Analysis

Klausur zu Exponentialfunktionen ohne Wachstum (Ableitung, Stammfunktion, Fläche, Rotationsvolumen, Extremwertaufgabe)

Gymnasium ab J1

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Februar 2014

Pflichtteil (ohne GTR und Formelsammlung)

Aufgabe P1:

Berechne die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ b) $f(x) = (1-x) \cdot e^x$ c) $f(x) = 3^x$

Aufgabe P2:
Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung $e^x - 14 = 32e^{-x}$

Aufgabe P3:
Bestimme die Stammfunktion F von $f(x) = 2 \cdot e^{1-x}$, die an der Stelle x = 1 den Funktionswert 5 besitzt.

Aufgabe P4:
Das Schaubild mit der Gleichung $f(x) = e^x - 3$ schließt mit den Koordinatenachsen eine Fläche ein.
a) Wie lautet die Gleichung der Asymptote des Schaubildes der Funktion ?
b) Fertige eine Skizze von f(x) an und berechne den Inhalt dieser Fläche.
c) Bestimme die Gleichung der Normale an das Schaubild von f(x) an der Stelle x = 0.

Wahlteil (mit GTR und Formelsammlung)

Aufgabe W1:
Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ mit $x \in \mathbb{R}$.
Ihr Schaubild sei K.
a) Zeichne K und gib die Wendestellen von K an.

b) K wird an der y-Achse gespiegelt. Wie lautet die Gleichung des Spiegelbildes ?
K wird so verschoben, dass sein Tiefpunkt (0/0) in den Punkt P(-2/1) übergeht. Wie lautet die Gleichung der Bildkurve ?

c) K rotiere im Bereich $0 \le x \le 2$ um die x-Achse. Bestimme mit dem GTR das Volumen V_1 des Drehkörpers.
Rotiert die Strecke OH mit O(0/0) und H(2/f(2)) um die x-Achse, entsteht ein Drehkörper mit dem Volumen V_2. Wie viel Prozent von V_1 ist V_2 ?

d) P sei ein Punkt von K im 1.Feld. Die Parallelen zu den Koordinatenachsen durch P bilden mit diesen ein Rechteck mit dem Inhalt A. Wie groß wird A maximal ?

Lösungen

Aufgabe P1:

a) $f(x) = e^{\frac{1}{x}} = e^{x^{-1}}$

Ableitung mit der Kettenregel: $f'(x) = e^{x^{-1}} \cdot (-x^{-2}) = -\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}$

b) $f(x) = (1-x) \cdot e^x$

Ableitung mit der Produktregel: $f'(x) = 1 \cdot e^x + (1-x) \cdot e^x = e^x \cdot (1+1-x) = e^x \cdot (2-x)$

c) $f(x) = 3^x = e^{\ln(3^x)} = e^{x \cdot \ln(3)}$

Ableitung mit der Kettenregel: $f'(x) = e^{x \cdot \ln(3)} \cdot \ln(3) = 3^x \cdot \ln(3)$

Aufgabe P2:

$e^x - 14 = 32e^{-x} \quad \Leftrightarrow e^x - 14 = \frac{32}{e^x} \quad | \cdot e^x \quad \Leftrightarrow e^{2x} - 14e^x = 32$

$\Leftrightarrow e^{2x} - 14e^x - 32 = 0$

Substitution: $u = e^x \quad \Rightarrow u^2 - 14u - 32 = 0$

Daraus folgt $u_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{196+128}}{2} = \frac{14 \pm 18}{2} \Rightarrow u_1 = 16$ und $u_2 = -2$

Rücksubstitution: $e^x = 16 \Leftrightarrow x = \ln(16)$

$e^x = -2$ besitzt keine Lösung

L = { ln(16) }

Aufgabe P3:

Es ist $F(x) = 2 \cdot e^{1-x} \cdot \frac{1}{-1} + C = -2e^{1-x} + C$

Bedingung: $F(1) = 5 \Rightarrow -2e^{1-1} + C = 5 \Leftrightarrow -2 + C = 5 \Leftrightarrow C = 7$

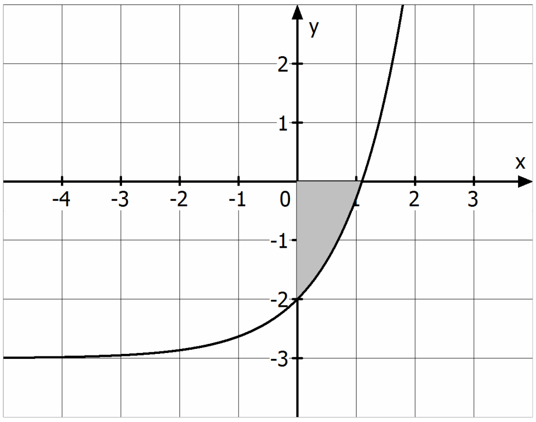
Die gesuchte Stammfunktion lautet $F(x) = -2e^{1-x} + 7$

Aufgabe P4:

a) Für $x \to +\infty$ strebt $e^x \to +\infty$, folglich existiert für diese Richtung keine Asymptote.

Für $x \to -\infty$ strebt $e^x \to 0$, folglich strebt $f(x) \to -3$; für diese Richtung existiert eine waagrechte Asymptote y = -3.

b)



Zur Berechnung der Fläche benötigt man die Nullstelle von f(x).
$e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \ln(3)$

$$\int_0^{\ln(3)} f(x)dx = \left[e^x - 3x\right]_0^{\ln(3)} = e^{\ln(3)} - 3\ln(3) - 1 = 3 - 3\ln(3) - 1 = 2 - 3\ln(3)$$

Da die Fläche unterhalb der x-Achse liegt, ist das Integralergebnis negativ.
Die gesuchte Fläche hat den Inhalt $A = 3\ln(3) - 2$

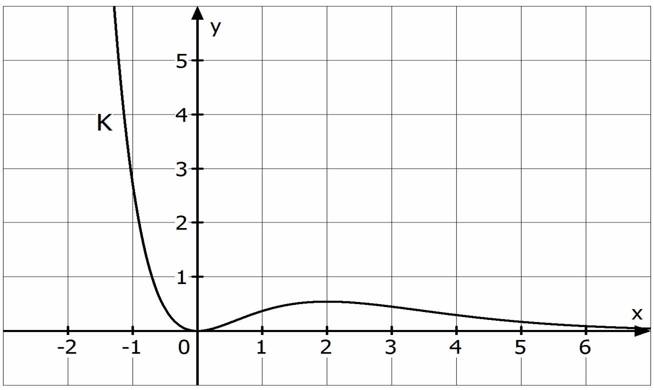
c) Allgemeine Normalengleichung: $y = -\frac{1}{f'(u)}(x-u) + f(u)$

Es gilt u = 0 mit $f(0) = -2$ und $f'(0) = e^0 = 1$ (da $f'(x) = e^x$ ist)

Die Normalengleichung lautet $y = -\frac{1}{1}(x-0) + (-2) \quad \Rightarrow y = -x - 2$

Aufgabe W1:

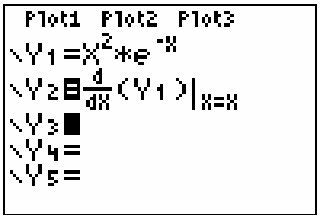
a) Zeichnung von K:

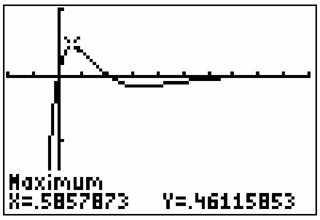


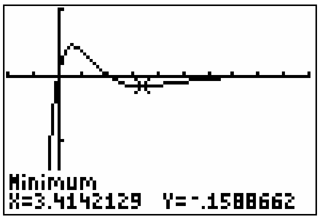
Wendestellen von K:

Hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

Lösung mit dem GTR:







Die Wendestellen befinden sich dort, wo die Ableitungsfunktion Extremstellen besitzt.
Das Schaubild K besitzt zwei Wendestellen bei x = 0,586 und x = 3,414.

b) Spiegelung von K an der y-Achse:
Gleichung des Spiegelbildes: $g(x) = f(-x) = (-x)^2 \cdot e^{-(-x)} = x^2 \cdot e^x$

Damit das neue Schaubild den Tiefpunkt in P(-2/1) übergeht, muss es um 2 Einheiten nach links und eine Einheit nach oben verschoben werden.

Gleichung der Bildkurve: $h(x) = f(x+2) + 1 = (x+2)^2 \cdot e^{-(x+2)} + 1$

c) Volumen $V_1 = \pi \cdot \int_0^2 f(x)^2 dx \approx 0{,}875$ Volumeneinheiten.

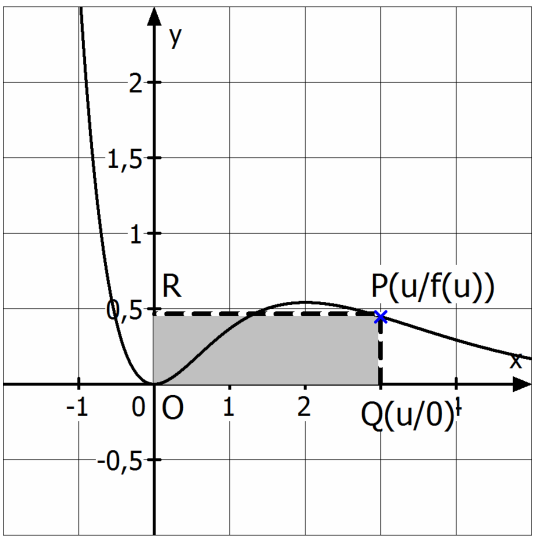
Der Hochpunkt hat die Koordinaten H(2/0,541).
Rotiert die Strecke OH um die x-Achse, entsteht ein Kreiskegel mit dem Volumen
$V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$.
Der Radius des Kegels ist r = 0,541. Die Höhe des Kegels ist h = 2.

$V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 0{,}541^2 \cdot 2 = 0{,}613$ Volumeneinheiten.

Prozentualer Anteil: $\frac{V_2}{V_1} = \frac{0{,}613}{0{,}875} = 0{,}7 = 70\%$

Der Kreiskegel hat hinsichtlich des Volumens einen Anteil von 70%.

d)



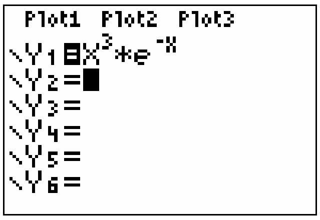
Gesucht ist der maximale Flächeninhalt A des Rechtecks.

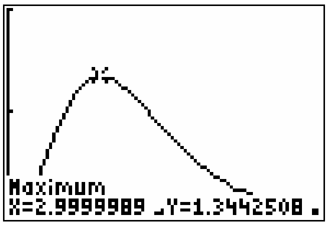
Die Fläche des Rechtecks berechnet sich mit der Formel $A = \overline{OQ} \cdot \overline{PQ}$

Mit den gewählten (nur von der Variable u abhängigen) Koordinaten der Eckpunkte des Rechtecks ergibt sich für die Strecken
$\overline{OQ} = u - 0 = u$ und $\overline{PQ} = f(u) - 0 = f(u)$

Die Zielfunktion lautet $A(u) = u \cdot f(u) = u \cdot u^2 \cdot e^{-u} = u^3 \cdot e^{-u}$ für u > 0.

Bestimmung des globalen Maximums von A(u) mit dem GTR:





An der Stelle u = 3 existiert ein lokales Maximum mit A(3) = 1,34.

Untersuchung der Randwerte:
A(0) = 0 liefert keinen höheren Flächeninhalt.

Für $u \to \infty$ strebt $A(u) \to 0$, also auch hier existiert kein höherer Flächeninhalt.

Die maximale Fläche A beträgt 1,34 Flächeneinheiten.