Analytische Geometrie
Übungsaufgaben 1 gesamtes Stoffgebiet

Pflichtteil (ohne GTR und ohne Formelsammlung):

P1:
Zeichne die folgenden Ebenen mit Hilfe ihrer Spurgeraden in ein kartesisches Koordinatensystem ein:

a) E: $3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 12$ b) E: $2x_1 + 4x_2 = 8$ c) E: $x_2 = 3$

P2:
Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene E. Es sind entweder 3 Punkte, ein Punkt und eine Gerade oder zwei Geraden, die die Ebene aufspannen, gegeben.

a) A(2/2/2), B(4/1/3), C(8/4/5) b) A(4/1/2), g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

e) Die Ebene E ist Spiegelebene zwischen A(1/4/7) und A*(3/2/3).

f) Die Ebene E enthält die Gerade $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und ist orthogonal zur Ebene

F: $-x_1 + x_2 + 2x_3 + 2 = 0$

P3:
Bestimme eine Gleichung der Schnittgeraden der Ebenen E: $x_1 - x_2 + 2x_3 = 7$ und F: $6x_1 + x_2 - x_3 + 7 = 0$.

P4:
Berechne den Abstand des Punktes R(6/9/4) von der Ebene E: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$.

P5:

a) Gegeben seien die Gerade g und die Ebene E durch

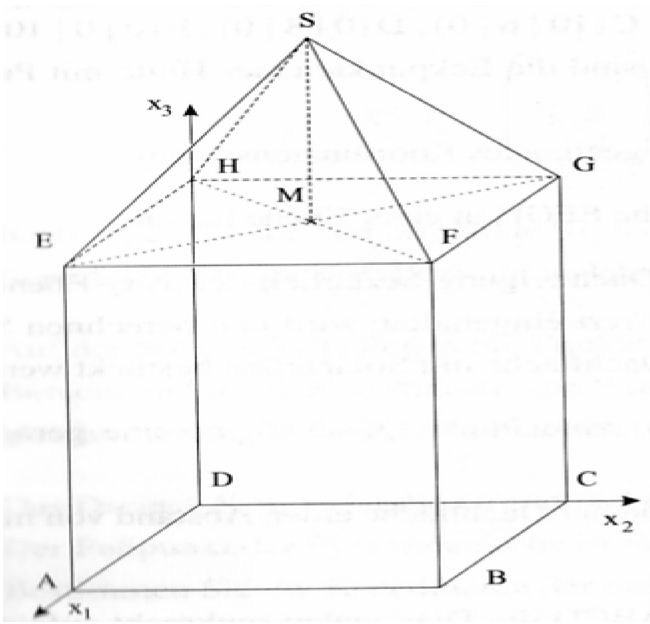
g: $\vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{r}$; $t \in \mathbb{R}$ E: $(\vec{x} - \vec{b}) \cdot \vec{n} = 0$

1) Welche geometrische Bedeutung haben die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{r}, \vec{n}$ und $(\vec{x} - \vec{b})$?
2) Welche Beziehung muss zwischen den Vektoren gelten, damit gilt
   I) g ist parallel zu E II) g ist orthogonal zu E III) g liegt in E

b) Wie kann man nachweisen, dass eine Gerade in einer Ebene enthalten ist ?

P6:
Spiegele den Punkt A(1/4/7)
a) an der Ebene E: $x_1 - x_2 - 2x_3 + 11 = 0$
b) am Punkt B(3/-1/9)

Wahlteil (mit GTR und Formelsammlung):



Ein Turm hat die Form einer senkrechten quadratischen Säule, der eine senkrechte Pyramide aufgesetzt ist (siehe Skizze). Die Gesamthöhe des Turms beträgt 24 m, die horizontalen Kanten sind 8 m, die vertikalen Kanten sind 18 m lang. Der Punkt D liegt im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems mit der Längeneinheit 1 m.

a) Gib die Koordinaten aller Punkte an und berechne den Neigungswinkel des Daches (Winkel zwischen Pyramidengrundfläche und Seitenfläche) sowie die Größe der Dachfläche.

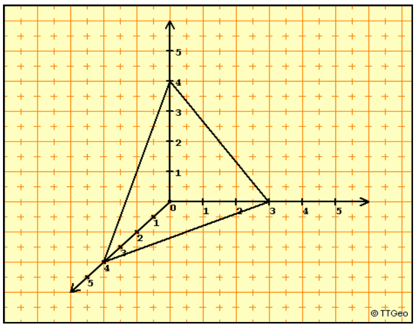
b) Im Punkt P(18/4/0) steht ein 8 m hoher Fahnenmast.
Berechne die Länge des Schattens auf Boden und Turmwand, wenn das einfallende Sonnenlicht die Richtung $\begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ hat.

c) Ein Kind mit Augenhöhe 1 m läuft vom Punkt B aus in Richtung $\overrightarrow{DB}$ vom Turm weg. In welcher Entfernung von der Turmkante BF kann das Kind die Turmspitze S erstmals sehen ?

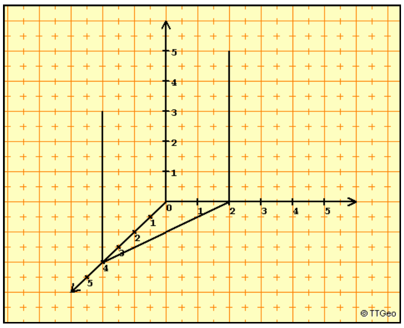
Analytische Geometrie
Übungsaufgaben 1 gesamtes Stoffgebiet
Musterlösungen

P1:

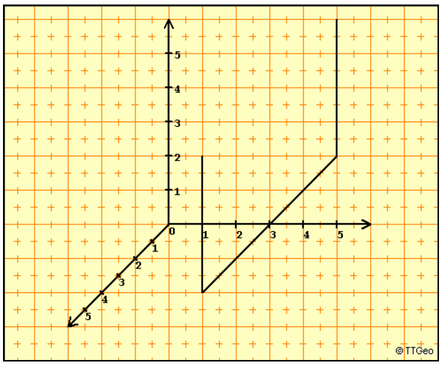
a)



b)



c)



P2:

a) A(2/2/2), B(4/1/3), C(8/4/5)

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ Normalenvektor $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_E = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Koordinatengleichung: E: $-x_1 + 2x_3 = 2$

b) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(Da g in E liegt, wird der Richtungsvektor von g übernommen. Der andere Richtungsvektor ergibt sich als Verbindungsvektor des Punktes A und des Punktes P(3/5/7), der auf g liegt).

Koordinatengleichung: E: $-x_1 + 6x_2 - 5x_3 = -8$

c) Zunächst muss die Lage der beiden Geraden geprüft werden. Ihre Richtungsvektoren sind keine Vielfachen zueinander, also können sie sich nur schneiden oder windschief sein.

Gleichsetzen: $\begin{aligned} 1+s &= 3+2t \\ 2+3s &= 3+t \\ 4+2s &= 7+3t \end{aligned}$ ergibt als Lösung t = -1 und s = 0.

Folglich schneiden sich die Geraden in S(1/2/4).
(Wenn sie windschief gewesen wären, würde man aus den beiden Geraden gar keine Ebene bilden können)

Ebenengleichung: E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

(Als Stützvektor muss nicht zwangsläufig der Schnittpunkt der Geraden genommen werden; die Richtungsvektoren der beiden Geraden spannen auch die Ebene auf)

Koordinatengleichung: E: $-7x_1 - x_2 + 5x_3 = 11$

d) Zunächst muss die Lage der beiden Geraden geprüft werden. Ihre Richtungsvektoren sind Vielfache zueinander, also sind die Geraden entweder echt parallel oder identisch.
Zur Kontrolle wird geprüft, ob der Punkt P(1/0/2) von g auch auf h liegt.
Dies ist nicht der Fall, also sind die Geraden echt parallel.
(Wären sie identisch, könnte man keine Ebene aus einer Geraden bilden).

Ebenengleichung: E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(Der Stützvektor entspricht einem der beiden Stützvektoren der Geraden; ein Richtungsvektor von den Geraden übernommen werden; der Richtungsvektor der anderen Geraden kann nicht benutzt werden, da dieser parallel zum ersten wäre und somit keine Ebene aufgespannt werden würde; der zweite Richtungsvektor ergibt sich aus dem Vektor $\overrightarrow{PQ}$ der Geradenpunkte P(1/0/2) und Q(4/1/1))

e) Der Vektor $\overrightarrow{AA^*} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ steht senkrecht auf der Ebene E und entspricht somit dem Normalenvektor von E. Ein Punkt von E ist der Mittelpunkt M(2/3/5) der Strecke $\overline{AA^*}$.

Ebenengleichung: E: $2x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -22 \Leftrightarrow x_1 - x_2 - 2x_3 = -11$

f) Parametergleichung: E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(Der Normalenvektor der Ebene F wird zum Richtungsvektor von E).

Koordinatengleichung von E: $x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4$

P3:

Bestimme eine Gleichung der Schnittgeraden der Ebenen E: $x_1 - x_2 + 2x_3 = 7$ und F: $6x_1 + x_2 - x_3 + 7 = 0$.

Die Ebenen E und F sind nicht parallel, da ihre Normalenvektoren keine Vielfachen voneinander sind. Folglich schneiden sich die Ebenen in einer Schnittgerade.
Die Gleichung der Schnittgerade erhält man durch Lösung des folgenden Gleichungssystems:

$x_1 - x_2 + 2x_3 = 7$ (1)
$6x_1 + x_2 - x_3 = -7$ (2)

$\Rightarrow x_1 - x_2 + 2x_3 = 7$ (1)
$7x_1 + x_3 = 0$ (1) + (2)

Das Gleichungssystem besitzt unendlich viele Lösungen.
Setze $x_1 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow x_3 = -7t$ in (1) $\Rightarrow x_2 = x_1 + 2x_3 - 7 = t - 14t - 7 = -7 - 13t$

Aus der allgemeinen Lösung kann nun die Gleichung der Schnittgerade ermittelt werden:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -13 \\ -7 \end{pmatrix}$$

P4:

Umformung von E in die Koordinatengleichung: $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 26$.

Hesse'sche Normalenform von E: $\frac{2x_1 + 2x_2 + x_3 - 26}{3} = 0$

Einsetzen von R in die HNF ergibt den Abstand: $d(R,E) = \left| \frac{12 + 18 + 4 - 26}{3} \right| = \frac{8}{3}$

P5:

a) g: $\vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{r}$; $t \in \mathbb{R}$ E: $(\vec{x} - \vec{b}) \cdot \vec{n} = 0$

1) $\vec{a}$ = Stützvektor/Ortsvektor der Gerade; entspricht anschaulich einem Pfeil, der vom Ursprung des Koordinatensystems auf einen beliebigen Punkt der Gerade zeigt.
$\vec{b}$ = Stützvektor/Ortsvektor der Ebene; entspricht anschaulich einem Pfeil, der vom Ursprung des Koordinatensystems auf einen beliebigen Punkt B die Ebene zeigt.
$\vec{r}$ = Richtungsvektor von der Geraden; der Vektor liegt auf der Geraden
$\vec{n}$ = Normalenvektor von der Ebene; der Vektor steht orthogonal zur Ebene
$(\vec{x} - \vec{b})$ = Verbindungsvektor eines beliebigen Ebenenpunktes X und des Punktes B; dieser Vektor liegt auf der Ebene (da das Skalarprodukt mit dem Normalenvektor 0 ergibt) und kann als Richtungsvektor interpretiert werden

2) I) Es muss gelten $\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$. Dann ist noch nachzuweisen, dass die Gerade g nicht in der Ebene E liegen kann. Es muss rechnerisch geprüft werden, dass der Punkt des Stützvektors $\vec{a}$ nicht in der Ebene E liegt.

II) Die Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{n}$ müssen zueinander parallel sein. Rein rechnerisch ist zu prüfen, ob die Vektoren Vielfache zueinander sind.

III) Es muss gelten $\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$. Dann ist noch nachzuweisen, dass die Gerade g nicht echt parallel zur Ebene E ist . Es muss rechnerisch geprüft werden, dass der Punkt des Stützvektors $\vec{a}$ in der Ebene E liegt.

b) Rein rechnerisch kann man dies dadurch nachweisen, dass die Ebenengleichung zunächst in die Koordinatengleichung umgeschrieben wird. Dann schneidet man die Gerade mit der Ebene, indem man die einzelnen Zeilen der Parameterform der Geraden in die Koordinatengleichung einsetzt. Man erhält dabei eine Gleichung mit einer Unbekannten. Fällt bei der Lösung der Gleichung die Variable heraus und ergibt sich eine wahre Aussage (z.B. 1 = 1), dann liegt g in E. Würde sich eine falsche Aussage (z.B. 1 = 5) ergeben, wäre g echt parallel zu E.

P6:

a) Zunächst wird eine Hilfsgerade g benötigt, die A enthält und senkrecht zu E verläuft:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Nun schneidet man g mit E: $(1+r)-(4-r)-2(7-2r)+11=0 \Rightarrow 6r = 6 \Rightarrow r = 1$

Also Schnittpunkt S(2/3/5).

Den Spiegelpunkt A* erhält man nun mit Hilfe eines Vektorszuges:

$$\overrightarrow{OA^*} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$ und somit A*(3/2/3).

b) Spiegelpunkt A* durch Spiegelung an B ergibt sich mit

$$\overrightarrow{OA^*} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 11 \end{pmatrix}$$ und somit A*(5/-6/11)

Wahlteil:

a) A(8/0/0) , B(8/8/0) , C(0/8/0) , D(0/0/0) , E(8/0/18) , F(8/8/18) , G(0/8/18) , H(0/0/18) , M(4/4/18) , S(4/4/24)

Der Neigungswinkel entspricht dem Schnittwinkel zweier Ebenen:

Ebenengleichung der Pyramidengrundfläche: $E_1:\ x_3 = 18$

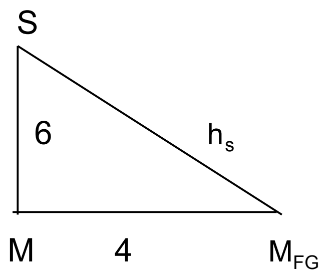
Ebenengleichung der Seitenfläche GFS: $E_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 18 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Ebenengleichung E_2 in Koordinatenform: $-6x_2 - 4x_3 = -120$

Schnittwinkel: $\cos\alpha = \dfrac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{36+16}} = \dfrac{4}{\sqrt{52}} \Rightarrow \alpha = 56{,}3°$

Die Dachfläche besteht aus den 4 Seitenflächendreiecken der Pyramide.

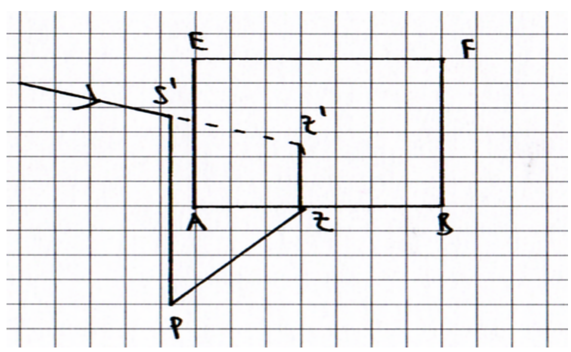
$A_{\text{Seitenfläche}} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_s = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot h_s$



h_s mit Satz des Pythagoras: $h_s = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$

$4 \cdot A_{\text{Seitenfläche}} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{52} = 115{,}4$ m² = Dachfläche

b) Der Endpunkt des Fahnenmastes hat die Koordinaten S'(18/4/8).



Von diesem Endpunkt S' aus wird nun eine Gerade mit dem angegebenen Richtungsvektor aufgestellt: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

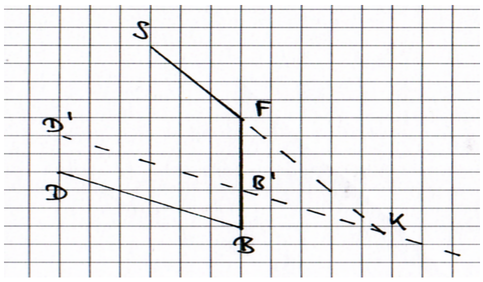
Schnittpunkt von g mit der Turmebene ABEF:
Koordinatengleichung der Turmebene: $x_1 = 8$
Schnittpunkt Gerade mit Ebene: $18 - 10t = 8 \Rightarrow t = 1$ also Schnittpunkt Z'(8/5/6).
Geht man vom Punkt Z' aus senkrecht nach unten, erhält man einen Schattenpunkt Z am Übergang zwischen Boden und Wand: Z(8/5/0).

Die Schattenlänge ergibt sich aus der Summe der Strecken $\overline{Z'Z} + \overline{PZ}$

$$\overline{Z'Z} = \left|\overrightarrow{Z'Z}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{36} = 6 \quad \text{und} \quad \overline{PZ} = \left|\overrightarrow{PZ}\right| = \left|\begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{101}$$

Gesamte Schattenlänge = $6 + \sqrt{101} = 16{,}05\,\text{m}$

c)



Auf der gestrichelten Geraden durch D'(0/0/1) und B'(8/8/1) bewegt sich das Auge des Kindes.
Sobald sich das Auge im Punkt K befindet, kann das Kind die Turmspitze S sehen. Der Punkt K ist laut Skizze der Schnittpunkt der Geraden D'B' und SF.

$$g_{D'B'}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h_{SF}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 24 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt der Geraden ergibt sich durch Gleichsetzen:

$$\begin{matrix} 8r = 4 + 4s \\ 1 = 24 - 6s \end{matrix} \quad \Rightarrow s = \frac{23}{6} \quad \text{und} \quad r = \frac{29}{12} \quad \Rightarrow \text{Schnittpunkt } K\left(\frac{58}{3} / \frac{58}{3} / 1\right)$$

Der Abstand des Punktes K von der Turmkante BF entspricht der Strecke $\overline{B'K}$ (da der Vektor $\overrightarrow{B'K}$ orthogonal auf der Turmkante BF steht).

Es gilt: $\overline{B'K} = \left|\overrightarrow{B'K}\right| = \left|\begin{pmatrix} \frac{34}{3} \\ \frac{34}{3} \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\left(\frac{34}{3}\right)^2 + \left(\frac{34}{3}\right)^2} = 16{,}03\,\text{m}$

Die Entfernung des Kindes von der Turmkante BF beträgt 16,03 m.