Analysis

Klausur zu Extrempunkten, Interpretation von Graphen von Ableitungsfunktionen, Tangenten und Normalen, Extremwertaufgaben
(Bearbeitungszeit: 90 Minuten)

Gymnasium J1

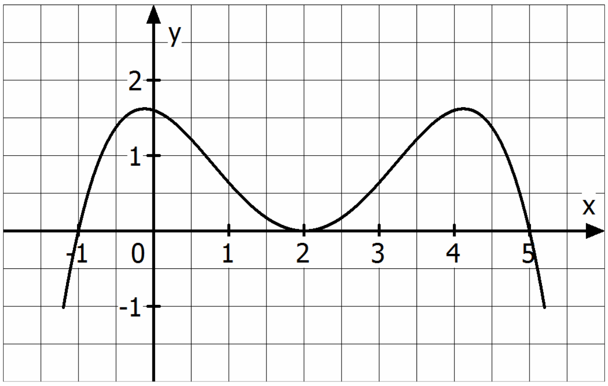
Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

November 2014

Pflichtteil - ohne Hilfsmittel

Aufgabe 1: (5 VP)
Gegeben ist das Schaubild einer Ableitungsfunktion f' einer Funktion f.
Sind folgende Aussagen über f wahr, falsch oder nicht entscheidbar ?
Begründen Sie die Antwort.



a) f hat an der Stelle x = 2 ein lokales Maximum.
b) f hat im Intervall [-1,2 ; 5,2] vier Nullstellen.
c) f hat im Intervall [-1,2 ; 5,2] drei Wendestellen.
d) f ist im Intervall (-1 ; 2) streng monoton steigend.
e) Das Schaubild von f ist im Intervall [2 ; 4] eine Rechtskurve

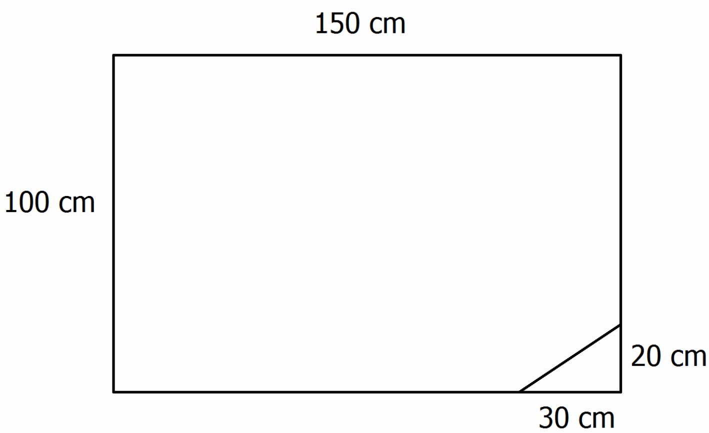
Aufgabe 2: (3 VP)
Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente und der Normalen des Graphen von f mit $f(x) = \frac{4}{x} + 2$ im Punkt B(4/3).

Aufgabe 3: (3 VP)

Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 18x + 2$ hat einen Hoch- und Tiefpunkt.

Bestimmen Sie den Abstand der beiden Tangenten in diesen Punkten.

Aufgabe 4: (4 VP)
Von einer rechteckigen Marmorplatte ist an einer Ecke ein Stück abgebrochen. Aus der Restplatte soll wieder ein rechteckiges Stück mit möglichst großer Fläche geschnitten werden. Wie groß sind dabei die Seiten zu wählen ?



Wahlteil - mit GTR und Formelsammlung

Aufgabe 5: (6 VP)
Durch den Punkt R(0/1) sollen Tangenten an das Schaubild von f mit $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x$ gehen. Bestimmen Sie die Berührpunkte sowie die Gleichungen der Tangenten.

Aufgabe 6: (2 + 3 + 4 VP)
Die Koordinatenachsen des Koordinatensystems stellen zwei geradlinig verlaufende Straßen dar, die sich orthogonal kreuzen. Die beiden Straßen sind durch einen schmalen Radweg verbunden, der sich näherungsweise durch die Funktion $f(x) = \frac{1}{18}x^2 - \frac{10}{3}x + 50$ beschreiben lässt (Einheiten in Meter).
Der Radweg mündet in den Punkten A und B in die Straßen, wobei A den Schnittpunkt von f(x) mit der y-Achse darstellt.

a) Unter welchem Winkel geht der Radweg im Punkt A in die Straße über ?
b) Ein Gebäude in der Nähe des Fahrradweges hat eine kreisförmige Grundfläche mit dem Mittelpunkt M(25/30) und dem Durchmesser 20 m.
   An welcher Stelle des Fahrradweges ist der Abstand zu diesem Gebäude am kleinsten ? Wie groß ist dieser Abstand ?
c) Die Straßenecke O(0/0) wird durch einen schmalen geradlinigen Weg mit dem Fahrradweg verbunden. Der Weg trifft senkrecht in einem Punkt Q auf den Fahrradweg. Bestimmen Sie die Koordinaten von Q.

Lösungen

Aufgabe 1:

a) Die Aussage ist falsch. Wenn f an der Stelle x = 2 ein lokales Minimum hätte, müsste die Ableitungsfunktion dort eine Nullstelle mit einem Vorzeichenwechsel von - nach + besitzen. Die Ableitungsfunktion hat dort jedoch eine Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel.

b) Die Aussage ist nicht entscheidbar, da es zur Ableitungsfunktion f' unendlich viele Schaubilder von f gibt (beliebige Verschiebung in y-Richtung möglich)

c) Die Aussage ist wahr, da das Schaubild der Ableitungsfunktion drei Extremstellen besitzt.

d) Die Aussage ist falsch. Wenn das Schaubild von f eine Rechtskurve darstellt, ist die Ableitungsfunktion monoton fallend.
Im Intervall [2;4] ist die Ableitungsfunktion jedoch monoton wachsend.

Aufgabe 2:

Aus $f(x)=\frac{4}{x}+2=4x^{-1}+2$ folgt $f'(x)=-4x^{-2}=-\frac{4}{x^2}$

Ansatz Tangentengleichung: $y=f'(u)\cdot(x-u)+f(u)$
Aufgrund des gegebenen Berührpunktes B(4/3) gilt u = 4.

Es ist $f(4)=3$ und $f'(4)=-\frac{4}{16}=-0,25$
Tangentengleichung: $y=f'(4)\cdot(x-4)+f(4) \quad \Rightarrow y=-0,25\cdot(x-4)+3 \quad \Rightarrow y=-0,25x+4$

Ansatz Normalengleichung: $y=-\frac{1}{f'(u)}\cdot(x-u)+f(u)$

Mit u = 4 folgt: $y=-\frac{1}{f'(4)}\cdot(x-4)+f(4) \quad \Rightarrow y=-\frac{1}{-0,25}\cdot(x-4)+3 \quad \Rightarrow y=4x-13$

Aufgabe 3:

Berechnung der Extrempunkte von f:

$f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-18x+2$

$f'(x)=3x^2+3x-18 \qquad f''(x)=6x+3$

Hinreichende Bedingung für Extrempunkte: $f'(x)=0$ und $f''(x)\neq 0$

$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2+3x-18=0 \overset{:3}{\Rightarrow} x^2+x-6=0$

$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot1\cdot(-6)}}{2}=\frac{-1\pm5}{2} \Rightarrow x_1=2$ und $x_2=-3$

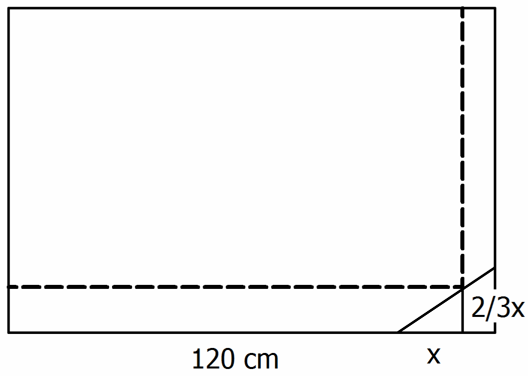
$f''(2) = 15 > 0 \Rightarrow T(2\,/\,f(2)) \Rightarrow T(2\,/\,-20)$

$f''(-3) = -15 < 0 \Rightarrow H(-3\,/\,f(-3)) \Rightarrow H(-3\,/\,42{,}5)$

Die Tangenten in den Extrempunkten sind waagrechte Geraden:
Tangente in T: y = -20
Tangente in H: y = 42,5

Der Abstand der Geraden beträgt 42,5 - (-20) = 62,5

Aufgabe 4:



Das gestrichelte Rechteck besitzt folgenden Flächeninhalt: $A = (120 + x)\cdot(100 - \frac{2}{3}x)$

Nach Auflösen der Klammern ergibt sich $A(x) = 12000 + 20x - \frac{2}{3}x^2$ mit $0 \le x \le 30$

Berechnung des globalen Maximums von A(x):

$A'(x) = 20 - \frac{4}{3}x$ und $A''(x) = -\frac{4}{3}$

$A'(x) = 0 \Rightarrow 20 - \frac{4}{3}x = 0 \Rightarrow x = 15$

$A''(15) < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum für x = 15 mit $A(15) = 135 \cdot 90 = 12150$ cm²

Untersuchung der Randwerte:

$A(0) = 120 \cdot 100 = 12000$ cm²

$A(30) = 150 \cdot 80 = 12000$ cm²

Damit existiert am Rand kein globales Maximum .

Das globale Maximum existiert für x = 15.
Die Seitenlängen des Rechtecks sind 135 cm und 90 cm lang.

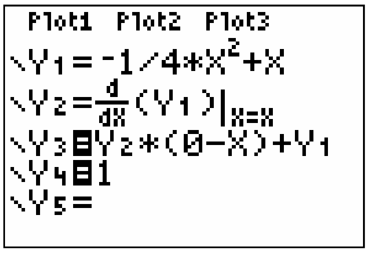
Aufgabe 5:

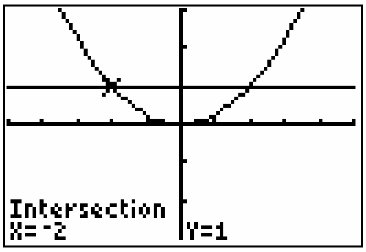
Gegeben ist die Funktion $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x$.

Ansatz für die Tangentengleichung: $y = f'(u) \cdot (x-u) + f(u)$

Einsetzen des Tangentenpunktes R(0/1): $1 = f'(u) \cdot (0-u) + f(u)$

Berechnung von u mit dem GTR:

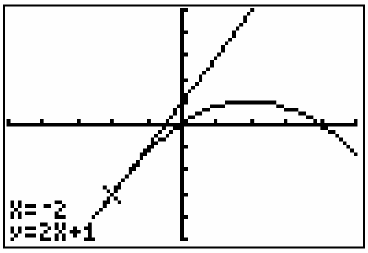


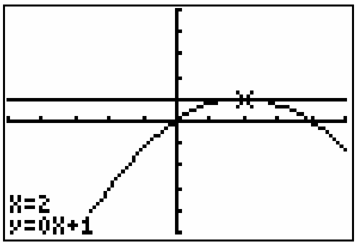


Die Lösungen lauten u = -2 und u = 2.

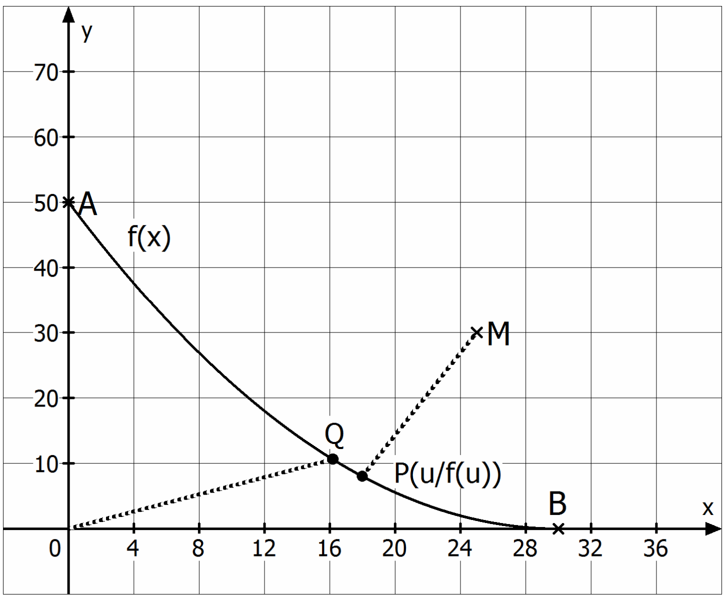
Berührpunkte: $B_1(-2/f(-2)) \Rightarrow B_1(-2/-3)$ und $B_2(2/f(2)) \Rightarrow B_2(2/1)$

Tangentengleichung in B_1 : y = 2x + 1
Tangentengleichung in B_2 : y = 1





Aufgabe 6:



a) Der Schnittwinkel des Schaubildes von f im Punkt A mit der Parallelen zur x-Achse erhält man mit der Formel $\tan\alpha = |f'(0)|$

Mit $f'(0) = -\frac{10}{3}$ folgt $\tan\alpha = \frac{10}{3} \Rightarrow \alpha \approx 73{,}3°$

Der gesuchte Winkel mit der y-Achse beträgt $\beta = 90° - 73{,}3° = 16{,}7°$

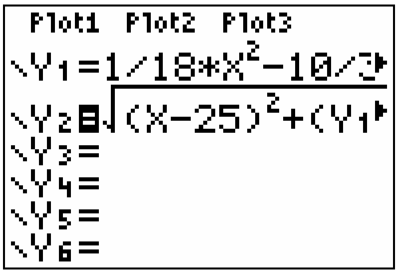
b) Gesucht ist der minimale Abstand des Schaubildes von f vom Punkt M(25/30).

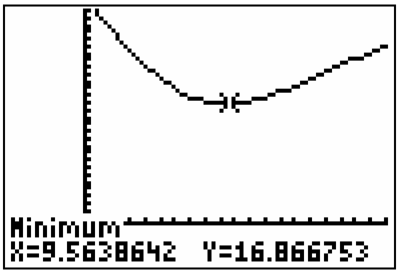
Der Abstand des Schaubildespunktes P(u/f(u)) von M wird berechnet durch:

$$d(u) = \sqrt{(u-25)^2 + (f(u)-30)^2}$$

Gesucht ist das Minimum von d(u).

Lösung mit dem GTR:





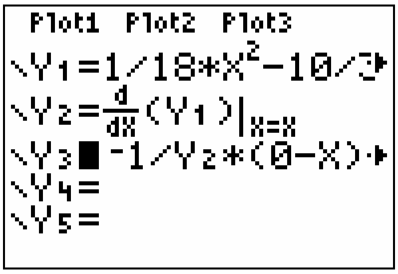
An der Stelle x = 9,56 des Fahrradweges wird der Abstand zum Gebäude am kleinsten,.
Der Abstand des Fahrradweges vom Mittelpunkt des Gebäudes ist 16,866 m groß.
Der Abstand des Fahrradweges vom Rand des Gebäudes ist 6,866 m groß.

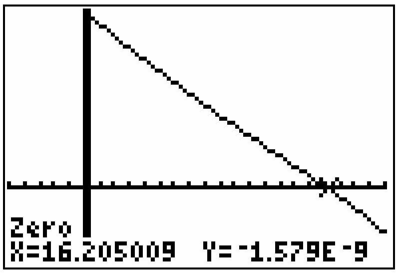
c) Vom Ursprung O(0/0) aus soll eine Normale an das Schaubild von f gelegt werden.

Allgemeine Normalengleichung: $y = -\frac{1}{f'(u)} \cdot (x-u) + f(u)$

Einsetzen von O(0/0): $0 = -\frac{1}{f'(u)} \cdot (0-u) + f(u)$

Berechnung von u mit dem GTR:





Es ist $u \approx 16{,}2$.
Koordinaten von Q: $Q(16{,}2 / f(16{,}2)) \Rightarrow Q(16{,}2 / 10{,}6)$