Stochastik

Erwartungswert einer Zufallsvariablen

Gymnasium ab Klasse 10

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

November 2013

Aufgabe 1:
Ein Glücksrad besteht aus 3 Feldern, die folgendermaßen beschriftet sind:

1.Feld: 2 Euro
2.Feld: 5 Euro
3.Feld: 0 Euro

Das 1.Feld hat einen Mittelpunktswinkel von 90°. Das 2.Feld und das 3.Feld haben jeweils denselben Mittelpunktswinkel.

Es wird folgendes Glücksspiel angeboten:
Der Spieler zahlt einen Einsatz von 3 Euro und darf einmal an dem Glücksrad drehen.
Die Feldbeschriftungen geben an, wie viel Euro an den Spieler ausbezahlt werden, wenn das Glücksrad auf dem Feld stehen bleibt.
Bestimme den erwarteten Gewinn für den Spieler.

Aufgabe 2:
In einer Urne befinden sich Kugeln mit der Aufschrift + 2 Euro, +5 Euro und -7 Euro.
Die Wahrscheinlichkeit, dass man Kugeln mit +2 Euro bzw. +5 Euro zieht, beträgt jeweils 0,3.
Ein Spieler zieht zweimal hintereinander eine Kugel mit Zurücklegen und notiert jeweils ihre Zahl.
Die Summe dieser beiden Zahlen (unter Berücksichtigung des Vorzeichens) geben an, wie viel Euro der Spieler ausbezahlt bekommt (bei positivem Vorzeichen) bzw. was der Spieler bezahlen muss (bei negativem Vorzeichen).

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler bei einem Spiel Geld gewinnt.
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler bei fünf Spielen genau dreimal gewinnt.
c) Wie viele Spiele müssen gespielt werden, damit der Spielanbieter mit Einnahmen von ca. 1000 Euro rechnen kann.

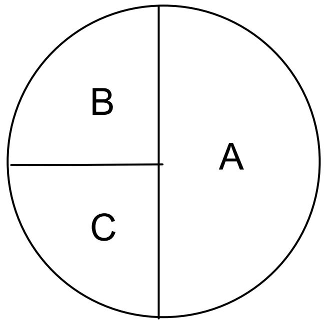
Aufgabe 3:
Aus einem Beutel mit zwölf 50-Cent-Münzen, fünf 1-Euro-Münzen und acht 2-Euro-Münzen werden zufällig zwei Münzen gezogen.
Welchen Geldbetrag wird man bei häufiger Versuchsdurchführung durchschnittlich herausziehen ?

Aufgabe 4:
Bei einem Glücksspiel mit dem Einsatz 1 € gibt die Zufallsvariable G den Gewinn (d.h. die Differenz zwischen Auszahlung und Einsatz) in € an.
Die folgende Tabelle gibt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von G an:

g in €	-1	0	1	4
P(G=g)	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$

a) Berechne den Erwartungswert von G.
b) Wie groß muss der Einsatz sein, damit das Spiel fair ist ?
c) Ändere die maximale Auszahlung so ab, dass das Spiel bei einem Einsatz von 1 € fair ist.

Aufgabe 5:
Bei einer Lotterie zahlt man den Einsatz von 50 Cent und darf dann das Glücksrad zweimal drehen. Bei zwei Feldern mit gleicher Bezeichnung wird 1 € ausbezahlt, sonst nichts.
a) Gib die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen "Gewinn in €" an.
b) Berechne den Erwartungswert für den Gewinn.
c) Kann man den Einsatz so ändern, dass die Lotterie fair ist ?



Aufgabe 6:
In einem Zeitungsartikel wurde eine Statistik über die Anzahl von Fehlern in Zeitungsartikeln erstellt. Danach sind auf 17% der Seiten keine Druckfehler, auf 30% der Seiten ist ein Druckfehler, auf 27% der Seiten sind zwei, auf 16% der Seiten drei und auf dem Rest mindestens vier Druckfehler.
Wie viele Druckfehler sind durchschnittlich mindestens auf einer Zeitungsseite zu erwarten ?

Aufgabe 7:
In einer Urne sind 4 weiße und 6 schwarze Kugeln. Ein Spieler zieht nacheinander eine Kugel ohne zurücklegen. Das Spiel ist aus, wenn er eine weiße Kugel zieht oder wenn er dreimal gezogen hat. Die Zufallsvariable X steht für die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln.
a) Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.
b) Der Spieleinsatz beträgt 10 €. Der Spieler erhält 30 €, wenn er drei schwarze Kugeln gezogen hat. Er erhält 20 €, wenn er zwei schwarze Kugeln zieht. In allen anderen Fällen erhält er nichts. Welchen mittleren Gewinn (oder Verlust) hat der Spieler auf lange Sicht je Spiel zu erwarten ? Wie hoch müsste der Spieleinsatz ungefähr sein, damit das Spiel fair ist ?

Aufgabe 8:
In einer Urne sind 2 blaue, 3 rote und 5 weiße Kugeln. Ein Spieler zieht nacheinander ohne Zurücklegen 3 Kugeln. Der Spieler erhält 6 €, wenn alle drei gezogenen Kugeln dieselbe Farbe haben. Er erhält 2 €, wenn die drei Kugeln unterschiedliche Farben aufweisen.
Bei allen anderen Ausgängen muss der Spieler 1,50 € bezahlen.
Wie viel gewinnt oder verliert der Spieler je Spiel im Mittel auf "lange Sicht" ?

Aufgabe 9:
Mit zwei Urnen und einem Glücksrad wird ein Glücksspiel durchgeführt. Die beiden Urnen U1 und U2 haben folgende Inhalte:
U1: 4 rote, 1 blaue und 5 weiße Kugeln
U2: 1 rote und 9 weiße Kugeln
Die Zahlen des Glücksrads treten mit folgenden Wahrscheinlichkeiten auf:

1	2	3	4	5	6
0,2	0,05	0,35	0,1	0,2	0,1

Das Glücksspiel hat folgende Regeln:
Das Glücksrad wird einmal gedreht.
Erscheint eine gerade Zahl, so wird zweimal mit Zurücklegen aus U2 gezogen,
erscheint eine ungerade Zahl, so wird zweimal mit Zurücklegen aus U1 gezogen.
Zieht ein Spieler dabei zwei weiße Kugeln oder keine weiße Kugel, so erhält er 1 Euro, sonst zahlt er 1,50 Euro. Prüfe, ob das Spiel fair ist.

Lösungen

Aufgabe 1:

P(1.Feld wird gedreht) = P(2 Euro) = $\frac{90}{360} = \frac{1}{4}$

Der restliche Winkel von 360° - 90° = 270° wird in gleichen Anteilen auf die Felder 2 und 3 aufgeteilt:

P(2.Feld wird gedreht) = P(5 Euro) = $\frac{135}{360} = \frac{3}{8}$

P(3.Feld wird gedreht) = P(0 Euro) = $\frac{135}{360} = \frac{3}{8}$

Die erwartete Auszahlug an den Spieler beträgt $\frac{1}{4} \cdot 2€ + \frac{3}{8} \cdot 5€ + \frac{3}{8} \cdot 0€ = 2{,}375€$

Da der Spieler einen Einsatz von 3€ leisten muss, beträgt der erwartete Gewinn für den Spieler 2,375 € - 3 € = -0,625 €.

Der Spieler macht pro Spiel einen erwarteten Verlust von 62,5 Cent.

Aufgabe 2:

Es gilt: P(+2 Euro) = 0,3 P(+5 Euro) = 0,3 P(-7 Euro) = 0,4

Die Zufallsvariable X gibt die Summe der beiden Zahlen an.
X besitzt folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$P(X = -14) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$ $P(X = -5) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 2 = 0{,}24$

$P(X = -2) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 2 = 0{,}24$ $P(X = 4) = 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$

$P(X = 7) = 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 2 = 0{,}18$ $P(X = 10) = 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$

a) P(Spieler gewinnt) = $P(X > 0) = 0{,}09 + 0{,}18 + 0{,}09 = 0{,}36$

b) Die Zufallsvariable Y gibt die Anzahl der gewonnen Spiele für den Spieler an.
Y ist binomialverteilt mit n = 5 und p = 0,36 (siehe a)).

$$P(Y = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}36^3 \cdot (1 - 0{,}36)^2 \approx 0{,}191$$

c) Der erwartete Gewinn für den Spieler beträgt:

$$E(X) = -14 \cdot 0{,}16 - 5 \cdot 0{,}24 - 2 \cdot 0{,}24 + 4 \cdot 0{,}09 + 7 \cdot 0{,}18 + 10 \cdot 0{,}09 = -1{,}40 \text{ €}$$

Der Spieler macht pro Spiel einen erwarteten Verlust von 1,40 Euro.
Das heißt, dass der Spielanbieter pro Spiel einen erwarteten Gewinn von 1,40 Euro hat.

Damit der Anbieter mit ca. 1000 Euro Einnahmen rechnen kann, müssen $\frac{1000}{1{,}40} \approx 714$ Spiele gespielt werden.

Aufgabe 3:
Die Zufallsvariable X gibt den Betrag an, den man bei der Ziehung der beiden Münzen erhält.

Es gilt:
$P(X=1€)=\frac{12}{25}\cdot\frac{11}{24}=0,22$ $P(X=1,50€)=\frac{12}{25}\cdot\frac{5}{24}\cdot 2=0,2$ $P(X=2€)=\frac{5}{25}\cdot\frac{4}{24}=\frac{1}{30}$
$P(X=2,50€)=\frac{8}{25}\cdot\frac{12}{24}\cdot 2=0,32$ $P(X=3€)=\frac{5}{25}\cdot\frac{8}{24}\cdot 2=\frac{2}{15}$ $P(X=4€)=\frac{8}{25}\cdot\frac{7}{24}=\frac{7}{75}$

$$E(X)=1€\cdot 0,22+1,50€\cdot 0,2+2€\cdot\frac{1}{30}+2,50€\cdot 0,32+3€\cdot\frac{2}{15}+4€\cdot\frac{7}{75}=2,16€$$

Aufgabe 4:

a) $E(G)=-1\cdot\frac{2}{3}+0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{10}+4\cdot\frac{1}{15}=-0,3$

b) Bei einem Einsatz von 1 € macht der Spieler gemäß a) einen erwarteten Verlust von 30 Cent.
Damit muss der Einsatz um 30 Cent gesenkt werden, wenn das Spiel fair sein soll.
Der Einsatz muss 70 Cent betragen.

c) Der unbekannte maximale Gewinn (in der Tabelle g = 4) sei nun a.

Es soll gelten: $E(G)=-1\cdot\frac{2}{3}+0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{10}+a\cdot\frac{1}{15}=-\frac{17}{30}+\frac{1}{15}a$
Damit das Spiel fair ist, muss gelten: $-\frac{17}{30}+\frac{1}{15}a=0 \Leftrightarrow a=8,50€$
Aufgrund des Einsatzes von 1 € muss die maximale Auszahlung 9,50 € betragen, damit das Spiel fair ist.

Aufgabe 5:

a) Die Zufallsvariable X ist der Gewinn in Euro.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung hat folgende Gestalt:
$P(X=0,5)=P(AA,BB,CC)=0,5^2+0,25^2+0,25^2=0,375$
$P(X=-0,5)=1-0,375=0,625$

b) Erwartungswert des Gewinns: $E(X)=0,5\cdot 0,375-0,5\cdot 0,625=-0,125€$

c) Da bei einem Einsatz von 50 Cent der erwartete Verlust des Spielers 12,5 Cent beträgt, müsste der Einsatz um 12,5 Cent gesenkt werden, also 37,5 Cent betragen.
Da ein Einsatz mit "halben Cent" nicht möglich ist, kann man den Einsatz nicht so ändern, dass die Lotterie fair ist.

Aufgabe 6:
Die Zufallsvariable X stellt die Anzahl der Fehler auf einer Seite dar.
Es gilt: $P(X=0)=0,17$ $P(X=1)=0,3$ $P(X=2)=0,27$
$P(X=3)=0,16$ $P(X\geq 4)=0,1$

Aufgrund der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 4)$ kann den Erwartungswert von X nicht exakt berechnen.
Wenn man jedoch $P(X = 4) = 0{,}1$ unterstellt, bekommt man mit E(X) eine untere Grenze für den möglichen tatsächlichen Erwartungswert.
Da nach durchschnittlichen Druckfehleranzahl gefragt ist, die sich mindestens auf einer Zeitungsseite befinden, ist dies auch die gesuchte Größe:

$$E(X) = 0 \cdot 0{,}17 + 1 \cdot 0{,}30 + 2 \cdot 0{,}27 + 3 \cdot 0{,}16 + 4 \cdot 0{,}1 = 1{,}72$$

Es sind durchschnittlich mindestens 1,72 Fehler auf einer Zeitungsseite.

Aufgabe 7:

a) Die Zufallsvariable X ist die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln.

$$P(X=0) = P(w) = \frac{4}{10} = 0{,}4 \qquad P(X=1) = P(sw) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{15}$$

$$P(X=2) = P(ssw) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{6} \qquad P(X=3) = P(sss) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{6}$$

b) Die Zufallsvariable Y stellt die Auszahlung an den Spieler dar.

$$P(Y=30) = P(X=3) = \frac{1}{6} \qquad P(Y=20) = P(X=2) = \frac{1}{6}$$

$$P(Y=0) = \frac{2}{3}$$

Der mittlere Gewinn des Spielers beträgt $E(Y) - 10 = 30 \cdot \frac{1}{6} + 20 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{2}{3} - 10 = -1{,}67€$

Da bei einem Einsatz von 10 Euro der Spieler einen erwartenden Verlust von 1,67 Euro macht, muss der Einsatz um 1,67 Euro auf 8,33 Euro abgesenkt werden.

Aufgabe 8:

P(Spieler erhält 6 Euro) = P(alle drei Kugeln haben dieselbe Farbe) = P(rrr, www)

$$= \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} + \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{11}{120}$$

P(Spieler erhält 2 Euro) = P(alle drei Kugeln haben unterschiedliche Farbe)

$$= 6 \cdot P(brw) = 6 \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{5}{8} = 0{,}25$$

Der Faktor 6 ergibt sich daraus, dass man die Farben blau,rot,weiß auf 6 unterschiedliche Weise anordnen kann. Es gibt daher im Baumdiagramm 6 Pfade, für die sich drei unterschiedliche Farben ergeben.

P(Spieler muss 1,50 Euro bezahlen) = $1 - 0{,}25 - \frac{11}{120} = \frac{79}{120}$

Der erwartete Gewinn des Spielers beträgt $6 \cdot \frac{11}{120} + 2 \cdot 0{,}25 - 1{,}50 \cdot \frac{79}{120} = 0{,}0625$ Euro.
Der Spieler gewinnt auf "lange Sicht" 6,25 Cent pro Spiel

Aufgabe 9:

P(Glücksrad zeigt eine gerade Zahl) = 0,05 + 0,1 + 0,1 = 0,25
P(Glücksrad zeigt eine ungerade Zahl) = 0,2 + 0,35 + 0,2 = 0,75

P(aus U1 werden zwei weiße Kugeln oder keine weiße Kugel gezogen)

$$= P(ww) + P(\overline{w}\overline{w}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

P(aus U2 werden zwei weiße Kugeln oder keine weiße Kugel gezogen)

$$= P(ww) + P(\overline{w}\overline{w}) = \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = 0,82$$

Die Zufallsvariable X sei der Gewinn des Spielers.

$$P(X = 1) = 0,25 \cdot 0,82 + 0,75 \cdot \frac{1}{2} = 0,58$$

$$P(X = -1,50) = 1 - 0,58 = 0,42$$

Es gilt $E(X) = 1 \cdot 0,58 - 1,50 \cdot 0,42 = -0,05$ Euro

Das Spiel ist nicht fair, da $E(X) \neq 0$ ist. Der Spieler verliert auf lange Sicht pro Spiel 5 Cent.