Übungsaufgaben zur Symmetrieuntersuchung von Schaubildern

Aufgabe 1:
Welche der folgenden ganzrationalen Funktionen sind „gerade“ bzw. „ungerade“ Funktionen ? Welche sind weder gerade noch ungerade ?

a) $f(x) = 3x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 1$ b) $f(x) = (x-2)\cdot(x+2)$ c) $f(x) = (3x-1)^2$

d) $f(x) = 2x^5 + \sqrt{2}\cdot x$ e) $f(x) = 3x^3 - x - 7$ f) $f(x) = (x-2)^3 + 6x^2 + 8$

Aufgabe 2:
Es gibt genau eine Funktion, deren Schaubild symmetrisch zur x-Achse ist.
a) Wie lautet die Gleichung dieser Funktion ?
b) Warum gibt es keine weiteren Funktionen, deren Schaubilder symmetrisch zur x-Achse sind ?

Aufgabe 3:
Untersuche die Schaubilder der folgenden Funktionen auf Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung.

a) $f(x) = 4x + \sin(x)$ b) $f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$ c) $f(x) = 3^{-x} + 2^{2x}$

d) $f(x) = |x|$ e) $f(x) = \sqrt{x-3}$ f) $f(x) = 2x\cdot\sqrt{x^2+3}$

g) $f(x) = \frac{-2x^3 + x}{4x^5 - 2x^3}$ h) $f(x) = 4x^2 + \cos(2x)$ i) $f(x) = |2x+2|$

Aufgabe 4:
Zeige, dass die Schaubilder der folgenden Funktionen achsensymmetrisch zur Geraden g sind.

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + \frac{3}{4}$; g: x = 2 b) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 8}{(x-1)^2}$; g: x = 1

c) $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 2x + 17}$; g: x = -1

Aufgabe 5:
Zeige, dass die Schaubilder der folgenden Funktionen symmetrisch zum Punkt Z sind:

a) $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$: Z(-3/1) b) $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$; Z(-2/-4)

Übungsaufgaben zur Symmetrieuntersuchung von Schaubildern Musterlösungen

Aufgabe 1:

a) $f(x) = 3x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 1$: gerade Funktion, da alle Hochzahlen geradzahlig

b) $f(x) = (x-2)\cdot(x+2) = x^2 - 4$: gerade Funktion, da alle Hochzahlen geradzahlig

c) $f(x) = (3x-1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$: weder gerade noch ungerade

d) $f(x) = 2x^5 + \sqrt{2}\cdot x$: ungerade Funktion, da alle Hochzahlen ungerade

e) $f(x) = 3x^3 - x - 7$: weder gerade noch ungerade, da $7 = 7\cdot x^0$ und die Zahl 0 geradzahlig ist

f) $f(x) = (x-2)^3 + 6x^2 + 8 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + 6x^2 + 8 = x^3 + 12x$: ungerade Funktion

Aufgabe 2:

a) Das Schaubild der Gerade y = 0 (die x-Achse) ist symmetrisch zur x-Achse.

b) Wenn das Schaubild einer Funktion symmetrisch zur x-Achse wäre, gäbe es zu einem x-Wert zwei verschiedene y-Werte (nämlich einen oberhalb und einen unterhalb der x-Achse) und dies widerspricht der Definition einer Funktion.
Eine Funktion ist eine Abbildung, die jedem x-Wert der Definitionsmenge **genau einen** y-Wert aus der Wertemenge zuordnet.

Aufgabe 3:

Wichtige Regel für trigonometrische Funktionen:
Es gilt $\sin(-x) = -\sin(x)$ und $\cos(-x) = \cos(x)$

a) $f(x) = 4x + \sin(x)$; $f(-x) = -4x + \sin(-x) = -4x - \sin(x) = -f(x)$
also symmetrisch zum Ursprung

b) $f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$; $f(-x) = \frac{-3x}{(-x)^2+1} = \frac{-3x}{x^2+1} = -f(x)$ also symmetrisch zum Ursprung

c) $f(x) = 3^{-x} + 2^{2x}$; $f(-x) = 3^x + 2^{-2x} \neq -f(x)$ und $\neq f(x)$
also keine Symmetrie erkennbar

d) $f(x) = |x|$; $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$ also symmetrisch zur y-Achse

e) $f(x) = \sqrt{x-3}$; $f(-x) = \sqrt{-x-3} \neq -f(x)$ und $\neq f(x)$
also keine Symmetrie erkennbar

f) $f(x) = 2x\cdot\sqrt{x^2+3}$; $f(-x) = -2x\cdot\sqrt{(-x)^2+3} = -2x\cdot\sqrt{x^2+3} = -f(x)$
also symmetrisch zum Ursprung

g) $f(x) = \frac{-2x^3+x}{4x^5-2x^3}$; $f(-x) = \frac{-2(-x)^3-x}{4(-x)^5-2(-x)^3} = \frac{2x^3-x}{-4x^5+2x^3} = \frac{-(-2x^3+x)}{-(4x^5-2x^3)} = f(x)$
also symmetrisch zur y-Achse

h) $f(x) = 4x^2 + \cos(2x)$; $f(-x) = 4(-x)^2 + \cos(-2x) = 4x^2 + \cos(2x) = f(x)$
also symmetrisch zur y-Achse

i) $f(x) = |2x + 2|$; $f(-x) = |-2x + 2| \neq -f(x)$ und $\neq f(x)$
also keine Symmetrie erkennbar

Aufgabe 4:

a) Nachweis: $f(2+h) = f(2-h)$ für alle reellen h:

$$\frac{1}{4}(2+h)^2 - (2+h) + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}(2-h)^2 - (2-h) + \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}(4 + 4h + h^2) - 2 - h = \frac{1}{4}(4 - 4h + h^2) - 2 + h \Rightarrow 0 = 0$$ ergibt eine wahre Aussage
also ist das Schaubild von f symmetrisch zur Geraden x = 2.

b) Nachweis: $f(1+h) = f(1-h)$ für alle reellen h:

$$\frac{(1+h)^2 - 2(1+h) + 8}{(1+h-1)^2} = \frac{(1-h)^2 - 2(1-h) + 8}{(1-h-1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{h^2 + 2h + 1 - 2 - 2h + 8}{h^2} = \frac{1 - 2h + h^2 - 2 + 2h + 8}{h^2} \Rightarrow 0 = 0$$ ergibt eine wahre
Aussage, also ist das Schaubild von f symmetrisch zur Geraden x = 1.

c) Nachweis: $f(-1+h) = f(-1-h)$ für alle reellen h:

$$\frac{(-1+h)^2 + 2(-1+h) - 3}{(-1+h)^2 + 2(-1+h) + 17} = \frac{(-1-h)^2 + 2(-1-h) - 3}{(-1-h)^2 + 2(-1-h) + 17}$$

$$\Rightarrow \frac{h^2 - 2h + 1 - 2 + 2h - 3}{h^2 - 2h + 1 - 2 + 2h + 17} = \frac{h^2 + 2h + 1 - 2 - 2h - 3}{h^2 + 2h + 1 - 2 - 2h + 17} \Rightarrow 0 = 0$$ ergibt eine wahre
Aussage, also ist das Schaubild von f symmetrisch zur Geraden x = -1.

Aufgabe 5:

a) Nachweis: $f(-3+h) + f(-3-h) = 2 \cdot 1$

$$\frac{-3+h-2}{-3+h+3} + \frac{-3-h-2}{-3-h+3} = 2 \Rightarrow \frac{h-5}{h} + \frac{-h-5}{-h} = 2 \Rightarrow \frac{h-5+h+5}{h} = 2 \Rightarrow \frac{2h}{h} = 2$$

ergibt eine wahre Aussage, also ist das Schaubild von f symmetrisch zum Punkt Z(-3/1).

b) Nachweis: $f(-2+h) + f(-2-h) = 2 \cdot (-4)$

$$\frac{(-2+h)^2}{-2+h+2} + \frac{(-2-h)^2}{-2-h+2} = -8 \Rightarrow \frac{h^2 - 4h + 4}{h} + \frac{h^2 + 4h + 4}{-h} = -8$$

$$\Rightarrow \frac{h^2 - 4h + 4 - h^2 - 4h - 4}{h} = -8 \Rightarrow \frac{-8h}{h} = -8$$

ergibt eine wahre Aussage, also ist das Schaubild von f symmetrisch zum Punkt Z(-2/-4).