Analysis

Übungsaufgaben zu Funktionen mit Parametern (Funktionenscharen)

Gymnasium J1/J2

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Dezember 2015

Aufgabe 1:
Bestimme die Nullstellen der gegebenen Funktionenschar.

a) $f_t(x) = x^2e^x - t \cdot x \cdot e^x$
b) $f_t(x) = x^2 + 4tx + 4t^2$
c) $f_t(x) = x^3 - t^2x$

Aufgabe 2:
Bilde die ersten beiden Ableitungen.

a) $f_t(x) = x^2 + 4tx + 4t^2$
b) $f_t(x) = 2tx \cdot e^{-x^2}$
c) $f_t(x) = x^4 - t^2x^3$
d) $f_t(x) = t^2 \cdot e^x - t \cdot e^{2x}$
e) $f_t(x) = (t - e^x)^2$

Aufgabe 3:
Bestimme die Extrempunkte in Abhängigkeit von t > 0 und ermittle deren Ortskurve.

a) $f_t(x) = (x - 2t) \cdot e^x$
b) $f_t(x) = -x^2 - t \cdot x + t$

Aufgabe 4:
Bestimme die Wendepunkte W_t der Funktion $f_t(x) = x^3 - t \cdot x^2 + 2tx$ in Abhängigkeit von t > 0 und ermittle deren Ortskurve.

Aufgabe 5:
Untersuche die Graphen von $f_t(x) = t^2e^x - t^2x$ auf Extrempunkte.
Welche besondere Lage haben alle diese Punkte im Koordinatensystem ?

Aufgabe 6:
Bei einer Bakterienkultur nimmt die Anzahl der Bakterien stündlich um 4% zu.
Zu Beginn sind a Bakterien vorhanden.

a) Gib eine Exponentialfunktion mit Basis e an, die die Anzahl der Bakterien zum Zeitpunkt t (t in h nach Beobachtungsbeginn) beschreibt.

b) Skizziere die Graphen für a = 100 und a = 400.
Wann haben sich jeweils 1000 Bakterien gebildet ?

c) Für welchen Wert von a haben sich nach 10 Stunden ungefähr 1000 Bakterien gebildet ?

d) Für welchen Wert von a ist die momentane Wachstumsgeschwindigkeit zu Beobachtungsbeginn ca. 100 Bakterien pro Stunde ?

Lösungen

Aufgabe 1:

a) $f_t(x) = 0 \Rightarrow x^2e^x - t \cdot x \cdot e^x = 0$

$\Rightarrow x \cdot e^x \cdot (x - t) = 0$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt

Gleichung I) $x = 0$

Gleichung II) $e^x = 0$ ist nicht lösbar

Gleichung III) $x - t = 0 \Rightarrow x = t$

Es gibt zwei Nullstellen: x = 0 und x = t.

b) $f_t(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 4tx + 4t^2 = 0$

Lösungsformel: $x_{1,2} = \dfrac{-4t \pm \sqrt{16t^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4t}}{2} = \dfrac{-4t \pm 0}{2}$

Es gibt eine einzige Nullstelle x = -2t.

c) $f_t(x) = x^3 - t^2x$

$\Rightarrow x \cdot \left(x^2 - t^2\right) = 0$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt

Gleichung I) $x = 0$

Gleichung II) $x^2 - t^2 = 0 \Rightarrow x = \pm t$.

Es gibt drei Nullstellen x = 0 und x = t und x = -t.

Aufgabe 2:

a) $f_t(x) = x^2 + 4tx + 4t^2 \quad \Rightarrow f_t'(x) = 2x + 4t \quad \Rightarrow f_t''(x) = 2$

b) $f_t(x) = 2tx \cdot e^{-x^2} \quad \Rightarrow f_t'(x) = 2t \cdot e^{-x^2} + 2tx \cdot e^{-x^2}(-2x) = 2t \cdot e^{-x^2} \cdot (1 - 2x^2)$

$\Rightarrow f_t''(x) = 2t \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) \cdot (1 - 2x^2) + 2t \cdot e^{-x^2} \cdot (-4x)$

$= 2t \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) \cdot \left(1 - 2x^2 + 2\right) = -4tx \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x^2 + 3)$

c) $f_t(x) = x^4 - t^2x^3 \quad \Rightarrow f_t'(x) = 4x^3 - 3t^2x^2 \quad \Rightarrow f_t''(x) = 12x^2 - 6t^2x$

d) $f_t(x) = t^2 \cdot e^x - t \cdot e^{2x} \quad \Rightarrow f_t'(x) = t^2 \cdot e^x - 2t \cdot e^{2x} \quad \Rightarrow f_t''(x) = t^2 \cdot e^x - 4t \cdot e^{2x}$

e) $f_t(x) = (t - e^x)^2 \quad \Rightarrow f_t'(x) = 2(t - e^x) \cdot (-e^x) = -2te^x + 2e^{2x}$

$\Rightarrow f_t''(x) = -2te^x + 4e^{2x}$

Aufgabe 3:

a) Ableitungen von $f_t(x) = (x-2t)\cdot e^x$

$f_t'(x) = 1\cdot e^x + (x-2t)\cdot e^x = e^x\cdot(1+x-2t)$

$f_t''(x) = e^x\cdot(1+x-2t) + e^x\cdot 1 = e^x\cdot(2+x-2t)$

Notwendige Bedingung: $f_t'(x) = 0$

$e^x\cdot(1+x-2t) = 0$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt

Gleichung I): $e^x = 0$ ist nicht lösbar
Gleichung II): $1+x-2t = 0 \Rightarrow x = 2t-1$

Hinreichende Bedingung: $f_t''(2t-1) = e^{2t-1}\cdot(2+2t-1-2t) = e^{2t-1} > 0$

Also Tiefpunkt $T(2t-1/f(2t-1)) \Rightarrow T(2t-1/-e^{2t-1})$

Ortskurve der Tiefpunkte: $x = 2t-1 \Rightarrow t = \dfrac{x+1}{2}$

Die Ortskurve der Tiefpunkte lautet $y = -e^{2t-1} = -e^{2\cdot\frac{x+1}{2}-1} \Rightarrow y = -e^x$

b) Ableitungen von $f_t(x) = -x^2 - t\cdot x + t$

$f_t'(x) = -2x - t$ und $f_t''(x) = -2$

Notwendige Bedingung: $f_t'(x) = 0$

$-2x - t = 0 \Rightarrow x = -0{,}5t$

Hinreichende Bedingung: $f_t''(-0{,}5t) = -2 < 0$

Also Hochpunkt $H(-0{,}5t/f(-0{,}5t)) \Rightarrow H(-0{,}5t/0{,}25t^2 + t)$

Ortskurve der Hochpunkte: $x = -0{,}5t \Rightarrow t = -2x$
Die Ortskurve der Hochpunkte lautet $y = 0{,}25\cdot(-2x)^2 + (-2x) \Rightarrow y = x^2 - 2x$

Aufgabe 4:

Ableitungen von $f_t(x) = x^3 - t\cdot x^2 + 2tx$

$f_t'(x) = 3x^2 - 2tx + 2t$ und $f_t''(x) = 6x - 2t$ und $f_t'''(x) = 6$

Notwendige Bedingung: $f_t''(x) = 0$

$6x - 2t = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}t$

Hinreichende Bedingung: $f_t'''(\dfrac{1}{3}t) = 6 \neq 0$

Also Wendepunkt $W(\dfrac{1}{3}t/f(\dfrac{1}{3}t)) \Rightarrow W(\dfrac{1}{3}t/\dfrac{2}{3}t^2 - \dfrac{2}{27}t^3)$

Ortskurve der Wendepunkte: $x = \frac{1}{3}t \Rightarrow t = 3x$

Die Ortskurve der Wendepunkte lautet $y = \frac{2}{3} \cdot (3x)^2 - \frac{2}{27} \cdot (3x)^3 = 6x^2 - 2x^3$

Aufgabe 5:

Ableitungen von $f_t(x) = t^2e^x - t^2x$

$f_t'(x) = t^2e^x - t^2$ und $f_t''(x) = t^2e^x$

Notwendige Bedingung: $f_t'(x) = 0$

$t^2e^x - t^2 = 0 \Rightarrow t^2e^x = t^2 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

Hinreichende Bedingung: $f_t''(0) = t^2 > 0$

Also Tiefpunkt $T(0 / f_t(0)) \Rightarrow T(0 / t^2)$

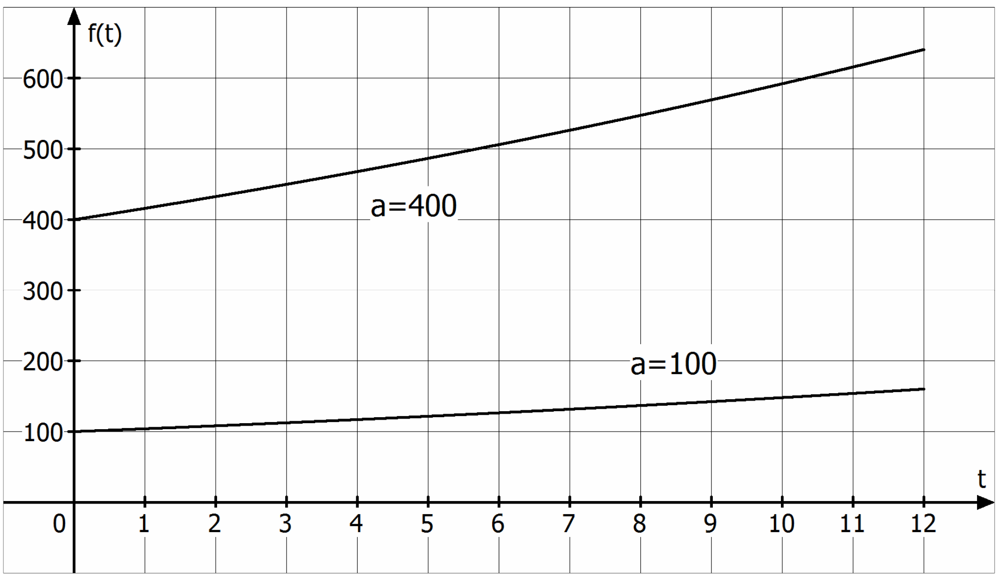
Die Tiefpunkte liegen alle auf der y-Achse.

Aufgabe 6:

a) $f_a(t) = a \cdot 1{,}04^t$, t in Stunden, f(t) ist die Anzahl der Bakterien

Die Funktion mit Basis e lautet $f_a(t) = a \cdot e^{\ln(1{,}04) \cdot t} = a \cdot e^{0{,}0392t}$

b) Skizze für a = 100 und a = 400:



a=100: $f_{100}(t) = 100 \cdot e^{0,0392t}$

Zeit, bis sich 1000 Bakterien gebildet haben: $f_{100}(t) = 1000$

$$1000 = 100 \cdot e^{0,0392t} \Rightarrow e^{0,0392t} = 10 \Rightarrow t = \frac{\ln(10)}{0,0392} = 58,7 \text{ Stunden}$$

a = 400: $f_{400}(t) = 400 \cdot e^{0,0392t}$

Zeit, bis sich 1000 Bakterien gebildet haben: $f_{400}(t) = 1000$

$$1000 = 400 \cdot e^{0,0392t} \Rightarrow e^{0,0392t} = 2,5 \Rightarrow t = \frac{\ln(2,5)}{0,0392} = 23,4 \text{ Stunden}$$

c) Bedingung: $f_a(10) = 1000$

$$a \cdot e^{0,0392 \cdot 10} = 1000 \Rightarrow a = \frac{1000}{e^{0,392}} \approx 676$$

d) Bedingung: $f_a'(0) = 100$

Es ist $f_a'(t) = a \cdot e^{0,0392t} \cdot 0,0392$

Es muss gelten: $a \cdot e^{0,0392 \cdot 0} \cdot 0,0392 = 100 \Rightarrow a = \frac{100}{0,0392} \approx 2551$