Analysis

Klausur zur Integralrechnung
Stammfunktionsberechnung, Integralfunktion, Funktionen zu Änderungsraten
(Bearbeitungszeit: 90 Minuten)

Gymnasium J1

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Januar 2014

Pflichtteil - ohne Hilfsmittel

Aufgabe P1: (6 VP)
Gib jeweils eine Stammfunktion an:

a) $f(x) = 2x + x^3$

b) $f(x) = -\frac{1}{4x^5} - \frac{2}{x^4} + 2x^3$

c) $f(x) = (4x+2)^{-4}$

d) $f(x) = \sqrt{3x-4}$

Aufgabe P2: (4,5 VP)

Bestimme einen Funktionsterm der Integralfunktion J_{-1} mit $J_{-1}(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt$.

a) $f(t) = \frac{2}{3}e^{-0,5t+5}$ b) $f(t) = \frac{3}{2t-1}$ c) $f(t) = \frac{2+t^2+t^5}{3t^3}$

Aufgabe P3: (6 VP)

a) Berechne das Integral und fasse das Ergebnis soweit wie möglich zusammen.

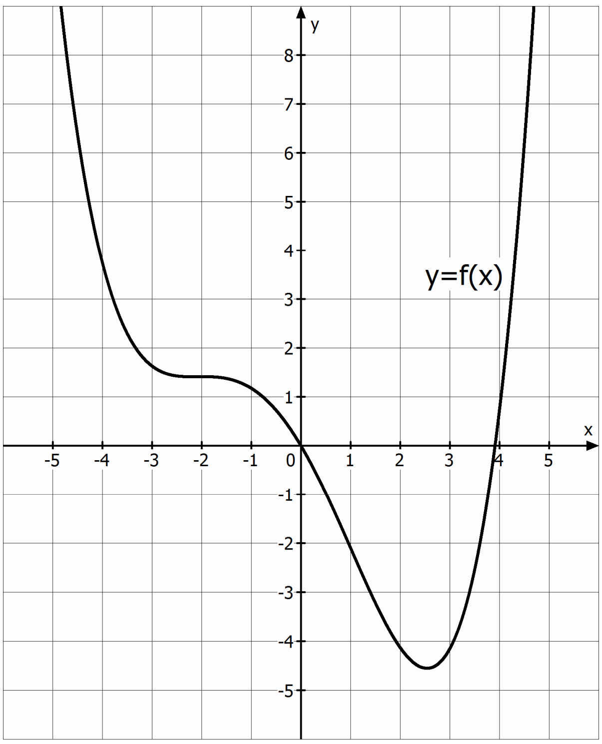
(1) $\int_{-1}^{0} \frac{1}{(2x-1)^2}dx$ (2) $\int_{0}^{2\pi} 2\sin(0,5x)dx$

b) Berechne z.

(1) $\int_{1}^{z} \left(4 - \frac{2}{x^2}\right)dx = 3$ (2) $\int_{z}^{e} \left(\frac{2}{x+e}\right)dx = 2 \cdot \ln(2)$

Aufgabe P4: (6 VP)

a) F sei die Stammfunktion von f.
Entscheide, ob die Aussage wahr, falsch oder unentscheidbar ist.
Gib jeweils eine kurze Begründung an.
(1) F hat bei x = 0 ein Maximum.
(2) F hat im Intervall [-2;2] nur positive Funktionswerte
(3) F hat bei $x \approx -2$ eine Wendestelle.
(4) F hat bei $x \approx 2,5$ ein Minimum.
(5) F hat bei $x \approx 2,5$ eine Wendestelle.
(6) F ist im Intervall [-4 ; 0] monoton steigend
(7) $F(-2) - 8 < F(-4)$



b) Skizziere in die nebenstehende Abbildung den Graphen von F mit F(-4) = 0.

Wahlteil - mit GTR und Formelsammlung

Aufgabe W1: (2,5 VP)
Durch eine Impfung wird das menschliche Immunsystem zur Bildung spezifischer Antikörper angeregt. Die Anzahl der pro Sekunde gebildeten Antikörper nach einer Tetanus-Impfung wird modellhaft durch die Funktion f mit $f(x)=\frac{1200x}{x^2+10}$ beschrieben, wobei x die Anzahl von Sekunden nach der Impfung beschreibt. Bestimme die Anzahl der innerhalb 20s nach der Impfung gebildeten Antikörper.

Aufgabe W2: (5 VP)
Bei einem Gewitter beschreibt die Funktion f mit $f(t)=60\cdot t\cdot e^{-0,5t}$, $0\leq t\leq 15$
modellhaft die Menge des auftretenden Regens (in ml pro m² und Minute; t: Zeit nach Beginn des Gewitters in Minuten).

a) Was bedeutet der Term $J_0(5)\approx 171$?
b) Bestimme $J_0(2)$.
c) Bestimme, wie viele ml Regen zwischen der 5. und der 10. Minute pro m² falllen.

Lösungen

Aufgabe P1:

a) $F(x) = x^2 + \frac{1}{4}x^4$

b) $f(x) = -\frac{1}{4}x^{-5} - 2x^{-4} + 2x^3 \quad \Rightarrow F(x) = \frac{1}{16}x^{-4} + \frac{2}{3}x^{-3} + \frac{1}{2}x^4$

c) $F(x) = -\frac{1}{3}(4x+2)^{-3} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{12}(4x+2)^{-3}$

d) $f(x) = (3x-4)^{\frac{1}{2}} \qquad \Rightarrow F(x) = \frac{1}{\frac{3}{2}} \cdot (3x-4)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}(3x-4)^{\frac{3}{2}}$

Aufgabe P2:

a) $J_{-1}(x) = \int_{-1}^{x} \frac{2}{3}e^{-0,5t+5}dt = \left[\frac{2}{3}e^{-0,5t+5} \cdot \frac{1}{-0,5}\right]_{-1}^{x} = \left[-\frac{4}{3}e^{-0,5t+5}\right]_{-1}^{x} = -\frac{4}{3}e^{-0,5x+5} + \frac{4}{3}e^{5,5}$

b) $J_{-1}(x) = \int_{-1}^{x} \frac{3}{2t-1}dt = \left[3 \cdot \ln|2t-1| \cdot \frac{1}{2}\right]_{-1}^{x} = \left[\frac{3}{2}\ln|2t-1|\right]_{-1}^{x} = \frac{3}{2}\ln|2x-1| - \frac{3}{2}\ln(3)$

c)

$$J_{-1}(x) = \int_{-1}^{x} \frac{2+t^2+t^5}{3t^3}dt = \int_{-1}^{x}\left(\frac{2}{3}t^{-3} + \frac{1}{3}t^{-1} + \frac{1}{3}t^2\right)dt = \left[-\frac{1}{3}t^{-2} + \frac{1}{3}\ln|t| + \frac{1}{9}t^3\right]_{-1}^{x} =$$

$$-\frac{1}{3}x^{-2} + \frac{1}{3}\ln|x| + \frac{1}{9}x^3 - (-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\ln(1) - \frac{1}{9}) = -\frac{1}{3}x^{-2} + \frac{1}{3}\ln|x| + \frac{1}{9}x^3 + \frac{2}{9}$$

Aufgabe P3:

a)

(1) $\int_{-1}^{0} \frac{1}{(2x-1)^2}dx = \int_{-1}^{0}(2x-1)^{-2}dx = \left[-(2x-1)^{-1} \cdot \frac{1}{2}\right]_{-1}^{0} = \left[-\frac{1}{2(2x-1)}\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

(2)

$$\int_{0}^{2\pi} 2\sin(0,5x)dx = \left[-2\cos(0,5x) \cdot \frac{1}{0,5}\right]_{0}^{2\pi} = \left[-4\cos(0,5x)\right]_{0}^{2\pi} = -4\cos(\pi) + 4(\cos(0)) = 4 + 4 = 8$$

b)

(1) $\int_{1}^{z}\left(4 - \frac{2}{x^2}\right)dx = \int_{1}^{z}(4-2x^{-2})dx = \left[4x + 2x^{-1}\right]_{1}^{z} = 4z + \frac{2}{z} - (4+2) = 4z + \frac{2}{z} - 6$

Es soll gelten: $4z + \frac{2}{z} - 6 = 3 \quad \overset{\cdot z}{\Leftrightarrow} 4z^2 + 2 - 9z = 0$

$\Rightarrow z_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 4 \cdot 2}}{8} = \frac{9 \pm 7}{8} \Rightarrow z = 2$ oder $z = 0,25$

(2) $\int_z^e \left(\frac{2}{x+e}\right)dx = \left[2\cdot\ln|x+e|\right]_z^e = 2\cdot\ln(2e) - 2\cdot\ln|z+e| = 2\ln(2) + 2\ln(e) - 2\ln|z+e|$

$= 2\ln(2) + 2 - 2\ln|z+e|$

Es soll gelten: $2\ln(2) + 2 - 2\ln|z+e| = 2\ln(2) \Leftrightarrow 2\ln|z+e| = 2 \Leftrightarrow \ln|z+e| = 1$
Da ln(e) = 1 ist, muss z = 0 sein.

Aufgabe P4:
a)
(1) Die Aussage ist wahr, da die Funktion f(x) an der Stelle x = 0 eine Nullstelle mit VZW von + nach - besitzt.

(2) Die Aussage ist nicht entscheidbar, da zu f(x) keine eindeutige Stammfunktion existiert.

(3) Die Aussage ist falsch, da f(x) bei x = -2 ein relatives Minimum oder Maximum haben müsste, damit F(x) dort eine Wendestelle hat.

(4) Die Aussage ist falsch. Wenn F bei x = 2,5 ein Minimum hätte, müsste das Schaubild von f dort eine Nullstelle besitzen

(5) Die Aussage ist wahr, da das Schaubild von f bei x = 2,5 ein relatives Minimum besitzt.

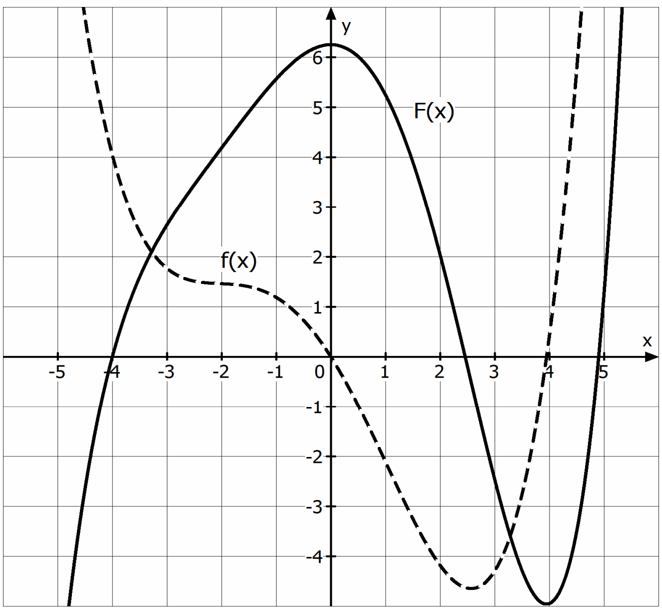
(6) Diese Aussage ist wahr, da das Schaubild von f im Intervall [-4 ; 0] positiv ist (also oberhalb der x-Achse verläuft)

(7) Die Aussage lautet umgeformt $F(-2) - F(-4) < 8$.

Es ist $F(-2) - F(-4) = \int_{-4}^{-2} f(x)dx$.

Da die Fläche zwischen f(x) und der x-Achse im Intervall [-4 ; -2] kleiner als 8 ist, ist die Aussage wahr.

b)



Aufgabe W1:

$$\int_0^{20} f(x)dx = \int_0^{20} \frac{1200x}{x^2+10}dx \approx 2228 \text{ Antikörper} \quad \text{(GTR)}$$

In den ersten 20 Sekunden werden ca. 2228 Antikörper gebildet.

Aufgabe W2:

a) Der Term $J_0(5) = \int_0^5 f(t)dt = 171$ ist die Regenmenge in ml pro m², die in den ersten 5 Minuten nach Beginn des Gewitters gefallen ist.

b) $J_0(2) = \int_0^2 60t \cdot e^{-0,5t}dt = 63,4$ ml pro m²

c) $\int_5^{10} 60t \cdot e^{-0,5t}dt = 59,2$ ml

Zwischen der 5. und 10. Minute sind pro m² 59,2 ml Regen gefallen.