Analysis

Übungsaufgabe Wahlteil
Gebrochenrationale Funktion, Modellierung Brückenbogen, Integralrechnung
Hilfsmittel: GTR

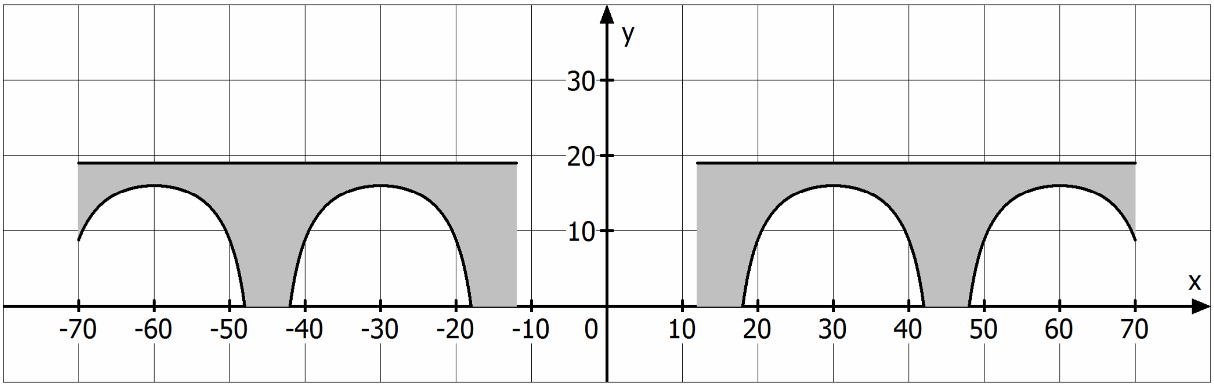
Gymnasium Oberstufe

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

April 2014

Die Skizze zeigt einen Eisenbahnviadukt, dessen mittlerer Bogen weggebrochen ist.
Das Koordinatensystem ist so gewählt, dass die y-Achse die Symmetrieachse für den weggebrochenen Bogen ist.



Alle Bögen haben eine Weite von 24 m und vom Sockel (der x-Achse) aus gemessen eine Höhe von 16 m. Der Fahrweg auf dem Viadukt ist 8 m breit. An der obersten Stelle des Bogens ist das Viadukt bis zum Fahrweg noch 3 m dick.

Der fehlende Bogen kann durch eine Funktion $f(x)=\frac{k}{x^2-a}+25$ mit $k \neq 0$ mathematisch beschrieben werden.

a) Bestimme die Konstanten a und k aus den gegebenen Abmessungen des Viaduktes, gib die Funktionsgleichung, den maximalen Definitionsbereich D_{max} und den auf die Darstellung des Bogens beschränkten Definitionsbereich $D_{Viadukt}$ von f an.

Für die weitere Rechnung in b) und c) wird die Funktion $f(x)=\frac{2025}{x^2-225}+25$ verwendet.

b) Begründe, dass f keine weiteren Nullstellen außer 12 und -12 besitzen kann.
Zeige, dass der Graph von f außer H(0/16) keinen weiteren lokalen Extrempunkt besitzt.

c) Bestimme die Fläche unter einem Bogen des Viadukts ab Sockelhöhe (x-Achse) aufwärts.
Berechne die sichtbare Seitenfläche eines Bogens.

Berechne das Volumen des Bauschutts, der durch den weggebrochenen Bogen entstanden ist unter der Annahme, dass die Brücke massiv und ohne Hohlräume ist.
Berechne die Masse des Bauschutts, wenn ein Kubikmeter 2 Tonnen wiegt.

d) Welche Bedingungen müssen die Parameter k und a erfüllen, damit f zwei Nullstellen, eine bzw. keine Nullstelle besitzt.

Lösungen

a) Um die Parameter a und k zu berechnen, benötigt man zwei Punkte des Schaubildes von f.
Aufgrund der bekannten Bogenhöhe liegt H(0/16) auf dem Schaubild.
Aufgrund der bekannten Weite liegt P(12/0) auf dem Schaubild.
Nun werden die beiden Punkte in die Funktionsgleichung eingesetzt:

Einsetzen von H: $16 = \frac{k}{-a} + 25 \quad \Rightarrow -\frac{k}{a} = -9 \qquad \Rightarrow k = 9a \quad (*)$

Einsetzen von P: $0 = \frac{k}{144 - a} + 25 \quad (**)$

Einsetzen von (*) in (**): $0 = \frac{9a}{144 - a} + 25 \quad | \cdot (144 - a)$

$$0 = 9a + 25 \cdot (144 - a)$$
$$0 = 3600 - 16a \quad \Rightarrow a = 225$$

Daraus folgt $k = 9 \cdot 225 = 2025$

Die Funktionsgleichung lautet $f(x) = \frac{2025}{x^2 - 225} + 25$

Maximale Definitionsmenge:
Der Nenner der Funktionsgleichung darf nicht Null werden:
$x^2 - 225 = 0 \Rightarrow x = \pm 15$
Die maximale Definitionsmenge lautet $D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{-15 ; 15\}$

Da die Bogenweite des Viadukts 24 m beträgt, ist die Definitionsmenge des Bogens $D_{Viadukt} = [-12 ; 12]$

b) Nullstellen von f: Bedingung $f(x) = 0$

$$0 = \frac{2025}{x^2 - 225} + 25 \quad | \cdot (x^2 - 225)$$
$$0 = 2025 + 25 \cdot (x^2 - 225)$$

Zu lösen ist eine quadratische Gleichung, die maximal zwei Lösungen haben kann.
Deshalb kann es außer 12 und -12 keine weiteren Nullstellen geben.

Hinreichende Bedingung für lokalen Extrempunkt: $f'(x) = 0$ und Vorzeichenwechsel von f'

Ableitungen von f:
Umschreiben der Funktionsgleichung: $f(x) = 2025 \cdot \left(x^2 - 225\right)^{-1} + 25$

Dann gilt $f'(x) = -2025 \cdot \left(x^2 - 225\right)^{-2} \cdot 2x = \frac{-4050x}{(x^2 - 225)^2}$

$$\frac{-4050x}{(x^2 - 225)^2} = 0 \quad \Rightarrow -4050x = 0 \quad \Rightarrow x = 0$$

Da die notwendige Bedingung $f'(x)=0$ als einzige Lösung x = 0 liefert, kann es außer bei x = 0 keine weiteren lokalen Extrempunkte geben.

c) Fläche unter einem Bogen: $A=\int_{-12}^{12}\left(\frac{2025}{x^2-225}+25\right)dx \approx 303{,}4$ m² (GTR)

Sichtbare Fläche des Bogens:
Die Brücke ist insgesamt 16 m + 3 m = 19 m hoch.
Die sichtbare Fläche beträgt $24\cdot 19-303{,}4=152{,}6$ m²

Das Volumen des Bauschutts beträgt $V=152{,}6\text{m}^2\cdot 8\text{m}\approx 1221\text{m}^3$

Die Masse des Bauschutts beträgt $1221\cdot 2=2442$ Tonnen

d) Berechnung der Nullstellen von $f(x)=\frac{k}{x^2-a}+25$ mit $k\neq 0$:

$$f(x)=0 \Rightarrow \frac{k}{x^2-a}+25=0 \quad |\cdot(x^2-a)$$

$$\Rightarrow k+25(x^2-a)=0 \qquad \Rightarrow k+25x^2-25a=0 \qquad \Rightarrow x^2=\frac{25a-k}{25}$$

Diese Gleichung besitzt zwei Lösungen, wenn $25a-k>0$ ist, also 25a > k.

Die Gleichung besitzt eine Lösung, wenn $25a-k=0$ ist, also 25a = k.

Die Gleichung besitzt keine Lösung, wenn $25a-k<0$ ist, also 25a < k.