Stochastik

Übungsaufgaben (Taschenrechner erlaubt)
Binomialverteilung

Oberstufe

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

November 2015

Aufgabe 1:
Ist der Zufallsversuch eine Bernoulli-Kette ?
Wenn ja, gib die Länge und die Trefferwahrscheinlichkeit an.

a) Ein Würfel wird fünfzigmal geworfen. Es wird gezählt, wie oft eine gerade Augenzahl fällt.
b) Ein Fußballspieler hat beim Elfmeterschießen eine Trefferquote von 70%.
Er schießt zehn Elfmeter und dabei wird gezählt, wie oft er trifft.
c) Ein Mathematik-Kurs besteht aus 11 Schülerinnen und 9 Schülern. Es werden 8 Personen ausgewählt und ihr Geschlecht notiert.
d) In Deutschland verfügen ca. 80% der Haushalte über einen Internetzugang. Es werden 1000 Haushalte ausgewählt und befragt, ob sie einen Internetzugang haben.

Aufgabe 2:
Ein Glücksrad besteht aus 4 gleich großen Feldern, die mit den Buchstaben A, B, C und D beschriftet sind.
Das Glücksrad wird zehnmal gedreht. Es wird gezählt, wie oft das Feld "A" kommt.
a) Berechne $P(X = 4)$.
b) Berechne $P(X = 0)$.
c) Berechne $P(X \leq 2)$.

Aufgabe 3:
Wie berechnet man die folgenden Wahrscheinlichkeiten mithilfe des GTR ?
Hinweis: Bringe die Wahrscheinlichkeiten in die Gestalt $P(X \leq k)$.

a) $P(X \geq 5)$ b) $P(X > 14)$ c) $P(X < 12)$
d) $P(3 \leq X \leq 10)$ e) $P(3 < X < 10)$

Aufgabe 4:
Herr Müller muss jeden Morgen auf dem Weg zur Arbeit einen Bahnübergang passieren.
Die Schranke ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 25% geschossen.
Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Herr Müller innerhalb eines Monats (mit 22 Arbeitstagen)
a) genau fünfmal warten muss
b) höchstens fünfmal warten muss
c) mindestens achtmal warten muss
d) weniger als sechsmal warten muss
e) mehr als zehnmal warten muss
f) nie warten muss
g) mindestens fünf und höchstens zwölfmal warten muss
h) weniger als fünfzehnmal und mehr als sechsmal warten muss

Aufgabe 5:
In einer Urne befinden sich 12 schwarze und 4 weiße Kugeln. Es werden 12 Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Die Zufallsvariable X zählt die Anzahl der schwarzen Kugeln.
a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass genau fünf schwarze Kugeln gezogen werden.
b) Berechne $\mu = E(X)$ (Erwartungswert von X) und interpretiere diesen Wert.
c) Berechne $P(X = \mu)$ und $P(\mu - 1 \leq X \leq \mu + 1)$.

Aufgabe 6:

a) Ein Hersteller von Gummibärchen produziert 28% rote Bärchen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Tüte mit 143 Gummibärchen mindestens 40 rote sind ?

b) Ein Hersteller von Gummibärchen produziert 28% rote Bärchen.
Marlene entnimmt mit geschlossenen Augen aus einem großen Behälter (der sehr viele Gummibärchen enthält) ein Gummibärchen nach dem anderen.
Wie viele muss sie entnehmen, damit sie mit mindestens 85% Wahrscheinlichkeit mindestens vier rote Bärchen bekommt ?

c) Ein Hersteller von Gummibärchen verkauft diese in Tüten zu 143 Stück.
Wie hoch muss der Anteil der roten Gummibärchen in der Produktion sein, damit in einer Tüte mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80% mindestens 40 rote sind ?

Aufgabe 7:

In einer Vogelkolonie auf einer Nordseeinsel leben 8000 Möwen. Ein Wissenschaftlerteam fängt 100 von ihnen und versieht jeden mit einem Markierungsring.

a) Ein halbes Jahr später werden wiederum 100 Vögel dieser Kolonie gefangen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben mindestens fünf von ihnen einen Ring ?
b) Wie viele Vögel muss man fangen, um mit mindestens 80% Wahrscheinlichkeit mindestens fünf mit Ring zu erhalten ?
c) Wie viele Vögel hätte das Wissenschaftsteam mit einem Ring versehen müssen, damit unter 200 Vögeln mit mindestens 80% Wahrscheinlichkeit mindestens fünf mit Ring sind ?

Aufgabe 8:

In einem Unternehmen werden Sauerkirschen maschinell entsteint und dann in Gläser abgefüllt. 1,5% der fertigen Kirschen haben trotzdem noch ihren Kern.

a) Herr Becker backt einen Kirschkuchen. Dafür nimmt er 120 dieser Kirschen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in dem Kuchen mindestens ein Kirschkern befindet ?
b) Wie viele Kirschkerne sind in einem solchen Kuchen zu erwarten ?
c) Wie viele Kirschen dürfte Herr Becker für seinen Kuchen höchstens nehmen, damit er mit mindestens 80% Wahrscheinlichkeit keinen Kern darin hat ?
d) Wie groß darf die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kirsche noch ihren Kern hat, sein, damit sich mit mindestens 80% Wahrscheinlichkeit in einem Kirschkuchen mit 120 Kirschen kein Kirschkern befindet ?

Lösungen

Aufgabe 1:

a) ja, es ist eine Bernoulli-Kette mit n = 50 und p = 0,5.

b) ja, es ist eine Bernoulli-Kette (sofern die Trefferquote gleich bleibt) mit n = 10 und p = 0,7

c) nein, es ist keine Bernoulli-Kette, da es sich um eine Ziehung ohne Zurücklegen handelt und sich die Trefferwahrscheinlichkeit pro Ziehung ändert

d) ja, es ist eine Bernoulli-Kette mit n = 1000 und p = 0,8.
(es handelt sich zwar wie in c) um eine Ziehung ohne Zurücklegen, aber aufgrund der großen Grundgesamtheit spielt dies keine Rolle)

Aufgabe 2:

X ist binomialverteilt mit n = 10 und p = 0,25.

a) $P(X=4)\approx 0{,}146$

b) $P(X=0)\approx 0{,}056$

c) $P(X\le 2)\approx 0{,}526$

Aufgabe 3:

a) $P(X\ge 5)=1-P(X\le 4)$

b) $P(X>14)=1-P(X\le 14)$

c) $P(X<12)=P(X\le 11)$

d) $P(3\le X\le 10)=P(X\le 10)-P(X\le 2)$

e) $P(3<X<10)=P(X\le 9)-P(X\le 3)$

Aufgabe 4:

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Fälle an, bei denen die Schranke geschlossen ist.
X ist binomialverteilt mit n = 22 und p = 0,25.

a) $P(X=5)=0{,}193$

b) $P(X\le 5)=0{,}517$

c) $P(X\ge 8)=1-P(X\le 7)=0{,}162$

d) $P(X<6)=P(X\le 5)=0{,}517$

e) $P(X>10)=1-P(X\le 10)=0{,}01$

f) $P(X=0)=0{,}0018$

g) $P(5\le X\le 12)=P(X\le 12)-P(X\le 4)=0{,}676$

h) $P(6<X<15)=P(X\le 14)-P(X\le 6)=0{,}3$

Aufgabe 5:

X ist binomialverteilt mit n = 12 und $p=\frac{12}{16}=0{,}75$

a) $P(X=5)=0{,}0115$

b) $\mu=E(X)=n\cdot p=12\cdot 0{,}75=9$
Interpretation: Wenn dieses Spiel sehr häufig durchgeführt wird, kann man im Durchschnitt mit 9 gezogenen schwarzen Kugeln rechnen.

c) $P(X=\mu)=P(X=9)=0{,}258$
$P(\mu-1\le X\le \mu+1)=P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)=0{,}684$

Aufgabe 6:

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der roten Bärchen an.

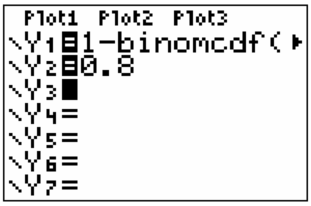
a) X ist binomialverteilt mit n = 143 und p = 0,28.
$P(X\ge 40)=1-P(X\le 39)=0{,}535$

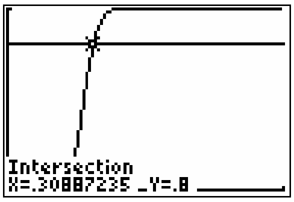
b) X ist binomialverteilt mit unbekanntem n und p = 0,28.
Es soll gelten: $P(X \geq 4) \geq 0{,}85 \quad \Rightarrow 1 - P(X \leq 3) \geq 0{,}85$

Mit dem GTR folgt: Für n = 20 gilt $1 - P(X \leq 3) = 0{,}853$
Marlene muss mindestens 20 Gummibärchen entnehmen.

c) X ist binomialverteilt mit n = 143 und unbekanntem p.
Es soll gelten: $P(X \geq 40) \geq 0{,}8 \quad \Rightarrow 1 - P(X \leq 39) \geq 0{,}8$

Mit dem GTR folgt: p = 0,309.





Der Anteil der roten Bärchen muss mindestens 30,9% sein.

Aufgabe 7:
Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Vögel mit einem Markierungsring an.

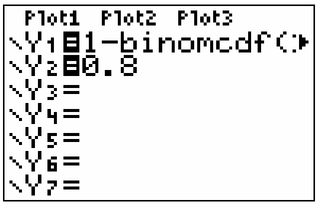
a) X ist binomialverteilt mit n = 100 und $p = \frac{100}{8000} = 0{,}0125$.
$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 0{,}0086$

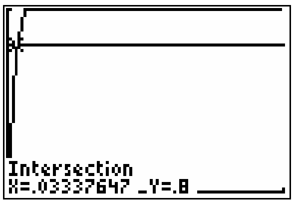
b) X ist binomialverteilt mit unbekanntem n und p = 0,0125.
Es soll gelten: $P(X \geq 5) \geq 0{,}8 \quad \Rightarrow 1 - P(X \leq 4) \geq 0{,}8$

Mit dem GTR folgt: $1 - P(X \leq 4) = 0{,}8009$ für n = 537.
Man muss mindestens 537 Vögel fangen.

c) X ist binomialverteilt mit n = 200 und unbekanntem p.
Es soll gelten: $P(X \geq 5) \geq 0{,}8 \quad \Rightarrow 1 - P(X \leq 4) \geq 0{,}8$

Mit dem GTR folgt: p = 0,0338.





Das Team hätte mindestens $0{,}0338 \cdot 8000 \approx 270$ Vögel markieren müssen.

Aufgabe 8:
Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Kirschen an, die noch einen Kern haben.

a) X ist binomialverteilt mit n = 120 und p = 0,015.
$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 0,837$

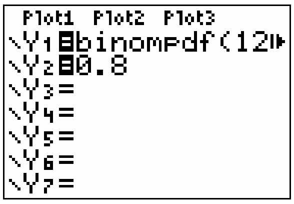
b) X ist binomialverteilt mit n = 120 und p = 0,015.
Der Erwartungswert beträgt $E(X) = n \cdot p = 120 \cdot 0,015 = 1,8$ Kerne.

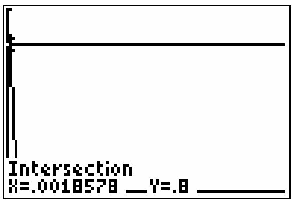
c) X ist binomialverteilt mit unbekanntem n und p = 0,015.
Es soll gelten: $P(X = 0) \geq 0,8$

Mit dem GTR folgt: $P(X = 0) = 0,8093$ für n = 14.
Herr Becker dürfte höchstens 14 Kirschen nehmen.

d) X ist binomialverteilt mit n = 120 und unbekanntem p.
Es soll gelten: $P(X = 0) \geq 0,8$

Mit dem GTR folgt: p = 0,00186.





Die Wahrscheinlichkeit darf höchstens 0,186% betragen.