Analysis

Integral und Flächeninhalt
Übungsaufgaben

Gymnasium Oberstufe J1

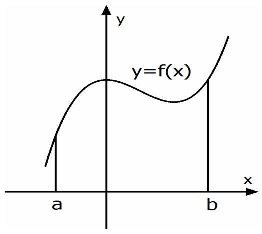
Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Februar 2015

Hinweis: Bei allen Aufgaben soll das Integral mit Hilfe einer Stammfunktion berechnet werden. Danach kann zur Berechnung der Ergebnisse der GTR benutzt werden.

Aufgabe 1:
Berechne den Inhalt der Fläche zwischen dem Schaubild der Funktion f und der x-Achse über dem Intervall
I = [a ; b]



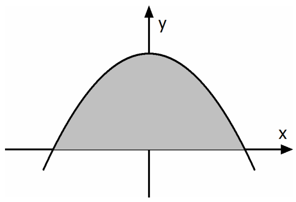
a) $f(x) = 2\cos(x)$, $I = [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$, $I = [1;5]$

c) $f(x) = e^x$; I = [-3 ; 1]

d) $f(x) = \sin(2x+1)$, $I = [0;\frac{\pi}{2}]$

Aufgabe 2:
Berechne den Inhalt der vom Schaubild der Funktion f und der x-Achse eingeschlossenen Fläche.



a) $f(x) = x^2 - 4$

b) $f(x) = x - 2\sqrt{x}$

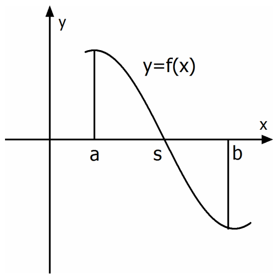
c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1$

d) $f(x) = x - 4 + \frac{3}{x}$

e) $f(x) = 2\sin(x)$, $x \in [0;\pi]$

f) $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2}$

Aufgabe 3:
Berechne den Inhalt der Fläche zwischen dem Schaubild der Funktion f und der x-Achse über dem Intervall I = [a;b].



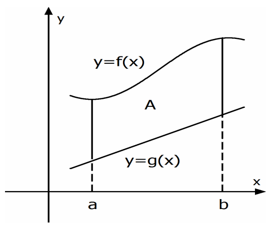
a) $f(x) = x^3$, I = [-2;2]

b) $f(x) = 2\sin(x)$; $I = [0;2\pi]$

c) $f(x) = \frac{1}{x} - 1$, $I = [\frac{1}{2};2]$

d) $f(x) = x^2 - x$, I = [-1 ; 2]

Aufgabe 4:
Berechne den Inhalt der Fläche, die von den Schaubildern der Funktionen f und g über dem Intervall I = [a;b] begrenzt wird.



a) $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = 2x + 1$, I = [0;2]

b) $f(x) = e^x$, $g(x) = -e^x$, I = [-2;1]

c) $f(x) = 2\sin(x)$, $g(x) = 2\cos(x)$, $I = [0;\frac{\pi}{4}]$

d) $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$, I = [0;1]

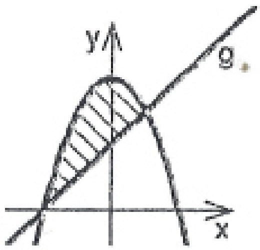
Aufgabe 5:
Gib eine Stammfunktion an.

a) $f(x) = x^5$ b) $f(x) = \cos(x)$ c) $f(x) = \sqrt{x}$

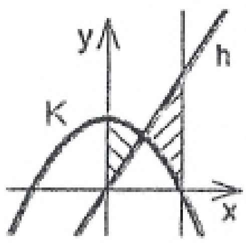
d) $f(x) = \dfrac{x^8 + 1}{x^2}$ e) $f(x) = (4x + 5)^3$ f) $f(x) = 8(x + 2)(x - 9)$

Aufgabe 6:

a) Das schraffierte Flächenstück wird von der Parabel $y = 4 - x^2$ und der Geraden g: $y = x + 2$ eingeschlossen. Berechne seinen Flächeninhalt.



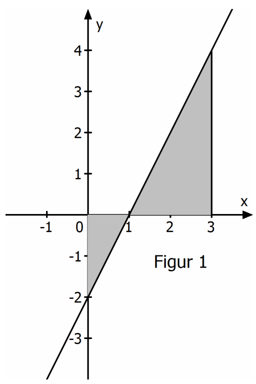
b) Die Parabel K hat die Gleichung $y = 2 - \frac{1}{2}x^2$. Bestimme eine Gleichung der Ursprungsgeraden h, so dass die beiden schraffierten Flächenstücke den gleichen Flächeninhalt haben.

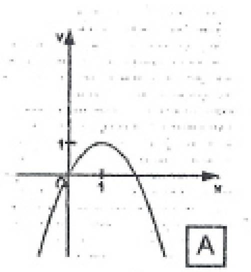


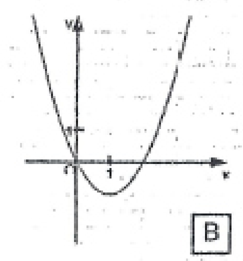
Aufgabe 7:

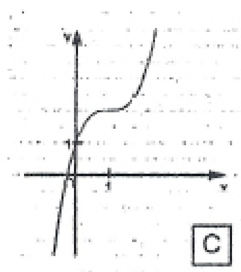
a) Drücke den Inhalt der getönten Flächenstücke in Figur 1 mithilfe von Integralen aus und berechne danach den Inhalt.

b) Welche der unten abgebildeten Schaubilder A,B und C stellt eine Stammfunktion der in Figur 1 abgebildeten Randfunktion dar ? Begründe anschaulich.









Lösungen

Aufgabe 1:

a) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(x)dx = [2\sin(x)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\sin(\frac{\pi}{2}) - 2\sin(-\frac{\pi}{2}) = 2 - 2\cdot(-1) = 4$ FE

b) $\int_1^5 (\frac{1}{x^2}+1)dx = \int_1^5 (x^{-2}+1)dx = \left[-x^{-1}+x\right]_1^5 = \left[-\frac{1}{x}+x\right]_1^5 = -\frac{1}{5}+5-(-1+1) = 4,8$ FE

c) $\int_{-3}^1 e^x dx = \left[e^x\right]_{-3}^1 = e - e^{-3} \approx 2,67$ FE

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x+1)dx = \left[-\cos(2x+1)\cdot\frac{1}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -0,5\cos(\pi+1) + 0,5\cos(1) \approx 0,54$ FE

Aufgabe 2:

a) Berechnung der Nullstellen: $f(x) = 0$

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$\int_{-2}^2 (x^2-4)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 4x\right]_{-2}^2 = \frac{8}{3} - 8 - (-\frac{8}{3}+8) = -\frac{32}{3}$, also $A = \frac{32}{3}$ FE

b) Berechnung der Nullstellen: $f(x) = 0$

$x - 2\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 2\sqrt{x} \Rightarrow x^2 = 4x \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x\cdot(x-4) = 0$

Satz vom Nullprodukt ergibt x = 0 oder x = 4.

$\int_0^4 (x - 2\sqrt{x})dx = \int_0^4 (x - 2x^{0,5})dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^4 = 8 - \frac{4}{3}\cdot 8 - (0) = -\frac{8}{3}$

also $A = \frac{8}{3}$ FE

c) Berechnung der Nullstellen: $f(x) = 0$

$\sqrt[3]{x^2} - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$\int_{-1}^1 (\sqrt[3]{x^2} - 1)dx = \int_{-1}^1 (x^{\frac{2}{3}} - 1)dx = \left[\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} - x\right]_{-1}^1 = \left[\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} - x\right]_{-1}^1 = \frac{3}{5} - 1 - (-\frac{3}{5}+1) = -0,8$

also $A = 0,8$ FE

d) Berechnung der Nullstellen: $f(x)=0$

$$x-4+\frac{3}{x}=0 \overset{\cdot x}{\Rightarrow} x^2-4x+3=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm 2}{2} \Rightarrow x_1=3\ ,\ x_2=1$$

$$\int_1^3 (x-4+\frac{3}{x})dx=\int_1^3 (x-4+3x^{-1})dx=\left[\frac{1}{2}x^2-4x+3\ln|x|\right]_1^3=4{,}5-12+3\ln(3)-(0{,}5-4+0)$$

$$=3\ln(3)-4\approx -0{,}704$$

also $A=4-3\ln(3)\approx 0{,}704$ FE

e) Berechnung der Nullstellen: $f(x)=0$

$$2\sin(x)=0 \Rightarrow \sin(x)=0 \Rightarrow x=0 \text{ oder } x=\pi$$

$$\int_0^\pi (2\sin(x))dx=\left[-2\cos(x)\right]_0^\pi=-2\cos(\pi)+2\cos(0)=2+2=4$$

also A = 4 FE

f) Berechnung der Nullstellen: $f(x)=0$

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2}=0 \overset{\cdot x^2}{\Rightarrow} x^2-3x+2=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm 1}{2} \Rightarrow x_1=2\ ,\ x_2=1$$

$$\int_1^2 (\frac{x^2-3x+2}{x^2})dx=\int_1^2 (1-3x^{-1}+2x^{-2})dx=\left[x-3\ln|x|-\frac{2}{x}\right]_1^2=2-3\ln(2)-1-(1-0-2)$$

$$=2-3\ln(2)\approx -0{,}08$$

also $A=2-3\ln(2)\approx 0{,}08$ FE

Aufgabe 3:

a) Berechnung der Nullstellen: $f(x)=0$

$$x^3=0 \Rightarrow x=0$$

$$A=\left|\int_{-2}^0 x^3dx\right|+\left|\int_0^2 x^3dx\right|=\left|\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-2}^0\right|+\left|\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^2\right|=|0-4|+|4-0|=8 \text{ FE}$$

b) Berechnung der Nullstellen: $f(x)=0$

$$2\sin(x)=0 \Rightarrow x_1=0\ ,\ x_2=\pi\ ,\ x_3=2\pi$$

$$A=\left|\int_0^\pi 2\sin(x)dx\right|+\left|\int_\pi^{2\pi} 2\sin(x)dx\right|=\left|\left[-2\cos(x)\right]_0^\pi\right|+\left|\left[-2\cos(x)\right]_\pi^{2\pi}\right|=|2-(-2)|+|-2-2|=8 \text{ FE}$$

c) Berechnung der Nullstellen: $f(x)=0$

$$\frac{1}{x}-1=0 \overset{\cdot x}{\Rightarrow} 1-x=0 \Rightarrow x=1$$

$$A=\left|\int_{0{,}5}^1 (\frac{1}{x}-1)dx\right|+\left|\int_1^2 (\frac{1}{x}-1)dx\right|=\left|\left[\ln|x|-x\right]_{0{,}5}^1\right|+\left|\left[\ln|x|-x\right]_1^2\right|$$

$$=|0-1-(\ln(0{,}5)-0{,}5)|+|\ln(2)-2-(0-1)|=|-0{,}5-\ln(0{,}5)|+|-1+\ln(2)|=0{,}5$$

d) Berechnung der Nullstellen: $f(x)=0$

$x^2-x=0 \Rightarrow x\cdot(x-1)=0 \Rightarrow x=0$ und $x = 1$

$$A=\left|\int_{-1}^{0}(x^2-x)dx\right|+\left|\int_{0}^{1}(x^2-x)dx\right|+\left|\int_{1}^{2}(x^2-x)dx\right|=\left|\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}\right|+\left|\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}\right|+\left|\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{1}^{2}\right|$$

$$=\left|0-(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2})\right|+\left|\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-0\right|+\left|\frac{8}{3}-2-(\frac{1}{3}-\frac{1}{2})\right|=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=\frac{11}{6}\ \text{FE}$$

Aufgabe 4:

a) $A=\left|\int_{0}^{2}(2x+1-(2x-1))dx\right|=\left|\int_{0}^{2}2dx\right|=\left|[2x]_0^2\right|=4\ \text{FE}$

b) $A=\left|\int_{-2}^{1}(e^x-(-e^x))dx\right|=\left|\int_{-2}^{1}2e^x dx\right|=\left|\left[2e^x\right]_{-2}^{1}\right|=2e-2e^{-2}\approx 5{,}17\ \text{FE}$

c) $A=\left|\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(2\cos(x)-2\sin(x))dx\right|=\left|[2\sin(x)+2\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{4}}\right|=2\sin(\frac{\pi}{4})+2\cos(\frac{\pi}{4})-2\approx 0{,}83\ \text{FE}$

d) $A=\left|\int_{0}^{1}(x^3-x^2)dx\right|=\left|\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1\right|=\left|\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-0\right|=\frac{1}{12}\ \text{FE}$

Aufgabe 5:

a) $F(x)=\frac{1}{6}x^6$ b) $F(x)=\sin(x)$ c) $f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow F(x)=\frac{1}{3/2}x^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

d) $f(x)=\frac{x^8+1}{x^2}=\frac{x^8}{x^2}+\frac{1}{x^2}=x^6+x^{-2} \Rightarrow F(x)=\frac{1}{7}x^7-x^{-1}$

e) $F(x)=\frac{1}{4}(4x+5)^4\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}(4x+5)^4$

f) $f(x)=8(x+2)(x-9)=8(x^2-7x-18) \Rightarrow F(x)=8\cdot\left(\frac{1}{3}x^3-3{,}5x^2-18x\right)$

Aufgabe 6:

a) Berechnung der Schnittstellen der Funktionen:

$4-x^2=x+2 \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow x_1=1,\ x_2=-2$

$$A=\int_{-2}^{1}(4-x^2-(x+2))dx=\int_{-2}^{1}(-x^2-x+2)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}$$

$$=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2-(\frac{8}{3}-2-4)=4{,}5\ \text{FE}$$

b) Berechnung der Schnittstelle der Parabel mit der x-Achse:

$$2-\frac{1}{2}x^2=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$$

Die Gerade h besitzt die allgemeine Gleichung $y=m\cdot x$

Bedingung, damit die beiden Flächen gleich groß sind: $\int_0^2 (2-\frac{1}{2}x^2-mx)dx=0$

$$\int_0^2 (2-\frac{1}{2}x^2-mx)dx=\left[2x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}mx^2\right]_0^2=4-\frac{4}{3}-2m=\frac{8}{3}-2m$$

Nun soll gelten: $\frac{8}{3}-2m=0 \Rightarrow m=\frac{4}{3}$

Die Gerade besitzt die Gleichung $y=\frac{4}{3}x$.

Aufgabe 7:

a) Die Gerade besitzt die Gleichung $y=2x-2$ (y-Achsenabschnitt ist -2 und Steigung ist m = 2)

$$A_{\text{linkes Dreieck}}=-\int_0^1 (2x-2)dx=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=1 \text{ FE}$$

$$A_{\text{rechtes Dreieck}}=\int_1^3 (2x-2)dx=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4=4 \text{ FE}$$

b) Die Gerade in Figur 1 besitzt an der Stelle x = 1 eine Nullstelle mit einem Vorzeichenwechsel von - nach +-
Somit muss das Schaubild der Stammfunktion bei x = 1 ein relatives Minimum (Tiefpunkt) haben.
Es kommt nur das Schaubild B in Frage.