Analysis

Trigonometrische Funktionen

Gymnasium ab Klasse 10

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Dezember 2013

Hinweis:
Außer bei Aufgabe 1 darf der GTR benutzt werden.

Aufgabe 1:
Bestimme ohne GTR:

a) $\sin(405°)$ b) $\sin(120°)$ c) $\cos(5\pi)$ d) $\cos(\frac{11}{3}\pi)$ e) $\tan(\frac{\pi}{3})$

Aufgabe 2:
Bestimme alle Lösungen der Gleichung aus der Grundmange $G = [-\pi; 2\pi]$.

a) $\cos(x) = 0,7$ b) $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ c) $2\sin(x) = -0,1$

d) $\sin(x) = \cos(x)$ e) $0,5 \cdot \sin(x) = 3 \cdot \sin(x) + 1$

Aufgabe 3:

Gegeben sind die Funktionen $f(x) = 3 \cdot \sin(\frac{\pi}{3}x + \frac{2}{3}\pi)$; $-2 \le x \le 4$ und

$g(x) = \sin(2x - \pi) + 1$; $0 \le x \le 1,5\pi$.

Skizziere die Graphen und bestimme die Achsenschnittpunkte sowie die Hoch- und Tiefpunkte.

Aufgabe 4:
Begründe die Richtigkeit der Gleichungen:

a) $\sin(60°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ b) $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ c) $\left(\sin(x)\right)^2 + \left(\cos(x)\right)^2 = 1,\ x \in \mathbb{R}$

Aufgabe 5:
Der Befestigungspunkt einer Gondel eines Riesenrades bewegt sich auf einer Kreisbahn.
Die Höhe des Punktes über dem Boden wird durch die Funktion

$h(t) = 23 + 20 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}(t - 1,5)\right)$ beschrieben (t in Minuten, h(t) in Meter)

Bestimme die Umdrehungsdauer und den Durchmesser des Riesenrades.
Wo befindet sich der Punkt zum Zeitpunkt t = 0 ? Skizziere das Schaubild von h.

Aufgabe 6:
Die Kurve mit der Gleichung $y = \sin(x)$ wird durch die Hintereinanderausführung der folgenden Abbildungen verändert:
(1) Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 1,5
(2) Streckung in x-Richtung mit dem Faktor 2.
(3) Verschiebung in negative x-Richtung um 1 Längeneinheit

Wie lautet die Gleichung der so entstandenen Kurve ?
Wie lautet die Gleichung, wenn man die Abbildungen (2) und (3) vertauscht ?

Aufgabe 7:
Der Temperaturverlauf während eines Sommertags lässt sich näherungsweise durch eine Sinuskurve beschreiben.
In der Nacht sinkt die Temperatur auf ihren tiefsten Wert von 10°C, der zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ um 3 Uhr früh gemessen wird. Die Temperatur steigt dann bis 15 Uhr auf ein Maximum von 30°C an, um schließlich bis 3 Uhr wieder auf 10°C abzufallen.
Bestimme eine Funktionsgleichung, die diesen Temperaturverlauf beschreibt.

Lösungen

Aufgabe 1:

a) $\sin(405°) = \sin(405° - 360°) = \sin(45°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

b) $\sin(-120°) = -\sin(120°) = -\sin(60°) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

c) $\cos(5\pi) = \cos(5\pi - 4\pi) = \cos(\pi) = -1$

d) $\cos(\frac{11}{3}\pi) = \cos(\frac{11}{3}\pi - 2\pi) = \cos(\frac{5}{3}\pi) = \cos(\frac{\pi}{3}) = 0{,}5$

e) $\tan(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sin(\frac{\pi}{3})}{\cos(\frac{\pi}{3})} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

Aufgabe 2:

a) $\cos(x) = 0{,}7$

Mit dem GTR ergibt sich $x_1 = 0{,}80$.

Die weiteren Lösungen lauten $x_2 = 2\pi - 0{,}8 = 5{,}48$ und $x_3 = 5{,}48 - 2\pi = -0{,}8$

b) $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Es ist $x_1 = -\frac{\pi}{3}$ und $x_2 = \pi - (-\frac{\pi}{3}) = \frac{4}{3}\pi$

Außerdem ist $x_3 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5}{3}\pi$ und $x_4 = \frac{4}{3}\pi - 2\pi = -\frac{2}{3}\pi$

c) $2\sin(x) = -0{,}1 \Rightarrow \sin(x) = -0{,}05$

Mit dem GTR ergibt sich $x_1 = -0{,}05$.

Die weiteren Lösungen lauten $x_2 = \pi - (-0{,}05) = 3{,}19$ und $x_3 = 3{,}19 - 2\pi = -3{,}09$

und $x_4 = -0{,}05 + 2\pi = 6{,}23$

d) $\sin(x) = \cos(x) \overset{:\cos(x)}{\Rightarrow} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 1 \Rightarrow \tan(x) = 1$

Daraus folgt: $x_1 = \frac{1}{4}\pi$; $x_2 = \frac{1}{4}\pi + \pi = \frac{5}{4}\pi$; $x_3 = \frac{1}{4}\pi - \pi = -\frac{3}{4}\pi$

e) $0{,}5 \cdot \sin(x) = 3 \cdot \sin(x) + 1 \overset{-3\sin(x)}{\Rightarrow} -2{,}5\sin(x) = 1 \overset{:(-2{,}5)}{\Rightarrow} \sin(x) = -0{,}4$

Mit dem GTR ergibt sich $x_1 = -0{,}41$

Die weiteren Lösungen sind $x_2 = \pi - (-0{,}41) = 3{,}55$ und $x_3 = -0{,}41 + 2\pi = 5{,}87$

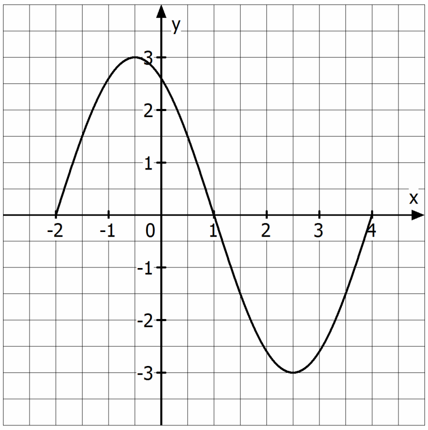
und $x_4 = 3{,}55 - 2\pi = -2{,}73$

Aufgabe 3:

Skizze von $f(x) = 3 \cdot \sin(\frac{\pi}{3}x + \frac{2}{3}\pi)$

Es ist $f(x) = 3 \cdot \sin(\frac{\pi}{3} \cdot (x+2))$

Die Amplitude ist a = 3. Die Periode von f(x) ist $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$ und das Schaubild von f(x) ist gegenüber der Funktion sin(x) um 2 nach links verschoben.

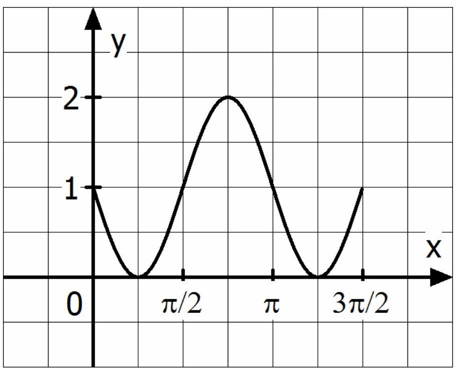


Achsenschnittpunkte: $N_1(-2/0)$; $N_2(1/0)$; $N_3(4/0)$
Hochpunkt H(-0,5/3) und Tiefpunkt T(2,5/-3)

Skizze von $g(x) = \sin(2x - \pi) + 1$

Es ist $g(x) = \sin(2 \cdot (x - \frac{\pi}{2})) + 1$

Die Amplitude ist a = 1. Die Periode von g(x) ist $\frac{2\pi}{2} = \pi$ und das Schaubild von g(x) ist gegenüber der Funktion sin(x) um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts und 1 nach oben verschoben.



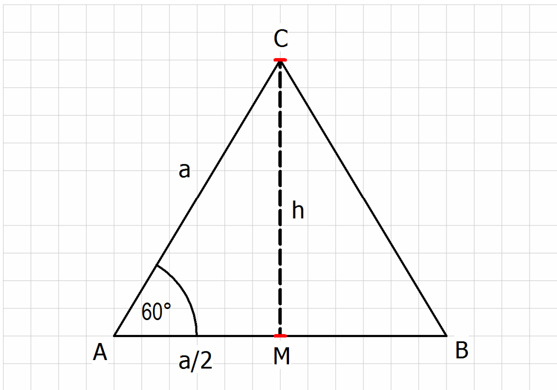
Achsenschnittpunkte: $N_1(\frac{\pi}{4}/0)$; $N_2(\frac{5}{4}\pi/0)$

Hochpunkt $H(\frac{3}{4}\pi/2)$. Die Tiefpunkte entsprechen den Achsenschnittpunkten.

Aufgabe 4:

a) Begründung von $\sin(60°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Die Begründung erfolgt mit Hilfe eines gleichseitigen Dreiecks:



Das Dreieck ABC sei gleichseitig mit der Seitenlänge a.
Das linke Teildreieck AMC ist rechtwinklig.

Berechnung der Höhe h mit dem Satz des Pythagoras: $h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

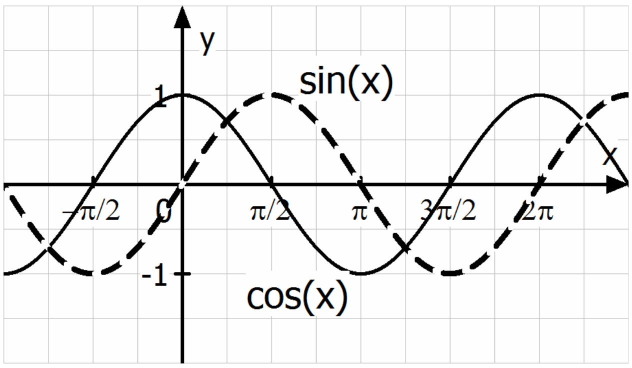
$$\Rightarrow h = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$$

Nun gilt: $\sin 60° = \frac{h}{a} = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{3}}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ was zu zeigen war

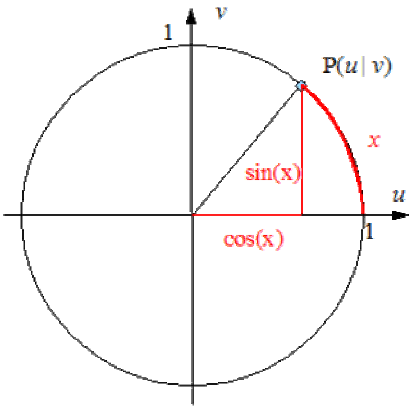
b) $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

Diese Gleichung bedeutet anschaulich, dass eine Verschiebung der Funktion y = sin(x) um $\frac{\pi}{2}$ nach links die Funktion y = cos(x) ergibt.

Dies wird durch die Schaubilder der Funktionen anschaulich bestätigt.



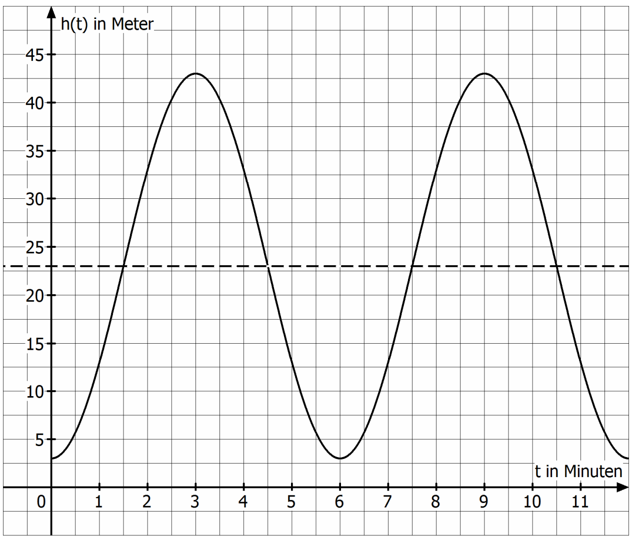
c) Die Formel $\left(\sin(x)\right)^2 + \left(\cos(x)\right)^2 = 1$ (der so genannte "trigonometrische Pythagoras") kann anschaulich anhand des Einheitskreises begründet werden.



Das rechtwinklige Dreieck hat eine Hypotenuse der Länge 1.
Daher gilt die obige Formel gemäß des Satzes des Pythagoras.

Aufgabe 5:

Skizze von h:



Die Funktion $h(t) = 23 + 20 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}(t - 1{,}5)\right)$ hat die Periode $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$.

(anschaulich ist dies z.B. der waagrechte Abstand von Hochpunkt zu Hochpunkt).

Damit ist die Umdrehungsdauer des Riesenrades 6 Minuten.

Der Radius des Riesenrades entspricht der Amplitude der Funktion, also 20 Meter.
Der Durchmesser ist damit 40 Meter.

Zur Zeit t = 0 befindet sich der Punkt auf der Höhe $h(0) = 23 + 20 \cdot \sin(-\frac{\pi}{2}) = 3$ Meter.

Aufgabe 6:

Gegeben ist die Funktion $f(x)=\sin(x)$.
(1): Streckung in y-Richtung mit Faktor 1,5 ergibt $g(x)=1{,}5\cdot f(x)=1{,}5\sin(x)$
(2): Streckung in x-Richtung mit Faktor 2 ergibt $h(x)=g(\frac{1}{2}x)=1{,}5\sin(\frac{1}{2}x)$ (Kehrwert !!)

(3): Verschiebung um 1 nach links ergibt: $k(x)=h(x+1)=1{,}5\sin(\frac{1}{2}(x+1))$

Die gesuchte Funktionsgleichung ist $k(x)=1{,}5\sin(\frac{1}{2}(x+1))$

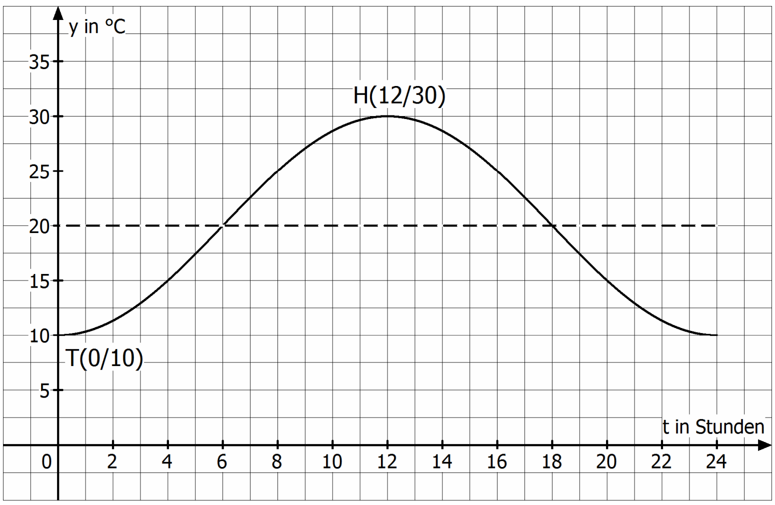
Vertauschung von (2) und (3):
(1): Streckung in y-Richtung mit Faktor 1,5 ergibt $g(x)=1{,}5\cdot f(x)=1{,}5\sin(x)$
(2): Verschiebung um 1 nach links ergibt: $h(x)=g(x+1)=1{,}5\sin(x+1)$
(3): Streckung in x-Richtung mit Faktor 2 ergibt: $k(x)=h(\frac{1}{2}x)=1{,}5\sin(\frac{1}{2}x+1)$

Die gesuchte Funktionsgleichung ist $k(x)=1{,}5\sin(\frac{1}{2}x+1)$.

Aufgabe 7:

Um die Funktionsgleichung aufzustellen, sollte man zunächst die Kurve skizzieren gemäß der Angaben in der Aufgabe.
Zum Zeitpunkt t = 0 existiert ein Tiefpunkt auf der Höhe 10°C.
Um 15 Uhr (dies entspricht t = 12) existiert ein Hochpunkt auf der Höhe 30°C.

Damit kann das Schaubild skizziert werden.



Ansatz: $f(x)=a\cdot\sin(b\cdot(x-c))+d$ mit a = 10, $b=\frac{2\pi}{\text{Periode}}=\frac{2\pi}{24}=\frac{\pi}{12}$, c = 6 und d = 20.

$$f(x)=10\sin(\frac{\pi}{12}(x-6))+20$$

Alternativ kann auch die Kosinusfunktion genutzt werden:
Dann wäre $f(x)=10\cos(\frac{\pi}{12}(x-12))+20$ oder auch $f(x)=-10\cos(\frac{\pi}{12}x)+20$