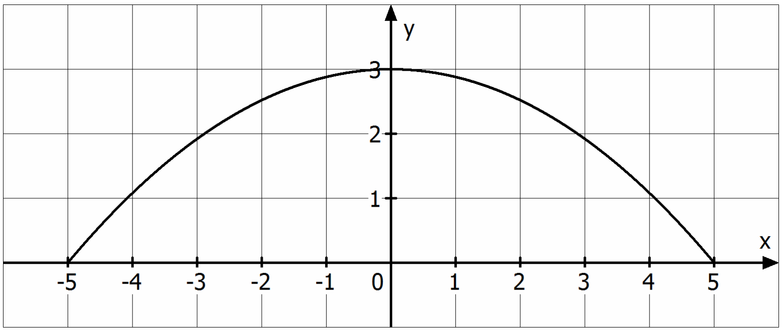
Es gilt $A'(a) = -1{,}5a^2 + 4a$ und $A''(a) = -3a + 4$
Bedingung für ein relatives Maximum: $A'(a) = 0$ und $A''(a) < 0$

GTR: Das relatives Maximum von A(a) wird für $a \approx 2{,}67$ erreicht mit A(2,67) = 4,74.

Untersuchung der Randwerte: Es gilt A(0) = 0 und A(4) = 0 .
Damit ist A(2,67) = 4,74 FE auch das absolute Maximum.

Aufgabe 4:

a) Um eine Funktionsgleichung zu bestimmen, benötigt man ein geeignetes Koordinatensystem:



Der Ansatz für eine allgemeine Parabelgleichung lautet $f(x) = ax^2 + bx + c$
Da wir das Koordinatensystem so gewählt haben, dass die Parabel symmetrisch zur y-Achse verläuft, tauchen in der Parabelgleichung nur gerade Hochzahlen auf.

Der Ansatz lautet $f(x) = ax^2 + c$.
Die Punkte P(0/3) und Q(5/0) liegen auf der Parabel.

Einsetzen von P in die Funktionsgleichung: $3 = a \cdot 0^2 + c \Rightarrow c = 3$

Einsetzen von Q in die Funktionsgleichung: $0 = a \cdot 5^2 + 3 \Rightarrow a = -\frac{3}{25}$

Die Parabelgleichung lautet $f(x) = -\frac{3}{25}x^2 + 3$

b) Der Rauminhalt des Zeltes ergibt sich mit der Formel $V = \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}$

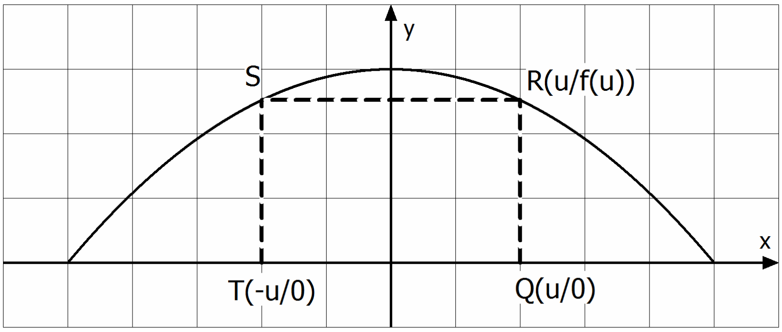
Die Grundfläche entspricht der Fläche, die die Parabel mit der x-Achse einschließt.

$$G = \int_{-5}^{5} f(x)dx = 2 \cdot \int_{0}^{5} (-\frac{3}{25}x^2 + 3)dx = 2 \cdot \left[-\frac{1}{25}x^3 + 3x \right]_0^5 = 2 \cdot (-\frac{125}{25} + 15 - 0) = 20\,m^2.$$

Die Höhe des Körpers ist die Länge des Zeltes, also h = 54 m.

$V = 20m^2 \cdot 54m = 1080\,m^3$

c) Skizze der Türöffnung:



Formel für den Flächeninhalt des Rechtecks: $A = \overline{TQ} \cdot \overline{QR}$

Anhand der Punktkoordinaten in der Abbildung (die alle nur von der Variable u abhängig sein dürfen), können die Strecken in Abhängigkeit von u berechnet werden:

$\overline{TQ} = u - (-u) = 2u$ und $\overline{QR} = f(u) - 0 = f(u)$

Die Zielfunktion lautet $A(u) = 2u \cdot f(u) = 2u \cdot \left(-\frac{3}{25}u^2 + 3\right) = -\frac{6}{25}u^3 + 6u$ mit $0 \le u \le 5$

Gesucht ist das globale Maximum von A(u).

Hinreichende Bedingung für lokales Maximum: $A'(u) = 0$ und $A''(u) < 0$

Es ist $A'(u) = -\frac{18}{25}u^2 + 6$ und $A''(u) = -\frac{36}{25}u$

$A'(u) = 0 \Rightarrow \frac{18}{25}u^2 = 6 \Rightarrow u^2 = \frac{25}{3} \Rightarrow u = \pm\sqrt{\frac{25}{3}} = \pm\frac{5}{\sqrt{3}}$

Wegen $0 \le u \le 5$ kommt nur $u = \frac{5}{\sqrt{3}}$ als Lösung in Frage.

$A''(\frac{5}{\sqrt{3}}) = -\frac{36}{25} \cdot \frac{5}{\sqrt{3}} < 0$ also lokales Maximum.

Es ist $A(\frac{5}{\sqrt{3}}) \approx 11{,}55\ m^2$.

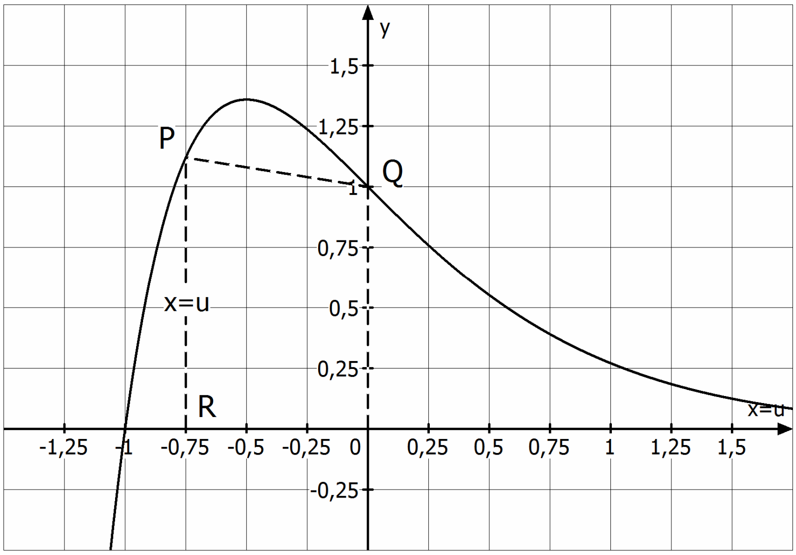
Untersuchung der Randwerte u = 0 und u = 5:
Es ist A(0) = 0 und A(5) = 0.
Da die Randwerte keine höhere Flächenzahl als 11,55 m² liefern, ist das globale Maximum von A(u) bei $u = \frac{5}{\sqrt{3}}$.

Die Breite der Türöffnung beträgt $b = 2u = \frac{10}{\sqrt{3}}$ m

Die Höhe der Türöffnung beträgt $h = f(\frac{5}{\sqrt{3}}) = -\frac{3}{25} \cdot \frac{25}{3} + 3 = 2$ m

Aufgabe 5:

a) Skizze:



Flächeninhalt des Trapezes: $A = \dfrac{\overline{OQ} + \overline{PR}}{2} \cdot \overline{OR}$

Koordinaten der Eckpunkte: O(0/0), R(u/0), P(u/f(u)), Q(0/1)

Daraus ergibt sich $\overline{OQ} = 1$, $\overline{PR} = f(u)$, $\overline{OR} = 0 - u = -u$

Zielfunktion: $A(u) = \dfrac{1 + f(u)}{2} \cdot (-u)$ mit $-1 \le u \le 0$

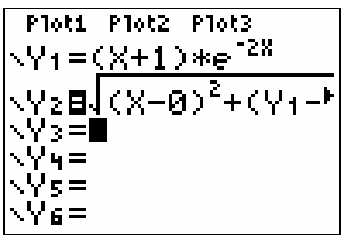
Bestimmung des Maximums der Zielfunktion A(u) mit dem GTR.
Bedingung für ein relatives Maximum: $A'(u) = 0$ und $A''(u) < 0$

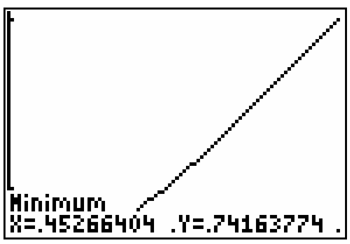
GTR: Das relative Maximum von A(u) wird für u = -0,778 erreicht mit A(-0,778) = 0,798 FE.

Untersuchung der Randwerte: Es gilt A(-1) = 0,5 und A(0) = 0.
Damit ist A(-0,778) = 0,798 FE auch das absolute Maximum.

b) Koordinaten von M: M(u/f(u)) mit u > 0

Abstand von O(0/0) zu M(u/f(u)): $d(u) = \sqrt{(u-0)^2 + (f(u)-0)^2}$



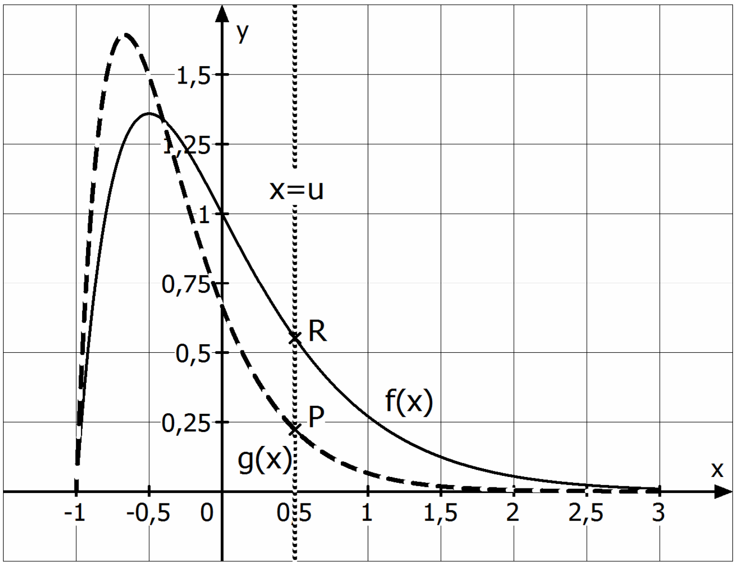


Bestimmung des Minimums der Zielfunktion d(u) mit dem GTR.
Bedingung für ein relatives Minimum: $d'(u) = 0$ und $d''(u) > 0$

GTR: Das relative Minimum von d(u) wird für u = 0,453 erreicht mit d(0,453) = 0,742 LE.

Untersuchung der Randwerte: Es gilt d(0) = 1 und $d(u) \to \infty$ für $u \to \infty$.
Damit ist d(0,453) = 0,742 LE das absolute Minimum.

c) Skizze:



Koordinaten der Punkte: P(u/g(u)) und R(u/f(u)).

Es gilt $\overline{PR} = d(u) = |f(u) - g(u)|$ mit $-1 \le u \le 3$

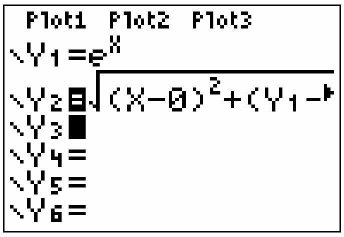
Bestimmung des Maximums der Zielfunktion d(u) mit dem GTR.
Bedingung für ein relatives Maximum: $d'(u) = 0$ und $d''(u) < 0$

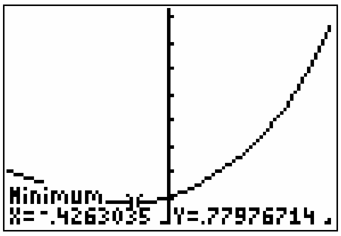
GTR: Das relative Maximum von d(u) wird für u = -0,8 erreicht mit d(-0,8) = 0,48 LE.

Untersuchung der Randwerte: Es gilt d(-1) = 0 und d(3) = 0,0096.
Damit ist d(-0,8) = 0,48 LE das absolute Maximum.

Aufgabe 6:
Koordinaten von P: P(u/f(u)) mit $u \in \mathbb{R}$

Abstand von O(0/0) zu P(u/f(u)): $d(u) = \sqrt{(u-0)^2 + (f(u)-0)^2}$





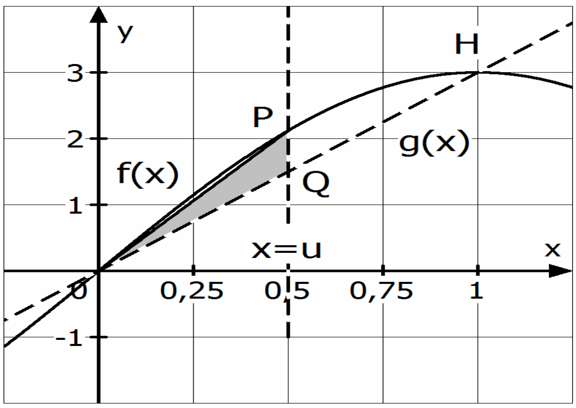
Bestimmung des Minimums der Zielfunktion d(u) mit dem GTR.
Bedingung für ein relatives Minimum: $d'(u) = 0$ und $d''(u) > 0$

GTR: Das relative Minimum von d(u) wird für u = -0,43 erreicht mit
d(-0,43) = 0,78 LE.

Untersuchung der Randwerte: Es gilt $d(u) \to \infty$ für $u \to -\infty$ und $d(u) \to \infty$ für $u \to \infty$.
Für x = -0,43 wird der Abstand minimal.

Aufgabe 7:

a) Der erste Hochpunkt von f(x) hat die Koordinaten H(1/3).
Die Gerade g verläuft durch O(0/0) und H(1/3).
Sie besitzt die Steigung $m = \frac{y_H - y_O}{x_H - x_O} = \frac{3-0}{1-0} = 3$ und den y-Achsenabschnitt 0.
Geradengleichung: $g(x) = 3x$



Flächeninhalt des Dreiecks: $A = \frac{1}{2} \cdot \overline{PQ} \cdot u$

Koordinaten der Eckpunkte des Dreiecks: O(0/0); P(u/f(u)) ; Q(u/g(u))
Mit $\overline{PQ} = f(u) - g(u)$ ergibt sich als Zielfunktion

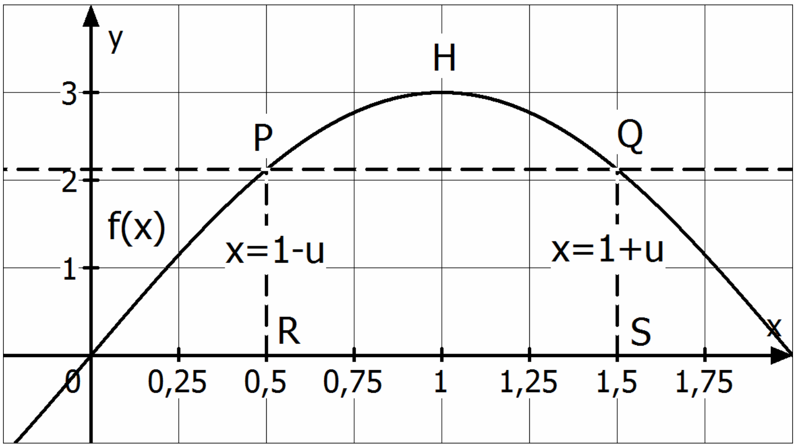
$A(u) = \frac{1}{2} \cdot (f(u) - g(u)) \cdot u$ mit $0 < u < 1$.

Bestimmung des Maximums der Zielfunktion A(u) mit dem GTR.
Bedingung für ein relatives Maximum: $A'(u) = 0$ und $A''(u) < 0$

GTR: Das relative Maximum von A(u) wird für u = 0,695 erreicht mit
A(0,695) = 0,2 FE.

Untersuchung der Randwerte: Es gilt A(0) = 0 und A(1) = 0.
Damit ist A(0,695) = 0,2 FE das absolute Maximum.

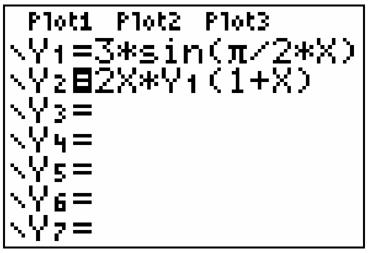
b)

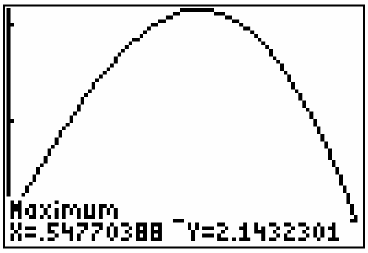


Flächeninhalt des Rechtecks: $A = \overline{RS} \cdot \overline{SQ}$
Koordinaten der Eckpunkte: R(1-u/0); S(1+u/0); P(1-u/f(1-u)); Q(1+u/f(1+u))

Es gilt $\overline{RS} = (1+u) - (1-u) = 2u$ und $\overline{SQ} = f(1+u)$

Die Zielfunktion lautet $A(u) = 2u \cdot f(1+u)$ mit 0 < u < 1.
Bestimmung des Maximums der Zielfunktion A(u) mit dem GTR.
Bedingung für ein relatives Maximum: $A'(u) = 0$ und $A''(u) < 0$





GTR: Das relative Maximum von A(u) wird für u = 0,548 erreicht mit
A(0,548) = 2,14 FE.

Untersuchung der Randwerte: Es gilt A(0) = 0 und A(1) = 0.
Damit ist A(0,548) = 2,14 FE das absolute Maximum.

Aufgabe 8:
Die gesuchte Zahl sei x.

Zu minimieren ist der Term $x^2 + \frac{1}{x}$. Somit ist die Zielfunktion $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ auf das absolute Minimum für x > 0 zu untersuchen.

Bestimmung des Minimums der Zielfunktion f(x) mit dem GTR.
Bedingung für ein relatives Minimum: $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$

GTR: Das relative Minimum von f(x) wird für x = 0,794 erreicht mit f(0,794) = 1,89.

Untersuchung der Randwerte: Es gilt $f(x) \to \infty$ für $x \to 0$ und $f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$.

Aufgabe 9:
Die Kantenlängen des Quaders seien a, 3a und b.

Volumen des Quaders: $V = a \cdot 3a \cdot b = 3a^2 \cdot b$

Da die Formel zwei Variablen enthält, wird eine Nebenbedingung benötigt, die sich aus der angegebenen Summe aller Kantenlängen ergibt:

$4 \cdot a + 4 \cdot 3a + 4 \cdot b = 120 \Rightarrow 16a + 4b = 120 \Rightarrow b = 30 - 4a$ (*)

Einsetzen von (*) in die Volumenformel: $V(a) = 3a^2 \cdot (30 - 4a)$

Bestimmung des Maximums der Zielfunktion V(a) mit dem GTR:

Die Funktion V(a) wird maximal für a = 5 mit V(5) = 750 cm^3.

Aufgabe 10:

Das Rechteck habe die Länge r und die Breite h und es soll um die Seite h rotieren.
Dadurch entsteht ein Zylinder mit der Höhe h und dem Radius r.

Es gilt $V_{Zylinder} = \pi \cdot r^2 \cdot h$.
Da die Formel zwei Variablen enthält, wird eine Nebenbedingung benötigt, die sich aus der angegebenen Drahtlänge ergibt:

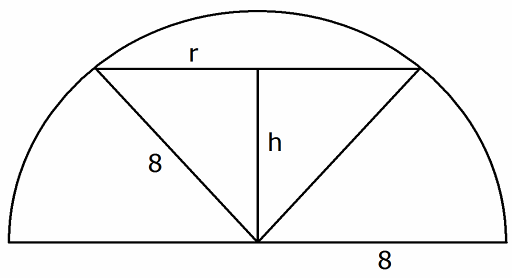
$2r + 2h = 40 \Rightarrow h = 20 - r$ (*)

Einsetzen von (*) in die Volumenformel: $V(r) = \pi \cdot r^2 \cdot (20 - r)$

Bestimmung des Maximums der Zielfunktion V(r) mit dem GTR:

Die Funktion V(r) wird maximal für r = 13,33 cm mit V(13,33) = 3723,4 cm^3.
Die Höhe dieses Zylinders beträgt $h = 20 - 13,33 = 6,66$ cm.

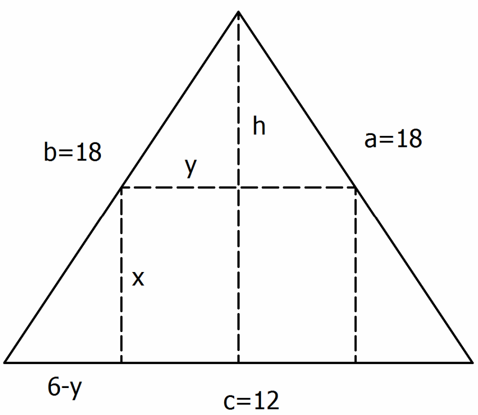
Aufgabe 11:



Zu maximieren ist das Kegelvolumen mit der Formel $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$

Da in dieser Formel zwei Variablen r und h enthalten sind, benötigt man noch eine Nebenbedingung.
Hier kann als Nebenbedingung der Satz des Pythagoras angewandt werden.
Nebenbedingung: $r^2 + h^2 = 8^2 \Rightarrow r^2 = 64 - h^2$
Nun muss die Nebenbedingung in die Volumenformel eingesetzt werden:
Zielfunktion: $V(h) = \frac{1}{3}\pi \cdot (64 - h^2) \cdot h$ mit $0 \le h \le 8$
Mit Hilfe des GTR ergibt sich ein Maximum für h = 4,62 cm. Das maximale Volumen beträgt dann 206,4 cm³. Der Radius ist dann $r = \sqrt{64 - 4{,}62^2} = 6{,}53\,\text{cm}$.

Aufgabe 12:
Skizze:



Fläche des Rechtecks: $A = x \cdot 2y$

Da in der Flächenformel zwei Variablen vorkommen, wird noch eine Nebenbedingung benötigt.

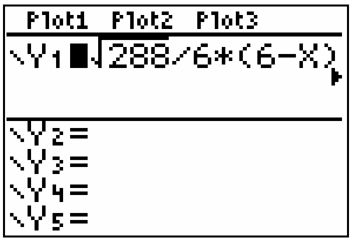
Für die Höhe h des Dreiecks gilt: $h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{1}{2}c\right)^2} = \sqrt{18^2 - 6^2} = \sqrt{288}$

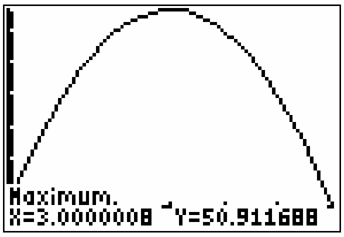
Mit Hilfe des 2.Strahlensatzes folgt: $\frac{h}{6} = \frac{x}{6-y}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{288}}{6} = \frac{x}{6-y} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{288}}{6} \cdot (6-y)$$

Eingesetzt in die Flächenformel: $A = \frac{\sqrt{288}}{6} \cdot (6-y) \cdot 2y$

Bestimmung des Maximums der Zielfunktion A(y) mit dem GTR:

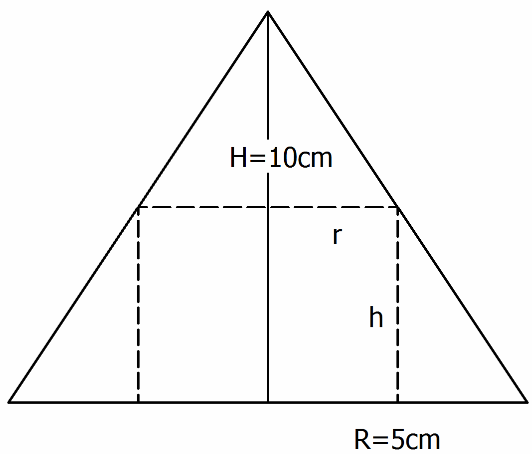




Die Fläche wird maximal für y = 3 mit A(3) = 50,9 cm².
Die Länge des Rechtecks beträgt 2y = 6 cm
Die Breite des Rechtecks beträgt $x = \frac{\sqrt{288}}{6} \cdot (6-3) = 8,49\,\text{cm}$
Der maximale Flächeninhalt beträgt A = 50,9 cm².

Aufgabe 13:

Skizze:

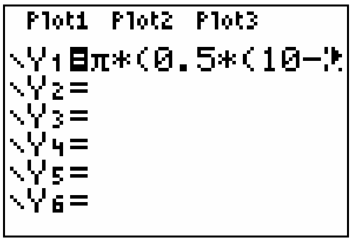


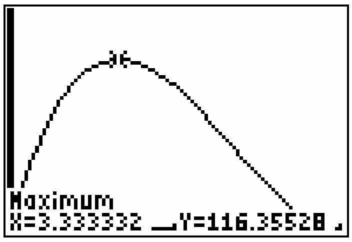
Volumen des Zylinders: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$
Da in der Volumenformel zwei Variablen vorkommen, wird noch eine Nebenbedingung benötigt.

Mit Hilfe des 2.Strahlensatzes folgt: $\frac{5}{10} = \frac{r}{10-h} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{r}{10-h} \Rightarrow r = 0{,}5 \cdot (10-h)$

Eingesetzt in die Volumenformel: $V(h) = \pi \cdot (0{,}5(10-h))^2 \cdot h$

Bestimmung des Maximums der Zielfunktion V(h) mit dem GTR:

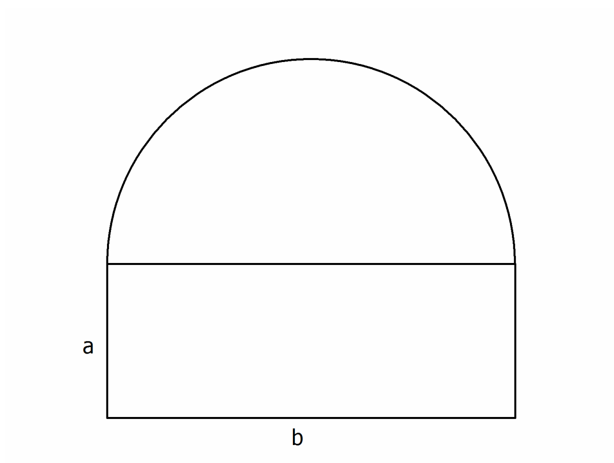




Das Volumen wird maximal für h = 3,33 cm mit V(3,33) = 116,4 cm³.

Aufgabe 14:

Skizze:



Zu maximieren ist die Querschnittsfläche: $A = a \cdot b + \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{1}{2}b\right)^2 = a \cdot b + \frac{1}{8}\pi \cdot b^2$

Da in der Flächenformel zwei Variable vorkommen, wird eine Nebenbedingung benötigt.

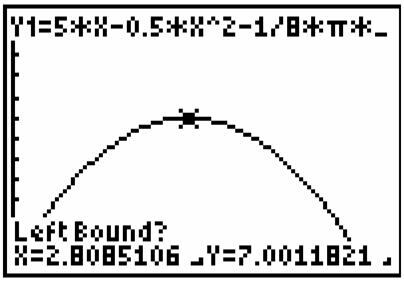
Aufgrund des gegebenen Umfangs U = 10 m des Querschnittes gilt:

$$10 = a + a + b + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2}b = 2a + b + \frac{1}{2}\pi \cdot b$$

$$\Rightarrow a = \frac{10 - b - \frac{1}{2}\pi \cdot b}{2} = 5 - \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}\pi \cdot b$$

Eingesetzt in die Formel: $A(b) = (5 - \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}\pi \cdot b) \cdot b + \frac{1}{8}\pi \cdot b^2$

$$A(b) = 5b - \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{8}\pi \cdot b^2$$



Die Fläche wird maximal für b = 2,8 m.

Daraus folgt $a = 5 - 1{,}4 - \frac{1}{4}\pi \cdot 2{,}8 = 1{,}4$ m.

Die Fläche wird maximal 7 m² groß.

Aufgabe 15:

Zu maximieren ist hier der Erlös der Firma, also die Formel $E = \text{Stückzahl} \cdot \text{Stückpreis}$

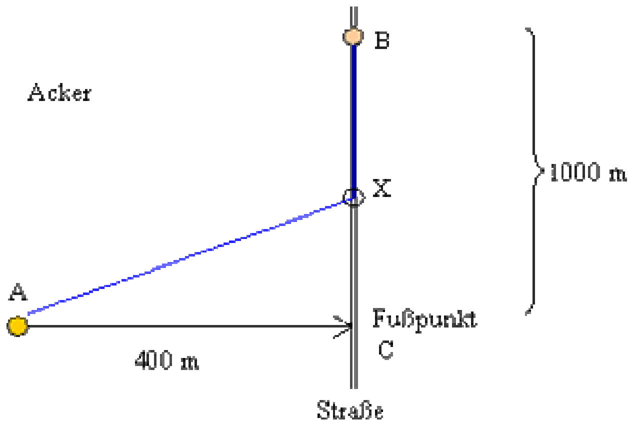
x ist der Preis, um den der Stückpreis von aktuell 25 Euro gesenkt werden muss, damit der Erlös maximal wird.

Zielfunktion: $E(x) = (5000 + 250x) \cdot (25 - x)$

Gesucht ist das Maximum des Erlöses.

GTR: E(x) wird maximal für x = 2,5 Euro mit einem maximalen Erlös von 126.562,50 Euro.
Also ist der Stückpreis von 22,50 Euro für die Firma am günstigsten.
Dann werden 5625 Stücke verkauft.

Aufgabe 16:



Die Strecke von C nach X habe die Länge x.

Mit dem Satz des Pythagoras folgt: $\overline{AX} = \sqrt{400^2 + x^2}$

Außerdem gilt $\overline{BX} = 1000 - x$

Die Geschwindigkeit auf dem Acker sei v.

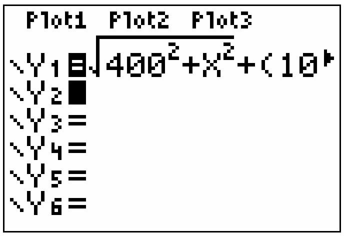
Zeit des Fußgängers auf dem Acker: $t = \frac{\sqrt{400^2 + x^2}}{v}$

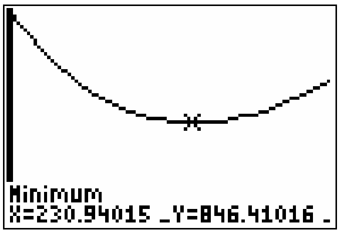
Die Geschwindigkeit auf der Straße sei 2v.

Zeit des Fußgängers auf der Straße: $t = \dfrac{1000 - x}{2v}$

Zielfunktion: $t = \dfrac{\sqrt{400^2 + x^2}}{v} + \dfrac{1000 - x}{2v} = \dfrac{1}{v} \cdot \left(\sqrt{400 + x^2} + \dfrac{1000 - x}{2} \right)$

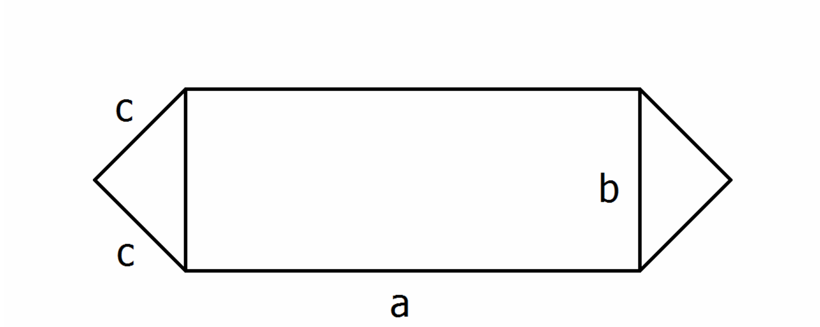
Gesucht ist das Minimum der Funktion t(x), da der Fußgänger in möglichst kurzer Zeit zu Punkt B kommen möchte.
Die Größe v ist hier ein Parameter und kann als Vorfaktor außen vor gelassen werden.





Der Fußgänger sollte den Weg so einschlagen, dass er von A aus zum Punkt X läuft, der vom Punkt C x = 230,9 m entfernt ist.

Aufgabe 17:



Skizze:

Es gilt $c^2 + c^2 = b^2 \Rightarrow 2c^2 = b^2 \Rightarrow c = b \cdot \sqrt{0,5}$

a) Da der Umfang minimal sein soll, lautet die Zielfunktion $U = 2a + 4 \cdot b \cdot \sqrt{0,5}$
Da in der Formel zwei Variablen enthalten sind, wird folgende Nebenbedingung benötigt:

$$100 = a \cdot b + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(b \cdot \sqrt{0,5}\right)^2 \Rightarrow 100 = ab + 0,5b^2 \Rightarrow a = \frac{100 - 0,5b^2}{b} \quad (*)$$

Einsetzen von (*) in die Umfangsformel: $U(b) = 2 \cdot \dfrac{100 - 0,5b^2}{b} + 4b\sqrt{0,5}$

GTR: Der Umfang wird minimal für b = 10,46 cm mit U(10,46) = 38,25 cm.
Einsetzen von b = 10,46 cm in (*) ergibt a = 4,33 cm

b) Da der Flächeninhalt maximal sein soll, lautet die Zielfunktion

$$A = ab + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(b \cdot \sqrt{0{,}5}\right)^2 \Rightarrow A = ab + 0{,}5b^2$$

Da in der Formel zwei Variablen enthalten sind, wird folgende Nebenbedingung benötigt:

$$50 = 2a + 4 \cdot b \cdot \sqrt{0{,}5} \Rightarrow a = 25 - 2b \cdot \sqrt{0{,}5} \quad (*)$$

Einsetzen von (*) in die Flächenformel: $A(b) = (25 - 2b \cdot \sqrt{0{,}5}) \cdot b + 0{,}5b^2$

GTR: Die Fläche wird maximal für b = 13,67 cm mit A(13,67) = 170,9 cm².
Einsetzen von b = 13,67 cm in (*) ergibt a = 5,67 cm