Mathematik - Oberstufe

Aufgaben und Musterlösungen zu linearen Funktionen

Zielgruppe: Oberstufe Gymnasium

Schwerpunkt: Geraden, Strecken und Dreiecke im Koordinatensystem

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Letzte Aktualisierung: November 2009

Datei: Übungsaufgaben zu linearen Funktionen

Übungsaufgaben zu linearen Funktionen
Geraden, Strecken und Dreiecke im Koordinatensystem

Aufgabe 1:
Bestimme die Gleichung der Geraden g, welche durch die Punkte P(3/-2) und Q(-2/0) geht.

Aufgabe 2:
Gegeben ist die Gerade g: $\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y+2=0$

a) Zeichne die Gerade.
b) In welchem Punkt schneidet die Gerade die x-Achse ?
c) Wie lautet die Gleichung der Parallelen zu g durch den Punkt P(1/1) ?

Aufgabe 3:
Durch die Punkte A(1/3) und B(0/-1) sei eine Gerade g bestimmt.
Berechne die Gleichung der Gerade h, die senkrecht auf g steht und den Punkt P(10/5) enthält.

Aufgabe 4:
Bestimme den Abstand der Parallelen g und h mit
g: $y=2x+3$ und h: $y=2x-1$

Aufgabe 5:
Eine Straße besitzt eine Steigung von 7%.

a) Wie groß ist ihr Steigungswinkel α ?
b) Welcher Höhenunterschied überwindet ein Auto, das auf dieser Straße 3 km hochfährt ?
c) Welche prozentuale Steigung besitzt eine Straße mit einem Steigungswinkel von 45° ?

Aufgabe 6:
Gegeben sind die Punkte P(4/2) und Q(7/6).

a) Berechne den Abstand d_1 von Q zu P. Bestimme diejenigen Punkte der y-Achse, die von P den gleichen Abstand d_1 haben.
b) Bestimme die Gleichung der Geraden durch P und Q.
c) Berechne die Gleichung der Mittelsenkrechten von PQ.

Aufgabe 7:
Die Punkte A(-2,5/-0,5), B(4,5/2,5) und C(3/6) bilden ein Dreieck.

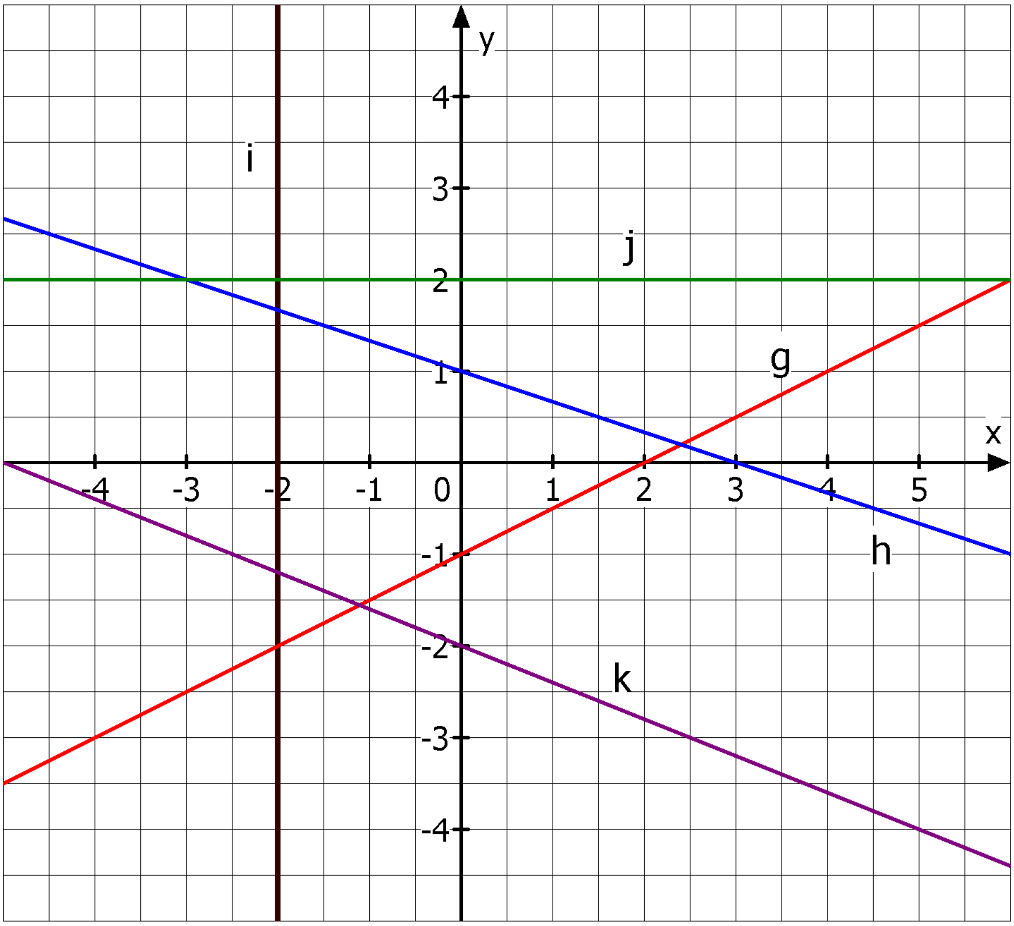
a) Prüfe rechnerisch, ob das Dreieck rechtwinklig ist.
b) Berechne die Länge der Seitenhalbierenden s_c ($\overline{CM_c}$).
c) Berechne die Innenwinkel α, β und γ auf zwei Dezimalen genau.
d) Wie lang ist die Höhe h_b ?

Aufgabe 8:
Gegeben sei ein Dreieck mit den Eckpunkten A(-1/-2), B(4/1) und C(0/6).

a) Zeichne das Dreieck ABC (1LE = 1 cm)
b) Bestimme den Höhenschnittpunkt H der Höhen auf den Dreiecksseiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$.
c) Der Höhenschnittpunkt aus Teilaufgabe b), die Ecke A sowie die Höhenfußpunkte auf den Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ bilden ein Viereck.
Berechne die Innenwinkel dieses Vierecks.
d) Wie weit ist der in b) ermittelte Höhenschnittpunkt H von der Ecke A entfernt ?

Aufgabe 9:

Bestimme von folgenden Geraden die Funktionsgleichungen.



Musterlösungen zu Übungsaufgaben zu linearen Funktionen Geraden, Strecken und Dreiecke im Koordinatensystem

Aufgabe 1:
Die Gerade enthält den Punkt P(3/-2) und Q(-2/0).

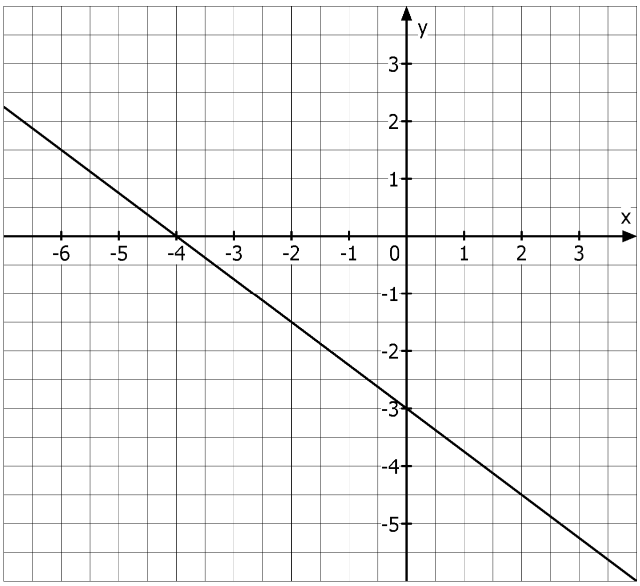
Steigung der Gerade: $m = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{-2-0}{3+2} = -\frac{2}{5}$

Die Geradengleichung erhält man nun mit der Punkt-Steigungs-Form:

$$\frac{y - y_P}{x - x_P} = m \Rightarrow \frac{y+2}{x-3} = -\frac{2}{5} \Rightarrow y = -\frac{2}{5}x - \frac{4}{5}$$

Alternative zur Punkt-Steigungs-Form:
Ansatz $y = mx + c$ mit $m = -\frac{2}{5}$.
Einsetzen von P in die Geradengleichung: $-2 = -\frac{2}{5} \cdot 3 + c \Rightarrow c = -\frac{4}{5} \Rightarrow y = -\frac{2}{5}x - \frac{4}{5}$

Aufgabe 2:
a) Auflösen der Geradengleichung nach y: $\frac{2}{3}y = -\frac{1}{2}x - 2 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x - 3$



b) Schnittpunkt mit der x-Achse:
Setze y = 0: $0 = -\frac{3}{4}x - 3 \Rightarrow -\frac{3}{4}x = 3 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow N(-4/0)$

c) Die Parallele hat dieselbe Steigung wie die Gerade, also $m = -\frac{3}{4}$.

Punkt-Steigungs-Form: $\frac{y-1}{x-1} = -\frac{3}{4} \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$

Aufgabe 3:

Die Steigung der Geraden durch A und B ist $m_g = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{3+1}{1-0} = 4$

Die orthogonale Gerade besitzt die Steigung $m = -\frac{1}{m_g} = -\frac{1}{4}$.

Die Gleichung der gesuchten Geraden erhält man mit der Punkt-Steigungs-Form:

$$\frac{y - y_P}{x - x_P} = m \Rightarrow \frac{y-5}{x-10} = -\frac{1}{4} \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{15}{2}$$

Aufgabe 4:

Das Abstandsproblem zweier paralleler Geraden kann reduziert werden auf das Problem Abstand eines Punktes auf einer der Geraden zu der anderen Geraden.

Ein Punkt auf der Geraden g ist zum Beispiel P(0/3).
Der Abstand der Geraden g und h entspricht daher dem Abstand des Punktes P von der Geraden h.

Um den Abstand von P zu h zu berechnen, wird eine Lotgerade von P auf h aufgestellt (wie in Aufgabe 3).

Berechnung der Steigung der senkrechten Lotgeraden: $m_h \cdot m_{Lot} = -1 \Rightarrow m_{Lot} = -\frac{1}{2}$

Mit der Punkt-Steigungs-Form ergibt sich die Gleichung der Lotgeraden:

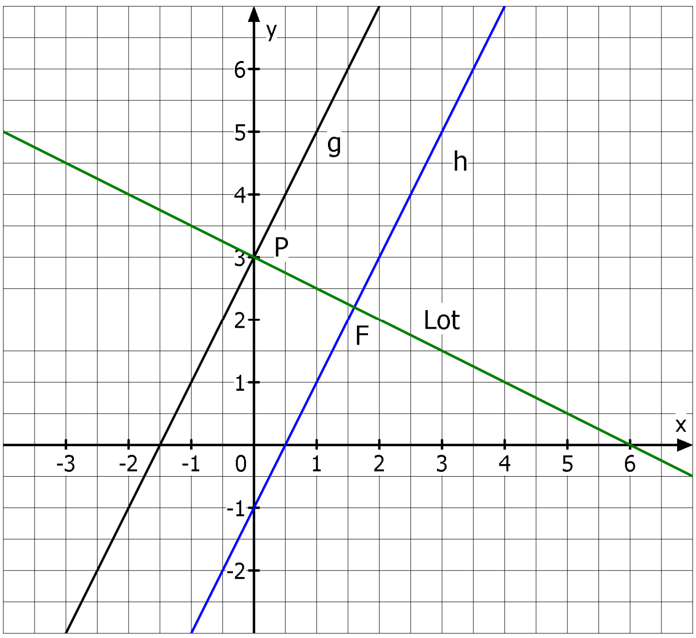
$$\frac{y-3}{x-0} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 3$$

Der Schnittpunkt F von h mit dem Lot ist der sogenannte Lotfußpunkt F:

$2x - 1 = -\frac{1}{2}x + 3 \Rightarrow 2{,}5x = 4 \Rightarrow x = \frac{8}{5}$

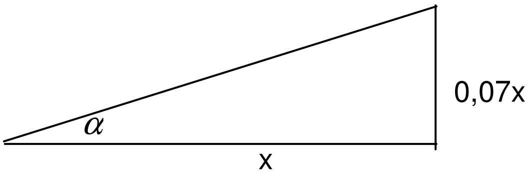
Daraus ergibt sich $y = 2 \cdot \frac{8}{5} - 1 = \frac{11}{5} \Rightarrow F(\frac{8}{5}/\frac{11}{5}) = F(1{,}6/2{,}2)$

Abstand von g und h: $\overline{PF} = \sqrt{(1{,}6-0)^2 + (2{,}2-3)^2} = \sqrt{3{,}2} \approx 1{,}79$



Aufgabe 5:

a) Eine Steigung von 7% bedeutet, dass bei einer waagrechten Strecke x der Höhenunterschied 7% von x, also 0,07x beträgt.



Die Straße, die man auch als Teil einer Gerade interpretieren kann, besitzt die Steigung

$m = \frac{0{,}07x}{x} = 0{,}07$

Nun gilt für den Steigungswinkel: $\tan\alpha = m \Rightarrow \tan\alpha = 0{,}07 \Rightarrow \alpha = 4°$

b) Betrachtet das Steigungsdreieck als rechtwinkliges Dreieck, ist die Länge der Hypotenuse des Dreiecks mit 3 km gegeben. Gesucht ist bzgl. $\alpha = 4°$ die Gegenkathete.

$$\sin\alpha = \frac{h}{3} \Rightarrow h = 3 \cdot \sin 4° = 0{,}21 \text{ km} = 210 \text{ m}$$

Das Auto überwindet einen Höhenunterschied von 210 m.

c) Bei $\alpha = 45°$ ist die waagrechte Strecke genau so lang wie der Höhenunterschied. Es ergibt sich als Steigung m = 1 und dies entspricht einer Steigung von 100%.

(m = tan 45° = 1)

Aufgabe 6:

a) $d_1 = \overline{PQ} = \sqrt{(7-4)^2 + (6-2)^2} = 5$

Ein beliebiger Punkt auf der y-Achse ist Q(0/y).

$\overline{PQ} = \sqrt{(4-0)^2 + (2-y)^2} = 5 \Rightarrow \sqrt{16 + 4 - 4y + y^2} = 5 \Rightarrow y^2 - 4y + 20 = 25$

$\Rightarrow y^2 - 4y - 5 = 0 \Rightarrow y = 5$ oder y = -1.

Die Punkte auf der y-Achse sind Q(0/5) und R(0/-1).

b) Steigung der Gerade: $m = \frac{6-2}{7-4} = \frac{4}{3}$

Punkt-Steigungs-Form: $\frac{y-2}{x-4} = \frac{4}{3} \Rightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$

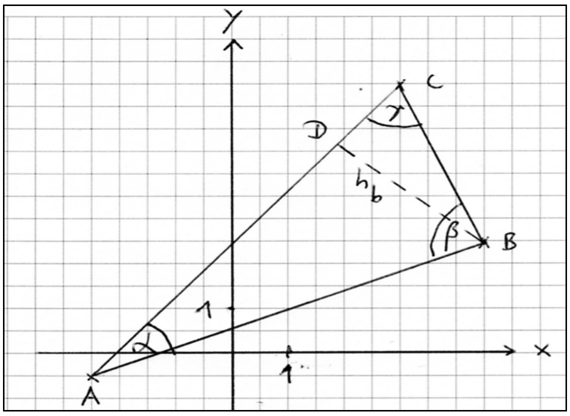
c) Die Mittelsenkrechte steht orthogonal auf der Gerade durch P und Q und geht durch den Mittelpunkt der Strecke $\overline{PQ}$.

Steigung der Mittelsenkrechten = $-\frac{1}{4/3} = -\frac{3}{4}$

Mittelpunkt von P und Q: $M(\frac{4+7}{2} / \frac{2+6}{2}) = M(5{,}5/4)$

Gleichung mit Punkt-Steigungs-Form: $\frac{y-4}{x-5{,}5} = -\frac{3}{4} \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + 8{,}125$

Aufgabe 7:



a) Für die Steigungen der einzelnen Strecken gilt:

$$m_{AB} = \frac{2{,}5+0{,}5}{4{,}5+2{,}5} = \frac{3}{7} \quad ; \quad m_{AC} = \frac{6+0{,}5}{3+2{,}5} = \frac{13}{11} \quad ; \quad m_{BC} = \frac{6-2{,}5}{3-4{,}5} = -\frac{7}{3}$$

Da $m_{AB} \cdot m_{BC} = -1$ gilt, ist das Dreieck ABC im Punkt B rechtwinklig.

b) Die Seitenhalbierende geht durch den Punkt C(3/6) und durch den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$: $M_C(\frac{-2{,}5+4{,}5}{2} / \frac{-0{,}5+2{,}5}{2}) = (1/1)$

$$\overline{CM_c} = \sqrt{(3-1)^2+(6-1)^2} = \sqrt{29} \text{ LE}$$

c) Aus a) folgt: $\beta = 90°$

Berechnung von α:

Hierzu werden die Steigungswinkel der Geraden AB und AC berechnet.

$$\tan\alpha_1 = m_{AB} \Rightarrow \tan\alpha_1 = \frac{3}{7} \Rightarrow \alpha_1 = 23{,}2°$$

$$\tan\alpha_2 = m_{AC} \Rightarrow \tan\alpha_2 = \frac{13}{11} \Rightarrow \alpha_2 = 49{,}77°$$

Nun ergibt sich $\alpha = 49{,}77° - 23{,}2° = 26{,}57°$ und da α laut Zeichnung kleiner als 90° ist, ist 26,57° auch der richtige Winkel.

Der dritte Winkel ergibt sich aus der Winkelsumme: $\gamma = 180° - 90° - 26{,}57° = 63{,}43°$

d) Für die Höhe h_b muss eine Lotgerade von B auf der Gerade AC berechnet werden. Der Schnittpunkt der Lotgerade mit der Geraden AC ergibt den Lotfußpunkt D.

Lotgerade: $m = -\frac{1}{m_{AC}} = -\frac{11}{13}$ und geht durch B(4,5/2,5).

Punkt-Steigungs-Form: $\frac{y-2{,}5}{x-4{,}5} = -\frac{11}{13} \Rightarrow y = -\frac{11}{13}x + \frac{82}{13}$

Geradengleichung der Gerade AC: $m = \frac{13}{11}$ und geht durch C(3/6).

Punkt-Steigungs-Form: $\frac{y-6}{x-3} = \frac{13}{11} \Rightarrow y = \frac{13}{11}x + \frac{27}{11}$

Schnittpunkt D der beiden Geraden: $-\frac{11}{13}x+\frac{82}{13}=\frac{13}{11}x+\frac{27}{11}$

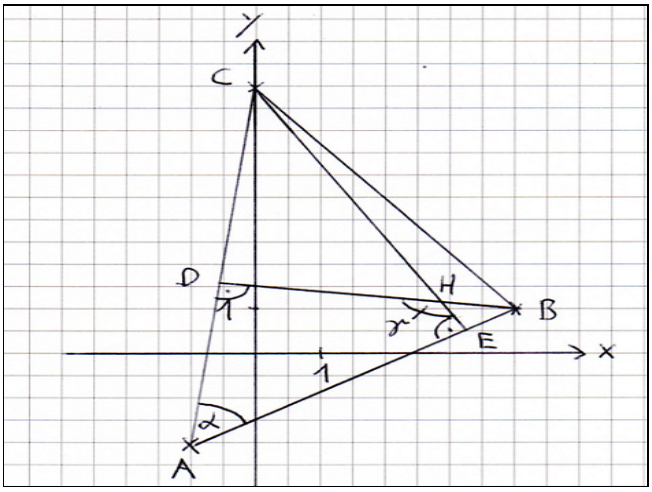
$-\frac{290}{143}x=-\frac{551}{143}\Rightarrow x=1{,}9$ und daraus folgt $y=\frac{13}{11}\cdot 1{,}9+\frac{27}{11}=4{,}7$

also D(1,9/4,7).

Höhe $h_b=\overline{BD}=\sqrt{(4{,}5-1{,}9)^2+(4{,}7-2{,}5)^2}=\sqrt{11{,}6}\approx 3{,}41$

Aufgabe 8:

a)



b) Für den Höhenschnittpunkt müssen die beiden Geradengleichungen, auf der die Höhen liegen, ermittelt werden.

Höhe auf $\overline{AB}$: Es gilt $m_{AB}=\frac{1+2}{4+1}=\frac{3}{5}$, also gilt $m_{Höhe}=-\frac{5}{3}$ und Gerade enthält C.

Punkt-Steigungs-Form: $\frac{y-6}{x-0}=-\frac{5}{3}\Rightarrow y=-\frac{5}{3}x+6$

Höhe auf $\overline{AC}$: Es gilt $m_{AC}=\frac{6+2}{0+1}=8$, also gilt $m_{Höhe}=-\frac{1}{8}$ und Gerade enthält B.

Punkt-Steigungs-Form: $\frac{y-1}{x-4}=-\frac{1}{8}\Rightarrow y=-\frac{1}{8}x+\frac{3}{2}$

Schnittpunkt der Höhengeraden: $-\frac{5}{3}x+6=-\frac{1}{8}x+\frac{3}{2}\Rightarrow -\frac{37}{24}x=-\frac{9}{2}\Rightarrow x=\frac{108}{37}$

$y=-\frac{5}{3}\cdot\frac{108}{37}+6=\frac{42}{37}$, also $H(\frac{108}{37}/\frac{42}{37})$

c) Zwei der 4 Innenwinkel sind aufgrund der Höhen bereits bekannt (siehe Skizze).
Der Winkel bei Eckpunkt D und E ist jeweils 90°.

Berechnung von α:
Hierzu werden die Steigungswinkel der Geraden AB und AC berechnet.

$\tan\alpha_1=m_{AB}\Rightarrow \tan\alpha_1=\frac{3}{5}\Rightarrow \alpha_1=31°$

$\tan\alpha_2 = m_{AC} \Rightarrow \tan\alpha_2 = 8 \Rightarrow \alpha_2 = 82{,}9°$

Daraus folgt $\alpha = 82{,}9° - 31° = 51{,}9°$ was auch zur Skizze passt.

Als vierter Winkel folgt aufgrund der Winkelsumme

$\gamma = 360° - 90° - 90° - 51{,}9° = 128{,}1°$

d) $\overline{AH} = \sqrt{(\left(\frac{108}{37}+1\right)^2 + \left(\frac{42}{37}+2\right)^2} = \sqrt{\frac{34481}{1369}} = 5{,}019\,\text{LE}$

Aufgabe 9:

Gerade g: y-Achsenabschnitt = -1 und Steigung = $\frac{1}{2}$ also $y = \frac{1}{2}x - 1$

Gerade h: y-Achsenabschnitt = 1 und Steigung = $-\frac{1}{3}$ also $y = -\frac{1}{3}x + 1$

Gerade i: Senkrechte Gerade hat eine spezielle Gleichung: x = -2

Gerade j: Waagrechte Gerade mit Steigung = 0 hat die Gleichung y = 2

Gerade k: y-Achsenabschnitt = -2 und Steigung = $-\frac{2}{5}$ also $y = -\frac{2}{5}x - 2$