Mathematik - Oberstufe

Aufgaben und Musterlösungen zu ganzrationalen Funktionen mit Parameter

Zielgruppe: Oberstufe Gymnasium, Berufskolleg

Schwerpunkt: Integralrechnung

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Letzte Aktualisierung: November 2009

Datei: Übungsaufgaben zu ganzrationalen Funktionen Integral

Übungsaufgaben zu ganzrationalen Funktionen
Schwerpunkt: Integralrechnung

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Funktion f_t durch $f_t(x) = -\frac{1}{9t}x^3 + tx$ mit t > 0. Ihr Schaubild sei K_t.
Zeichne die Kurve für t = 2 im Bereich -6 < x < 6 unter Verwendung des GTR.
Bestimme für allgemeines t den Hochpunkt der Kurve K_t.
Die Parallelen zu den Koordinatenachsen durch den Hochpunkt von K_t begrenzen zusammen mit den Koordinatenachsen ein Rechteck. Das Schaubild K_t zerlegt das Rechteck in zwei Teilflächen mit den Inhalten A(t) und B(t).
Zeige, dass das Verhältnis A(t) : B(t) von t unabhängig ist.

Aufgabe 2:
Eine Parabel 3.Ordnung geht durch den Ursprung und hat an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$ zueinander parallele Tangenten.
An der Stelle $x_3 = 1$ besitzt sie eine waagrechte Tangente.
Die x-Achse im Bereich 0 < x < 1, die Gerade x = 1 und die Parabel, welche in diesem Bereich im 1.Feld verläuft, schließen eine Fläche mit dem Inhalt $\frac{11}{4}$ ein.
Bestimme die Gleichung der Parabel.

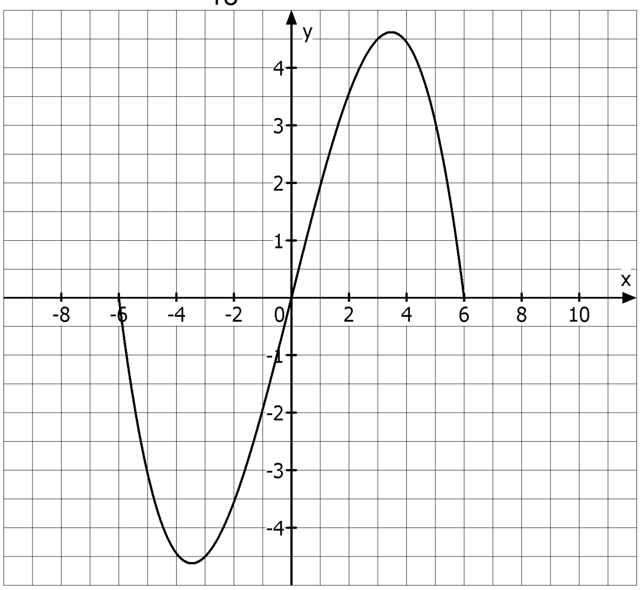
Aufgabe 3:

Wie muss man u in $f_u(x) = \frac{1}{8}x^3 + ux^2$ wählen, damit die zugehörige Kurve bei $x_1 = 3$ einen Wendepunkt hat ?
Berechne für $u = \frac{3}{4}$ die Fläche zwischen der Normalen im Wendepunkt, der Kurve und der y-Achse.

Musterlösungen der Übungsaufgaben zu ganzrationalen Funktionen
Schwerpunkt: Integralrechnung

Aufgabe 1:

Zeichnung des Schaubildes von $f_2(x) = -\frac{1}{18}x^3 + 2x$.



Berechnung der Ableitungen:

$f_t'(x) = -\frac{1}{3t}x^2 + t$

$f_t''(x) = -\frac{2}{3t}x$

Berechnung des Hochpunktes:

Notwendige Bedingung: $f_t'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{3t}x^2 + t = 0 \Rightarrow x^2 = 3t^2 \Rightarrow x = \pm t \cdot \sqrt{3}$

Hinreichende Bedingung: $f_t''(t \cdot \sqrt{3}) = -\frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} < 0$

(Bei $x = -t \cdot \sqrt{3}$ liegt ein Tiefpunkt vor).

Es gilt: $f_t(t \cdot \sqrt{3}) = -\frac{1}{9t} \cdot t^3 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} + t \cdot t \cdot \sqrt{3} = \frac{2}{3}t^2 \cdot \sqrt{3}$. Daraus folgt HP($t \cdot \sqrt{3} \,/\, \frac{2}{3}t^2 \cdot \sqrt{3}$).

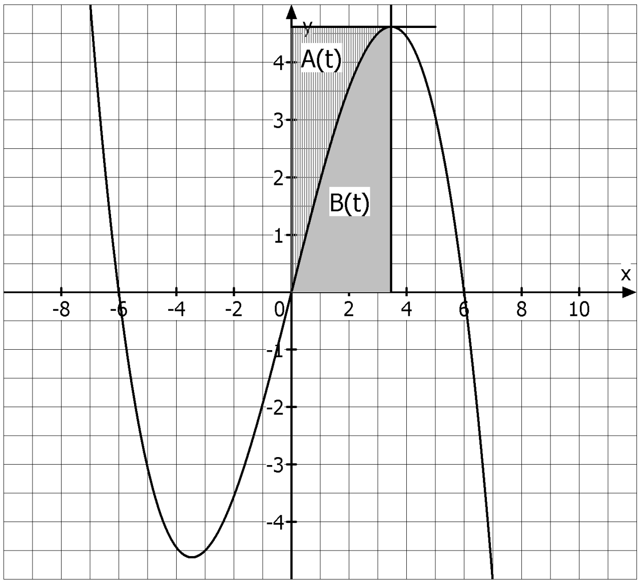
Berechnung der Fläche des Rechtecks:

$A_{Rechteck} = a \cdot b = (t \cdot \sqrt{3}) \cdot (\frac{2}{3}t^2 \cdot \sqrt{3}) = 2t^3$

Berechnung der Fläche B(t):

$$B(t) = \int_0^{t\cdot\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{9t}x^3 + tx\right)dx = \left[-\frac{1}{36t}x^4 + \frac{t}{2}x^2\right]_0^{t\cdot\sqrt{3}} = -\frac{1}{36t} \cdot 9t^4 + \frac{t}{2} \cdot 3t^2 = \frac{5}{4}t^3$$

Daraus folgt: $A(t) = A_{Rechteck} - B(t) = 2t^3 - \frac{5}{4}t^3 = \frac{3}{4}t^3$



Es gilt: $\frac{A(t)}{B(t)} = \frac{\frac{3}{4}t^3}{\frac{5}{4}t^3} = \frac{3}{5}$ und dieses Verhältnis ist unabhängig von t.

Aufgabe 2:

Ansatz für Parabelgleichung: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Daraus folgt $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

O(0/0) liegt auf Parabel: $f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$

Parallele Tangenten bei x = 0 und x = 4: $f'(0) = f'(4) \Rightarrow c = 48a + 8b + c \Rightarrow 48a + 8b = 0$

Waagrechte Tangente bei x = 1: $f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0$

Gegebene Fläche: $\int_0^1 (ax^3 + bx^2 + cx + d)dx = \left[\frac{1}{4}ax^4 + \frac{1}{3}bx^3 + \frac{1}{2}cx^2 + dx\right]_0^1 = \frac{1}{4}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}c + d = \frac{11}{4}$

Folgendes lineares Gleichungssystem ist zu lösen:

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{1}{4}a & +\frac{1}{3}b & +\frac{1}{2}c & +d & = & \frac{11}{4} \\ 48a & +8b & & & = & 0 \\ 3a & +2b & +c & & = & 0 \\ & & & d & = & 0 \end{array}$$

Mit Hilfe des GTR ergibt sich a = 1, b = -6, c = 9

Die gesuchte Parabelgleichung lautet $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

Aufgabe 3:

Gegeben ist $f_u(x) = \frac{1}{8}x^3 + ux^2$

Berechnung der Ableitungen:

$f_u'(x) = \frac{3}{8}x^2 + 2ux$

$f_u''(x) = \frac{3}{4}x + 2u$

$f_u'''(x) = \frac{3}{4}$

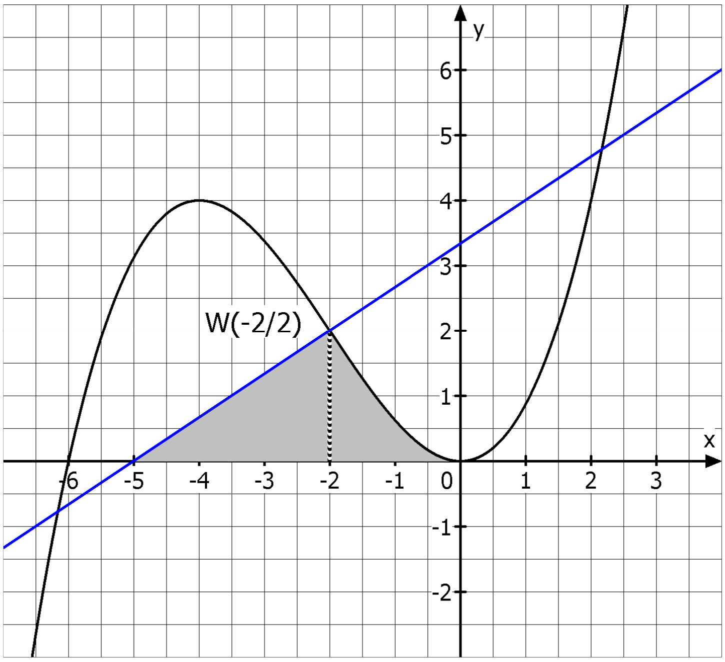
Berechnung des Wendepunktes:

Notwendige Bedingung: $f_u''(x) = 0 \Rightarrow \frac{3}{4}x + 2u = 0 \Rightarrow x = -\frac{8}{3}u$

Hinreichende Bedingung: $f_u'''(-\frac{8}{3}u) \neq 0$, damit existiert der Wendepunkt.

x-Wert des WP soll 3 sein: $-\frac{8}{3}u = 3 \Rightarrow u = -\frac{9}{8}$

Skizze für $u = \frac{3}{4}$:



Für $u = \frac{3}{4}$ ergibt sich als x-Wert des Wendepunktes $x = -\frac{8}{3} \cdot \frac{3}{4} = -2$.

Daraus folgt $WP(-2 / f_{0,75}(-2)) = WP(-2/2)$

Berechnung der Normalengleichung im Wendepunkt:

Es gilt $f_{0,75}'(x) = \frac{3}{8}x^2 + 1{,}5x$

Tangentensteigung im WP: $f_{0,75}'(-2) = -1{,}5$

Berechnung der Normalensteigung im WP: $m_{tang} \cdot m_{Normale} = -1$

$$-1{,}5 \cdot m_{Normale} = -1 \Rightarrow m_{Normale} = \frac{2}{3}$$

Normalengleichung mit der Punkt-Steigungs-Form: $y - 2 = \frac{2}{3}(x+2) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$

Berechnung des Schnittpunktes der Normalen mit der x-Achse:

$$\frac{2}{3}x + \frac{10}{3} = 0 \Rightarrow x = -5$$

Linker Teil der Fläche: $A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$ FE

Rechter Teil der Fläche: $A = \int_{-2}^{0} \left(\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 \right) dx = \left[\frac{1}{32}x^4 + \frac{1}{4}x^3 \right]_{-2}^{0} = 0 - \left(\frac{16}{32} - \frac{8}{4}\right) = 1{,}5$ FE

Gesamtfläche = 3 + 1,5 = 4,5 FE