Analytische Geometrie

Übungsaufgaben
Lineare Gleichungssysteme

Oberstufe

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Oktober 2015

Pflichtteilaufgaben (ohne GTR)

Aufgabe 1:

Löse die folgenden linearen Gleichungssysteme:

a)
$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & +4x_2 & +x_3 & = & 10 \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 8 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 3 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 1 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rrrcl} 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 4 \\ x_1 & & -3x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & +2x_2 & & = & 2 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & -x_2 & +6x_3 & = & 4 \\ -x_1 & +5x_2 & +3x_3 & = & 7 \end{array}$$

Aufgabe 2:
Gib ein lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Variablen an, das die folgende Lösungsmenge hat. Hierbei sollen in allen 3 Gleichungen immer alle 3 Variablen vorkommen.

a) L = { (-1 ; 3 ; 2) } b) L = { (1-t ; 4 ; t) | $t \in \mathbb{R}$ } c) L = { }

Aufgabe 3:
Sind die Aussagen wahr oder falsch ?
Gib eine kurze Begründung an.
a) Jedes lineare Gleichungssystem in Stufenform, das weniger Gleichungen als Variablen aufweist, hat unendlich viele Lösungen.
b) Wenn man ein lineares Gleichungssystem durch Äquivalenzumformungen auf eine dreieckige Stufenform bringen kann, so hat es keine Lösung.
c) Hat ein lineares Gleichungssystem mehr Gleichungen als Variablen, so hat es keine Lösung.
d) Ist bei einem linearen Gleichungssystem mit gleicher Anzahl von Gleichungen und Variablen eine der Gleichungen ein Vielfaches einer zweiten, so hat das Gleichungssystem keine Lösung.

Wahlteilaufgaben (mit GTR)

Aufgabe 4:
Bestimme jeweils den Funktionsterm.
a) Der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades hat einen Tiefpunkt bei T(0/3) und einen Wendepunkt bei W(1/5).
b) Der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades berührt die x-Achse im Ursprung und hat an der Nullstelle x = -3 die Steigung 6.
c) Der Graph einer ganzrationalen Funktion vierten Grades ist achsensymmetrisch zur y-Achse. Er schneidet die y-Achse bei 2 und hat einen Tiefpunkt bei T(2/-6).
d) Der Graph einer ganzrationalen Funktion vierten Grades hat im Ursprung eine Wendetangente mit der Steigung 1 und im Punkt P(2/4) die Steigung 0.

Aufgabe 5:
Eine pharmazeutische Fabrik stellt aus 3 Rohstoffen R_i vier verschiedene Grippemittel G_j her. Die nachfolgende Tabelle gibt an, wie viel Mengeneinheiten der einzelnen Rohstoffe für je eine Mengeneinheit der Grippemittel benötigt werden.

	G_1	G_2	G_3	G_4
R_1	8	3	4	3
R_2	5	9	1	6
R_3	4	2	5	4

a) Zunächst werden nur die Grippemittel G_1, G_2 und G_3 hergestellt. Hierzu stehen 56 Mengeneinheiten (=ME) von R_1, 53 ME von R_2 und 51 ME von R_3 zur Verfügung. Wie viel ME werden von jedem Grippemittel hergestellt ?

b) Nun werden alle 4 Grippemittel hergestellt. Wie viel ME können bei gleichem Rohstoffvorrat wie in a) von G_4 maximal hergestellt werden ?

Aufgabe 6:
Ein 400 Liter fassender Brunnen kann durch drei Leitungen befüllt werden.
Ohne die zweite Leitung dauert eine komplette Füllung genau eine halbe Stunde.
Ohne die erste Leitung dauert es 10 Minuten länger.
Befüllt man den Brunnen hingegen mit den ersten beiden Leitungen, so ist er in 20 Minuten voll.
Wie viel Liter pro Stunde fließt durch die einzelnen Leitungen ?
Wie lange dauert eine gleichzeitige Befüllung mit allen drei Leitungen ?

Aufgabe 7:
Ein Radfahrer fährt in der Ebene mit einer Geschwindigkeit von 25 km/h.
Geht die Straße bergauf, erreicht er 15 km/h. Bergab kommt er auf 30 km/h.
Nun fährt der Radfahrer eine 100 km lange Strecke.
Für den Hinweg benötigt er 4 Stunden und 24 Minuten.
Für den Rückweg benötigt er 4 Stunden und 36 Minuten.
Wie viele Kilometer fährt er auf dem Hinweg in der Ebene ?
Wie viele Kilometer bergauf und wie viele Kilometer bergab ?

Lösungen

Aufgabe 1:

Um die Gleichungssysteme zu lösen, werden diese in Stufenform umgeformt.
Die Pfeile geben an, das zwei Zeilen miteinander addiert werden.

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid \cdot(-1) \\ \mid \cdot(-1) \end{array} \quad \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 10 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \end{array}\right)$$

Da in der 2.Zeile bereits zwei Nullen stehen, kann das LGS direkt gelöst werden:

Aus der 2.Zeile: $2x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 1$
Aus der 3.Zeile: $3x_2 + 2x_3 = 7 \Rightarrow 3 + 2x_3 = 7 \Rightarrow x_3 = 2$
Aus der 1.Zeile: $x_1 + 4 + 2 = 10 \Rightarrow x_1 = 4$

Lösungsmenge: L = {(4/1/2)}

b)
Es fällt auf, dass das LGS nur 2 Gleichungen, aber 3 Variablen besitzt.
Da ein Überschuss an Variablen vorliegt, kann das LGS nicht mehr eindeutig lösbar sein.
Es gibt also entweder gar keine Lösung oder unendlich viele Lösungen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid \cdot(-1) \end{array} \quad \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Aus der 2.Zeile: $-x_1 = -1 \Rightarrow x_1 = 1$
Aus der 1.Zeile: $1 + x_2 + x_3 = 0$
Es existieren unendlich viele Lösungen. Setze $x_2 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$
Eingesetzt in die 1.Zeile: $1 + t + x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = -1 - t$

Lösungsmenge: L = {(1/t/-1-t), $t \in \mathbb{R}$}

c)
Da in dem LGS links oben eine möglichst einfache Zahl stehen soll, werden die ersten beiden Zeilen vertauscht.
Im Gegensatz zu Teilaufgabe a) und b) wird hier bei der Umformung nicht die Kurzschreibweise der Matrixform verwendet.
Ob man die Kurzschreibweise verwendet oder nicht, ist reine Geschmackssache.

$$\begin{array}{rrrcrl} x_1 & & -3x_3 & = & -1 & \mid \cdot(-2) \quad \mid \cdot(-3) \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 4 & \\ 3x_1 & +2x_2 & & = & 2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} x_1 & & -3x_3 & = & -1 \\ & +x_2 & +8x_3 & = & 6 \quad |\cdot(-2) \\ & +2x_2 & +9x_3 & = & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} x_1 & & -3x_3 & = & -1 \\ & +x_2 & +8x_3 & = & 6 \\ & & -7x_3 & = & -7 \end{array}$$

Aus der 3.Zeile: $x_3 = 1$
Aus der 2.Zeile: $x_2 + 8 = 6 \Rightarrow x_2 = -2$
Aus der 1.Zeile: $x_1 - 3 = -1 \Rightarrow x_1 = 2$

Lösungsmenge L = { (2/-2/1) }

d)
$$\begin{array}{lllll} x_1 & +2x_2 & -3x_3 & =1 & |\cdot 2 \\ -2x_1 & -x_2 & +6x_3 & =4 & \\ -x_1 & +5x_2 & +3x_3 & =7 & \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} x_1 & +2x_2 & -3x_3 & =1 \\ & 3x_2 & & =6 \\ & 7x_2 & & =8 \end{array}$$

Aus der 2.Zeile folgt $x_2 = 2$

Aus der 3.Zeile folgt hingegen $x_2 = \frac{8}{7}$ was einen Widerspruch zur 2.Zeile darstellt.

Daher existiert keine Lösung. Es ist L = { }.

Aufgabe 2:

a) Strategie: Schreibe auf die linke Seite beliebige Terme mit den 3 Variablen und setze dann die gegebenen Lösungen ein. Dann ergibt sich die rechte Seite der drei Zeilen.

Eine Möglichkeit (von unendlich verschiedenen) wäre folgende:

$$\begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & =4 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & =-2 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & =0 \end{array}$$

b) Strategie wie in a).
Allerdings müssen die Terme links so gewählt werden, dass sich der Parameter t beim Verrechnen der drei Variablen auflöst.

$$\begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & =5 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & =-3 \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & =6 \end{array}$$

c) Schreibe drei Gleichungen auf, wobei bei einer Gleichung auf der linken Seite das Vielfache einer anderen Gleichung steht, auf der rechten Seite aber nicht.
(siehe im Beispiel Gleichung 1 und 2; was in Gleichung 3 steht, spielt keine Rolle)

$$\begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & =5 \\ 2x_1 & +2x_2 & +2x_3 & =7 \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & =6 \end{array}$$

Aufgabe 3:

a) Die Aussage ist falsch. Das Gleichungssystem hat definitiv keine eindeutige Lösung, es könnte aber anstatt unendlich vielen Lösungen auch gar keine Lösung besitzen.

b) Die Aussage ist falsch. Liegt eine dreieckige Stufenform vor, so besitzt das Gleichungssystem genau eine Lösung.

c) Die Aussage ist falsch. Auch ein Gleichungssystem, das mehr Gleichungen als Variablen besitzt, kann eine eindeutige Lösung oder sogar unendlich viele Lösungen besitzen.

d) Die Aussage ist falsch. Das Gleichungssystem könnte auch gar keine Lösung besitzen.

Beispiel:
$$\begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & =5 \\ 2x_1 & +2x_2 & +2x_3 & =10 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & =6 \end{array}$$

Die ersten beiden Gleichungen sind Vielfache zu einander.
Bei der dritten Gleichung entsteht jedoch ein Widerspruch zur ersten, so dass das gesamte Gleichungssystem gar keine Lösung besitzt.

Aufgabe 4:

a) Ansatz für Funktionsgleichung: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
Es gilt $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ und $f''(x) = 6ax + 2b$

Bedingungen: $f(0) = 3 \Rightarrow d = 3$
$f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$
$f(1) = 5 \Rightarrow a + b + c + d = 5$
$f''(1) = 0 \Rightarrow 6a + 2b = 0$

Mit dem GTR ergibt sich a = -1 , b = 3 , c = 0 und d = 3.

Funktionsgleichung: $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 3$

b) Ansatz für Funktionsgleichung: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
Es gilt $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Bedingungen: $f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$
$f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$
$f(-3) = 0 \Rightarrow -27a + 9b - 3c + d = 0$
$f'(-3) = 6 \Rightarrow 27a - 6b + c = 6$

Mit dem GTR ergibt sich $a = \frac{2}{3}$, b = 2 , c = 0 und d = 0.

Funktionsgleichung: $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2$

c) Ansatz für Funktionsgleichung: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$
Es gilt $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$

Bedingungen: $f(0) = 2 \Rightarrow c = 2$
$f(2) = -6 \Rightarrow 16a + 4b + c = -6$
$f'(2) = 0 \Rightarrow 32a + 4b = 0$

Mit dem GTR ergibt sich $a = 0{,}5$, b = -4 und c = 2
Funktionsgleichung: $f(x) = 0{,}5x^4 - 4x^2 + 2$

d) Ansatz für Funktionsgleichung: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
Es gilt $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$ und $f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$

Bedingungen: $f(0) = 0 \Rightarrow e = 0$
$f''(0) = 0 \Rightarrow 2c = 0 \Rightarrow c = 0$
$f'(0) = 1 \Rightarrow d = 1$
$f(2) = 4 \Rightarrow 16a + 8b + 4c + 2d + e = 4$
$f'(2) = 0 \Rightarrow 32a + 12b + 4c + d = 0$

Mit dem GTR ergibt sich $a = -0{,}5$, b = 1,25 und d = 1
Funktionsgleichung: $f(x) = -0{,}5x^4 + 1{,}25x^3 + x$

Aufgabe 5:
a)

1.Schritt:
Bei dieser Aufgabe werden 3 unterschiedliche Variable x_1, x_2, x_3 benötigt mit folgender Bedeutung: $x_i =$ ME, die vom Grippemittel G_i hergestellt wird

2.Schritt:
Aus der Aufgabenstellung ergibt sich, dass 56 ME von R_1 vorhanden sind. Wenn nun x_1 ME von G_1 hergestellt werden, werden dazu dann gemäß der Tabellenübersicht in der Aufgabe $8 \cdot x_1$ ME von R_1 benötigt; für x_2 ME von G_2 werden $3 \cdot x_2$ ME von R_1 benötigt und für x_3 ME von G_3 werden $4 \cdot x_3$ ME von R_1 benötigt. Dadurch ergibt sich die erste Zeile des folgenden LGS.
Die anderen Zeilen ergeben sich analog für die Rohstoffe R_2 und R_3.

Bedingungsgleichungen:
$$8x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 56$$
$$5x_1 + 9x_2 + 1x_3 = 53$$
$$4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 51$$

3.Schritt: Mit Hilfe des GTR ergibt sich die eindeutige Lösung $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ und $x_3 = 7$.

4.Schritt: Von G_1 werden 2 ME, von G_2 werden 4 ME und von G_3 werden 7 ME hergestellt.

b)

1.Schritt:
Bei dieser Aufgabe werden 4 unterschiedliche Variable x_1, x_2, x_3, x_4 benötigt mit folgender Bedeutung: $x_i =$ Mengeneinheit, die vom Grippemittel G_i hergestellt wird

2.Schritt:
Mit derselben Begründung wie in a) ergeben sich die folgenden

Bedingungsgleichungen:
$$\begin{aligned} 8x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 56 \\ 5x_1 + 9x_2 + 1x_3 + 6x_4 &= 53 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 &= 51 \end{aligned}$$

Da das LGS nun mehr Variablen (4 Stück) als Gleichungen (3 Stück) besitzt, kann es nicht mehr eindeutig gelöst werden.

3.Schritt: Umformung mit dem GTR (rref(A)) ergibt folgende Matrix:
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{15}{59} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{43}{59} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{42}{59} & 7 \end{array}\right)$$

Das LGS besitzt unendlich viele Lösungen, da in der letzten Zeile der Matrix noch zwei Variablen auftreten.
Um die unendlich vielen Lösungen darzustellen, wird ein Parameter t mit $t \in R$ eingeführt:
$$x_4 = t,\ x_3 = 7 - \frac{42}{59}t,\ x_2 = 4 - \frac{43}{59}t,\ x_1 = 2 + \frac{15}{59}t$$

4.Schritt:
Nun ist die Frage, wie viel von G_4 maximal hergestellt werden kann, d.h. wie hoch $x_4 = t$ maximal werden kann. Rein mathematisch kann man für t natürlich alle Zahlen einsetzen, allerdings führt z.B. der Parameterwert t = 100 auf eine negative Lösung für die Variable x_3, was ja aufgrund der Bedeutung der Variablen nicht sinnvoll ist. Man muss also zunächst herausfinden, welche Zahlenwerte für den Parameter t überhaupt sinnvoll sind. Sinnvoll bedeutet hier (und bei vielen anderen Aufgaben auch), dass die 4 Variablen alle nicht negativ werden.
Man erhält die möglichen Zahlenwerte, die für den Parameter t eingesetzt werden dürfen, aus den „Nicht-Negativitätsbedingungen“ der 4 Variablen:
$$x_4 = t \geq 0 \text{ und } x_3 = 7 - \frac{42}{59}t \geq 0 \text{ und } x_2 = 4 - \frac{43}{59}t \geq 0 \text{ und } x_1 = 2 + \frac{15}{59}t \geq 0$$
Löst man die 4 Ungleichungen nach t auf, erhält man die Bedingung, dass $t \in [0;5{,}488]$ sein muss, damit **alle** Ungleichungen / Bedingungen erfüllt sind. Das heißt, von G_4 können maximal $x_4 = t = 5{,}488$ ME hergestellt werden (wenn nur ganzzahlige Mengeneinheiten hergestellt werden können, ergeben sich damit maximal 5 Mengeneinheiten von G_4).

Aufgabe 6:

x = Pumpleistung der ersten Pumpe in Litern pro Stunde
y = Pumpleistung der zweiten Pumpe in Litern pro Stunde
z = Pumpleistung der dritten Pumpe in Litern pro Stunde

Es ergibt sich folgendes LGS:

$$0{,}5x + 0{,}5z = 400$$
$$\frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = 400$$
$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y = 400$$

Mit dem GTR ergibt sich: x = 700, y = 500, z = 100.

In der ersten Leitung fließen 700 Liter pro Stunde.
In der zweiten Leitung fließen 500 Liter pro Stunde.
In der dritten Leitung fließen 100 Liter pro Stunde.

Die Zeit bis zur Befüllung des Brunnens sei t.

Es muss gelten: $700 \cdot t + 500 \cdot t + 100 \cdot t = 400 \Rightarrow t = \frac{4}{13}$ h , also ca. 18,5 Minuten.

Aufgabe 7:

x = Strecke in der Ebene in km
y = Strecke aufwärts in km auf dem Hinweg
z = Strecke abwärts in km auf dem Hinweg

Aus der Physik wird die Formel $v = \frac{s}{t} \Rightarrow t = \frac{s}{v}$ benötigt

Es ergibt sich folgendes LGS:

$$x + y + z = 100$$
$$\frac{x}{25} + \frac{y}{15} + \frac{z}{30} = 4{,}4 \qquad (4 + \frac{24}{60} = 4{,}4)$$
$$\frac{x}{25} + \frac{y}{30} + \frac{z}{15} = 4{,}6 \qquad (4 + \frac{36}{60} = 4{,}6)$$

Mit dem GTR folgt: x = 50, y = 22, z = 28

Der Radfahrer fährt 50 km in der Ebene, 22 km auf dem Hinweg aufwärts und 28 km auf dem Hinweg abwärts.