Analytische Geometrie

Übungsaufgaben
Punkte, Vektoren, Geradengleichungen

Gymnasium Klasse 10

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

März 2014

Aufgabe 1:
Gegeben sind die Punkte O(0/0/0), A(6/6/0), B(3/9/0), S(4/6/8).

a) Das Dreieck OAB ist Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide mit Spitze S.
Zeichne die Pyramide in ein geeignetes Koordinatensystem ein.
Zeige: Das Dreieck OAB ist rechtwinklig.
Berechne das Volumen der Pyramide.

b) In Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}$ fällt paralleles Licht ein. Dabei wirft die massive Pyramide einen Schatten auf die x_1x_2-Ebene.
Berechne die Koordinaten des Schattenpunktes S' der Pyramidenspitze S.
Zeichne S' und den Schatten in das vorhandene Achsenkreuz ein.
Aus welcher Richtung muss das Licht einfallen, damit der Schattenpunkt S' auf der x_1-Achse liegt und das Schattendreieck OS'A bei S' einen rechten Winkel hat ?

Aufgabe 2:
Gegeben sind die Punkte A(4/3/-2), B(2/2/0) und C(4/0/1) sowie die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$$

a) Welche Beziehung besteht zwischen den Geraden g und h = (AB) ?
b) Zeige, dass das Dreieck ABC gleichschenklig und rechtwinklig ist.
c) Der Punkt D bildet mit A, B und C ein Quadrat. Bestimme die Koordinaten von D.
Berechne den Mittelpunkt P dieses Quadrats.

Aufgabe 3:
Auf einem Radarschirm sind zwei Flugzeuge zu erkennen, deren Flugbahnen in einem Koordinatensystem mit der Radarstation im Ursprung auf den Geraden g und h verlaufen.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ (1 Koordinateneinheit = 1 km; t = Zeit in h)

Wie nah können sich die Flugzeuge im ungünstigsten Fall kommen. Kollidieren sie ?

Aufgabe 4:
Bestimme den Punkt Q(1/q/2) so, dass der Punkt P(-2/1/4) von Q den Abstand 7 hat.

Aufgabe 5:
Die Gerade g geht durch die Punkte A(2/3/7) und B(6/-7/9).
In welchen Punkten S_{12} und S_{23} und S_{13} durchstößt g die Koordinatenebenen ?

Aufgabe 6:
Gegeben sind die Geraden g_a und h durch

$$g_a:\ \vec{x}=\begin{pmatrix} a+1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix} -4 \\ 3a \\ 2 \end{pmatrix},\ r\in\mathbb{R},\ a\in\mathbb{R};\quad h:\ \vec{x}=\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ s\in\mathbb{R}$$

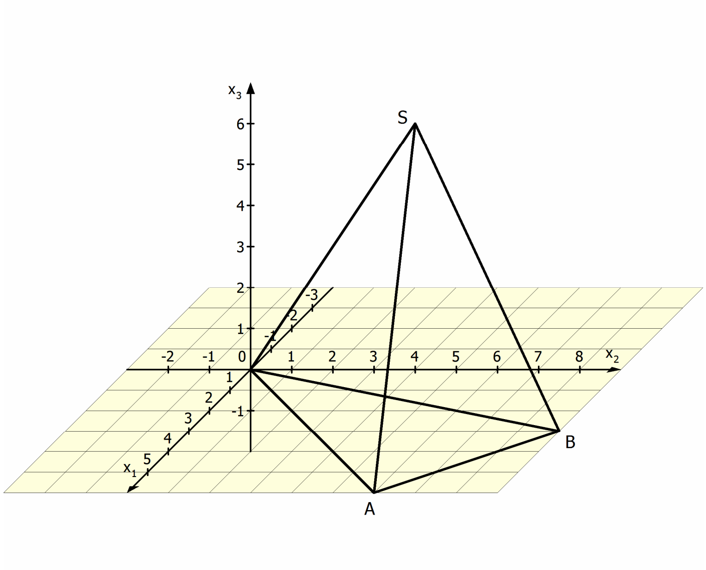
a) Für welches a ist g_a parallel zu h?

b) Welche Beziehung besteht zwischen g_a und h, wenn a = 2 bzw. a = 1 ist ?
Gib gegebenenfalls den Schnittpunkt an.

Aufgabe 7:
Berechne den Bildpunkt A* von Punkt A(7/5/2), wenn der Punkt A am Punkt Z(2/3/-1) gespiegelt wird.

Lösungen

Aufgabe 1:
a)



Nachweis dass das Dreieck OAB rechtwinklig ist:
Berechnung der einzelnen Strecken des Dreiecks:

$$\overline{OA} = \left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{36+36} = \sqrt{72} \qquad \overline{OB} = \left|\overrightarrow{OB}\right| = \left|\begin{pmatrix}3\\9\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+81} = \sqrt{90}$$

$$\overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

Im Dreieck OAB gilt der Satz des Pythagoras: $\sqrt{90}^2 = \sqrt{72}^2 + \sqrt{18}^2$.
Somit ist das Dreieck OAB rechtwinklig mit der Hypotenuse $\overline{OB}$.
Der rechte Winkel befindet sich daher im Punkt A.

Volumen der Pyramide:
$$V_{Pyramide} = \frac{1}{3}\cdot G\cdot h$$
G = Grundfläche der Pyramide = Fläche des Dreiecks OAB
$$G = \frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{AB} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{72}\cdot\sqrt{18} = 18$$
h = Höhe der Pyramide = Abstand von Punkt S zur Grundfläche = 8 LE
(x_3 -Koordinate von S)

$$V_{Pyramide} = \frac{1}{3}\cdot 18\cdot 8 = 48 \text{ Volumeneinheiten}$$

b) Die Gerade, die das Licht durch S beschreibt besitzt die Gleichung

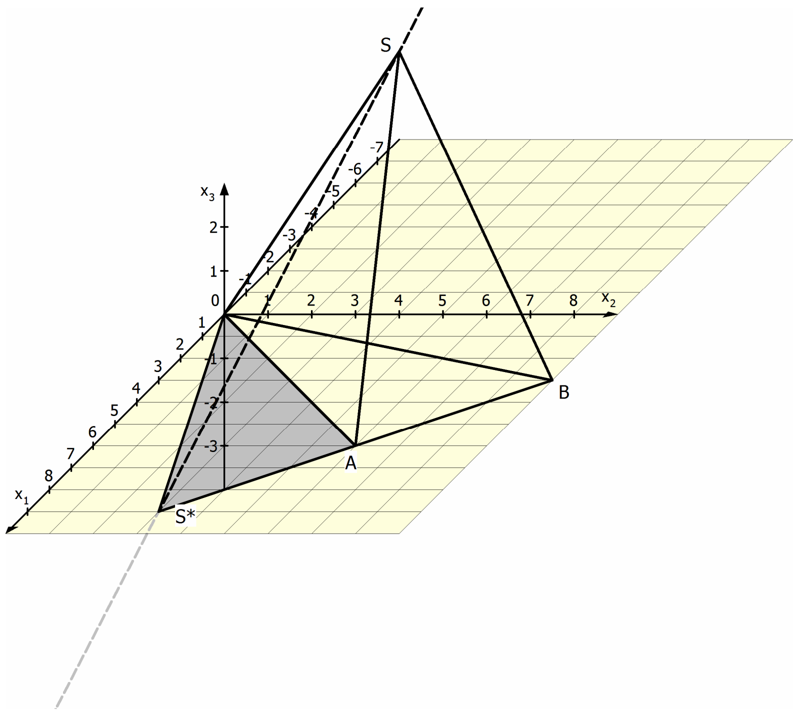
$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Gesucht ist der Schnittpunkt $S^*(x_1 / x_2 / 0)$ von der Gerade g mit der x_1x_2-Ebene.

Einsetzen von S* in g: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}$

Aus der 3.Zeile folgt: $0 = 8 - 8r \quad \Leftrightarrow r = 1$
Einsetzen von r = 1 in die Gerade ergibt den Punkt S*(9/3/0).

Zeichnung:
Die gestrichelte Gerade durch S stellt die Lichtgerade dar.
Die grau markierte Fläche ist der Schatten.



Wenn der Punkt S' auf der x_1-Achse liegen soll und das Dreieck OS'A bei S' einen rechten Winkel haben soll, kann man aus der Abbildung entnehmen, dass S'(6/0/0) sein muss.

Die Richtung, aus der das Licht einfallen muss, ist $\overrightarrow{SS'} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2:

a) Zunächst wird die Gleichung der Gerade h aufgestellt: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren der Geraden g und h sind keine Vielfache zueinander.
Daraus folgt, dass die Geraden nicht parallel zueinander sind.

Somit können sich die Geraden entweder schneiden oder sie sind windschief zueinander.

Prüfung durch Gleichsetzen der Geradengleichungen:

$$\begin{array}{rrcrl} 7 & +2t & = & 4 & -2r \quad *) \\ 3 & +t & = & 3 & -r \\ -2 & -t & = & -2 & +2r \end{array}$$

Zunächst betrachtet man nur die letzten beiden Zeilen der Gleichung ohne *):

$$\begin{array}{rrcrr} 3 & +t & = & 3 & -r \\ -2 & -t & = & -2 & +2r \end{array}$$

Addition der Gleichungen ergibt: $1 = 1 + r \Leftrightarrow r = 0$

Einsetzen von r = 0 in die 1.Zeile ergibt: $3 + t = 3 \Leftrightarrow t = 0$

Einsetzen von t = 0 und r = 0 in die Gleichung *): 7 = 4 ist ein Widerspruch

Somit ist das Gleichungssystem nicht lösbar. Die Geraden sind windschief.

b) Berechnung der Länge der Dreiecksseiten:

$$\overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+1+4} = 3 \text{ LE} \qquad \overline{AC} = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0+9+9} = \sqrt{18} \text{ LE}$$

$$\overline{BC} = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+4+1} = 3 \text{ LE}$$

Das Dreieck ist somit gleichschenklig, da $\overline{AB} = \overline{BC}$.
Das Dreieck ist auch rechtwinklig, da der Satz des Pythagoras gilt: $\sqrt{18}^2 = 3^2 + 3^2$

c) Das Viereck ABCD ist ein Quadrat, wenn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ gilt.
Der Punkt D habe die Koordinaten D(a/b/c).

Es gilt $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 4-a \\ 0-b \\ 1-c \end{pmatrix}$.

Ansatz: $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-a \\ 0-b \\ 1-c \end{pmatrix}$ Daraus folgt a = 6, b = 1, c = -1.

Der gesuchte Punkt hat die Koordinaten D(6/1/-1).

Der Mittelpunkt P des Quadrats ist der Mittelpunkt der Diagonale $\overline{AC}$.

Es ist $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$.

Der Mittelpunkt hat die Koordinaten P(4/1,5/-0,5).

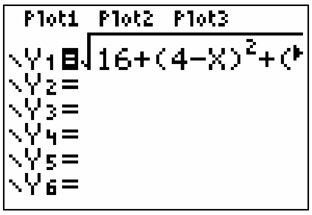
Aufgabe 3:

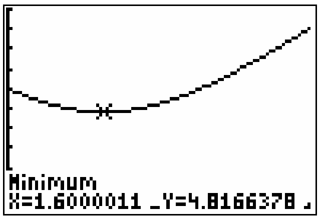
Das Flugzeug auf der Geraden g hat die allgemeinen Koordinaten G(t/5+2t/1+2t).
Das Flugzeug auf der Geraden h hat die allgemeinen Koordinaten H(4+t/9+t/3).

Der Abstand der Flugzeuge zum Zeitpunkt t beträgt

$$\overline{GH} = \left|\overrightarrow{GH}\right| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 4-t \\ 2-2t \end{pmatrix} \right| = \sqrt{16 + (4-t)^2 + (2-2t)^2}$$

Gesucht ist der Wert, den man für t einsetzen muss, damit der Wurzelausdruck minimal wird.
Dieses Minimum wird mit dem GTR bestimmt:





Die Flugzeuge kommen sich nach t = 1,6 Stunden am nächsten.
Der minimale Abstand beträgt 4,82 km. Sie kollidieren daher nicht.

Aufgabe 4:

Es ist $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ q-1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Die Bedingung lautet $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = 7$

$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{9 + (q-1)^2 + 4} = 7 \quad \Rightarrow 9 + (q-1)^2 + 4 = 49 \quad \Leftrightarrow (q-1)^2 = 36 \quad \Leftrightarrow q-1 = \pm 6$

$\Leftrightarrow q = -5$ oder $q = 7$

Es gibt zwei mögliche Punkte: Q(1/-5/2) oder Q(1/7/2).

Aufgabe 5:

Gleichung der Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt $S_{12}(x_1 / x_2 / 0)$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad 0 = 7 + 2t \Leftrightarrow t = -3{,}5$

$S_{12}(-12 / 38 / 0)$

Schnittpunkt $S_{13}(x_1 / 0 / x_3)$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad 0 = 3 - 10t \Leftrightarrow t = 0{,}3$

$S_{13}(3{,}2 / 0 / 7{,}6)$

Schnittpunkt $S_{23}(0 / x_2 / x_3)$: $\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad 0 = 2 + 4t \Leftrightarrow t = -0{,}5$

$S_{23}(0 / 8 / 6)$

Aufgabe 6:

a) Die Geraden sind parallel, wenn die Richtungsvektoren Vielfache zueinander sind:

$$k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3a \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aus der 1.Zeile und 3.Zeile folgt k = -2. Aus der 3.Zeile folgt $a = -\frac{2}{3}$

b) Fall a = 2: $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren der Geraden sind keine Vielfache, daher sind die Geraden nicht parallel.
Die Geraden können sich schneiden oder windschief zueinander sein.

Prüfung durch Gleichsetzen der Geraden:

$$\begin{array}{llcll} 3 & -4r & = & -2 & +2s \quad *) \\ 1 & +6r & = & 3 & +s \\ 2 & +2r & = & 4 & -s \end{array}$$

Zunächst betrachtet man nur die letzten beiden Zeilen der Gleichung ohne *):

$$\begin{array}{llcll} 1 & +6r & = & 3 & +s \\ 2 & +2r & = & 4 & -s \end{array}$$

Addition der Gleichungen ergibt: $3+8r=7 \Leftrightarrow r=0,5$

Einsetzen von r = 0,5 in die 1.Zeile ergibt: $1+3=3+s \Leftrightarrow s=1$

Einsetzen von r = 0,5 und s = 1 in die Gleichung *): 1 = 0 ist ein Widerspruch

Somit ist das Gleichungssystem nicht lösbar. Die Geraden sind windschief.

Fall a = 1: g_1: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-4\\3\\2\end{pmatrix}$ und h: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren der Geraden sind keine Vielfache, daher sind die Geraden nicht parallel.
Die Geraden können sich schneiden oder windschief zueinander sein.

Prüfung durch Gleichsetzen der Geraden:

$$\begin{array}{llcll} 2 & -4r & = & -2 & +2s \quad *) \\ 1 & +3r & = & 3 & +s \\ 2 & +2r & = & 4 & -s \end{array}$$

Zunächst betrachtet man nur die letzten beiden Zeilen der Gleichung ohne *):

$$\begin{array}{llcll} 1 & +3r & = & 3 & +s \\ 2 & +2r & = & 4 & -s \end{array}$$

Addition der Gleichungen ergibt: $3+5r=7 \Leftrightarrow r=0,8$

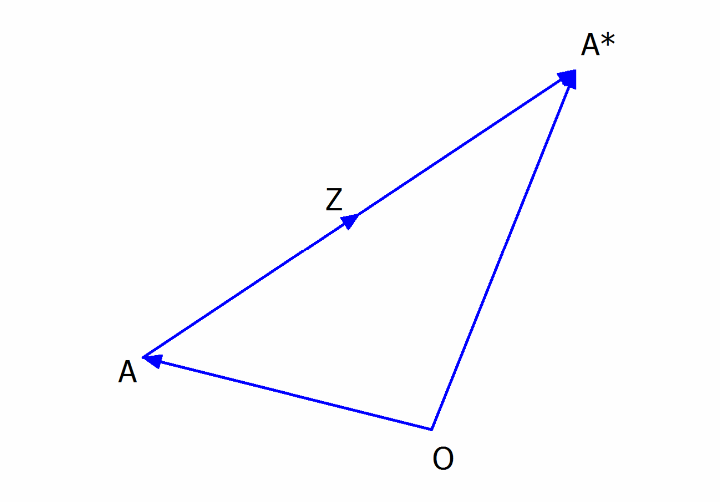
Einsetzen von r = 0,8 in die 1.Zeile ergibt: $1+2,4=3+s \Leftrightarrow s=0,4$

Einsetzen von r = 0,8 und s = 0,4 in die Gleichung *): 2 - 3,2 = -2 + 0,8 ist wahr.

Somit ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar.
Die Geraden schneiden sich.

Einsetzen von r = 0,8 in die Gerade g_1 ergibt den Schnittpunkt S(-1,2/3,4/3,6)

Aufgabe 7:



Es gilt $\overrightarrow{OA^*} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AZ} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Der Bildpunkt hat die Koordinaten A*(-3/1/-4).