Analysis

Übungsaufgaben zum exponentiellen und beschränkten Wachstum

Gymnasium Klasse 10

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Februar 2014

Aufgabe 1:
Der Luftdruck nimmt mit zunehmender Höhe ab, und zwar alle 100 m um etwa 1,3%.
Auf welchen Bruchteil des Luftdrucks in Meereshöhe ist der Luftdruck auf dem Mount Everest (rund 8000 m) abgesunken ?

Aufgabe 2:
1 cm³ Kuhmilch enthielt 2 Stunden nach dem Melken 9000 Keime; 1 Stunde später waren 32000 Keime vorhanden.
Wie viele Keime befanden sich in 1 cm³ frisch gemolkener Milch, wenn man exponentielles Wachstum annimmt ?

Aufgabe 3:
In einem Land mit 78 Millionen Einwohner kommen laut Statistik auf 1000 Einwohner 9 Geburten und 11 Todesfälle. Die Statistik gibt ferner an, dass im Durchschnitt jährlich 40000 Personen auswandern und 180000 Personen einwandern.

a) Mit welcher Einwohnerzahl ist nach 5 Jahren zu rechnen ?
b) Zeige, dass die Entwicklung der Einwohnerzahl nach dem Gesetz des beschränkten Wachstums folgt. Mit welcher Einwohnerzahl wäre danach langfristig zu rechnen ?

Aufgabe 4:
Auf einem 5000 m³ großen See breiten sich Algen aus. Bei Beginn der Beobachtung ist er bereits zur Hälfte mit Algen bedeckt. Der Flächeninhalt der von Algen bedeckten Fläche t Monate nach Beginn der Beobachtung sei A(t) m².

a) Für die ersten 6 Monate ergeben sich folgende Messdaten:

t	0	1	2	3	4	5	6
A(t)	2500	3090	3540	3880	4150	4350	4500

Zeige, dass sich die Algenentwicklung näherungsweise als beschränktes Wachstum modellieren lässt.
Zeichne ein Schaubild (t-Achse: 17 cm ; 1 cm = 1 Monat; y-Achse: 1 cm = 500 m²)
Bestimme A(t) für $0 \le t \le 6$
Prognostiziere, ab wann 99% der gesamten Fläche mit Algen bedeckt sein werden.

b) Zum Zeitpunkt $t_1 = 6$ wird mit einer biologischen Algenbekämpfung begonnen. Einen Monat später erreicht die von Algen bedeckte Fläche ein Maximum von 4580 m² und sinkt dann nach folgender Tabelle ab:

t	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A(t)	4460	4210	3970	3750	3530	3330	3150	2970	2800

Ergänze das Schaubild von a) mit diesem Wachstumsverlauf.
Begründe, welches Wachstumsmodell für $t \ge 8$ geeignet ist.
Wie viele Monate nach Beginn der Algenbekämpfung ist der See nur noch zu 20% mit Algen bedeckt ?

Aufgabe 5:
Das Wachstum der Algenfläche auf einem See wird durch die Funktion
$f(t) = 50 - 40 \cdot 0{,}92^t$, $t \geq 0$ in Wochen, f(t) in Ar modellhaft beschrieben.

a) Um wie viel Ar wächst die Fläche in der 4.Woche ?
b) Die Wasserfläche des Sees ist 1,5 ha groß. Wann sind 20% der Wasserfläche mit Algen bedeckt ?
c) Nach wie vielen Wochen wächst die Algenfläche zum ersten Mal um weniger als 10m² je Woche ?

Aufgabe 6:
Eine Flasche Saft mit einer Temperatur von 8°C wird aus dem Kühlschrank auf einen Tisch gestellt. Die Umgebungstemperatur beträgt 30°C. Die Temperaturentwicklung des Saftes werde durch das Modell des beschränkten Wachstums beschrieben. Das Sättigungsmanko nehme exponentiell um 4% je Minute ab.

a) Bestimme eine Funktionsgleichung für die Temperatur des Saftes.
b) Nach welcher Zeit beträgt die Safttemperatur 20°C ?
c) Nachdem sich der Saft auf 30°C erwärmt hat, wird er dieser in den 8°C kalten Kühlschrank gestellt.
   Nach 15 Minuten beträgt seine Temperatur 19°C. Wie lange dauert es, bis der Saft auf 10°C abgekühlt ist, wenn die Abkühlung durch das Modell des beschränkten Wachstums beschrieben wird ?

Aufgabe 7:
Ein Wassertank hat ein Fassungsvermögen von 500 l. Die folgende Tabelle zeigt die Wassermenge im Tank in Abhängigkeit von der Zeit (Beginn der Messung zum Zeitpunkt $t_0 = 0$; t in h; V(t) in l.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V(t)	50	70	100	130	180	250	320	370	410	430	450

a) Zeichne ein Schaubild für den Verlauf des Wachstums.

b) Es wird der Zeitraum $0 \leq t \leq 5$ betrachtet.
   Zeige, dass die Wassermenge im Tank näherungsweise durch ein exponentielles Wachstum modelliert werden kann.
   Bestimme V(t).
   Berechne die Verdoppelungszeit.

c) Es wird der Zeitraum $t \geq 5$ betrachtet.
   Zeige, dass die Wassermenge im Tank näherungsweise durch ein beschränktes Wachstum mit der Sättigungsgrenze 500 modelliert werden kann.
   Bestimme V(t).

d) Wie viel Wasser ist 3 h 15 min nach Beginn der Messung im Tank ?
   Wann sind 200 l Wasser im Tank ?
   Wann wird der Tank voraussichtlich zu mehr als 99,9% gefüllt sein ?

Aufgabe 8:
Einem Patienten werden einmal am Tag 15 mg eines Medikaments durch eine Spritze intravenös verabreicht. Über die Nieren werden in den folgenden 24 Stunden 30% der nach der Spritze im Blut vorhandenen Medikamentenmenge ausgeschieden.

a) Wie hoch ist die nach der 3.Spritze im Blut vorhandene Medikamentenmenge m ?
b) Gegen welche Werte strebt m nach bzw. vor der täglichen Spritze ?
c) m(n) beschreibt die Medikamentenmenge nach der n.Spritze. Zeige, dass m(n) durch das Modell des beschränkten Wachstums beschrieben werden kann. Bestimme einen Funktionsterm für m(n).

Aufgabe 9:
Für einen Kredit über 20.000 € wird folgender Tilgungsplan erstellt:
Die monatlichen Kreditzinsen betragen 0,5% der Schuld zu Monatsbeginn. Am Monatsende werden 400 € für Zinsen und Tilgung zurückgezahlt. Wie hoch ist die Schuld nach 12 Monaten ?

Lösungen

Aufgabe 1:
Der Luftdruck nimmt exponentiell ab.
Die Funktion, die den Vorgang beschreibt hat die Bauart $B(t) = B(0) \cdot a^t$
B(t) gibt den Luftdruck an, t die Höhe über der Meereshöhe in 100-Meter-Schritten.

Der Funktionsterm lautet $B(t) = B(0) \cdot 0{,}987^t$
In 8000 m Höhe gilt: $B(80) = B(0) \cdot 0{,}987^{80} = B(0) \cdot 0{,}351$

In 8000 m Höhe ist der Luftdruck auf 35,1% gegenüber des Luftdrucks auf der Meereshöhe abgesunken.

Aufgabe 2:
Da für die Anzahl der Keime exponentielles Wachstum unterstellt wird, gilt der Funktionsansatz $B(t) = B(0) \cdot a^t$.
B(t) gibt die Anzahl der Keime in 1cm³ Milch an, t gibt die Zeit in Stunden an, wobei t = 0 dem Zeitpunkt "2 Stunden nach dem Melken" entsprechen soll.

Damit ist B(0) = 9000.
Bei der Funktion $B(t) = 9000 \cdot a^t$ muss noch a ermittelt werden.
Es gilt gemäß Aufgabenstellung B(1) = 32000.
Eingesetzt in die Funktion ergibt sich $32000 = 9000 \cdot a^1 \quad \Leftrightarrow a = \frac{32000}{9000} = \frac{32}{9}$

Damit ist $B(t) = 9000 \cdot \left(\frac{32}{9}\right)^t$

In 1 cm³ frisch gemolkener Milch findet man $B(-2) = 9000 \cdot \left(\frac{32}{9}\right)^{-2} = 712$ Keime

Aufgabe 3:
a) Pro Jahr kommen 180.000 - 40.000 = 140.000 Personen in das Land
Gleichzeitig sinkt die Einwohnerzahl, da die Todesrate größer als die Geburtenrate ist.
11 - 9 = 2 von 1000 Einwohnern fallen pro Jahr weg, dies sind 0,2 % der jeweils aktuellen Einwohnerzahl.
Daraus ergibt sich folgender Zusammenhang: $B(t+1) = B(t) + 140.000 - 0{,}002 \cdot B(t)$
Es gilt B(0) = 78.000.000.
Mit dem GTR ergibt sich: $B(5) = 77920319$ Einwohner

b) Bei beschränktem Wachstum gilt folgendes rekursive Formel: $B(t+1) = B(t) + k \cdot (S - B(t))$

$$B(t+1) = B(t) + 140.000 - 0{,}002 \cdot B(t)$$
$$B(t+1) = B(t) + 0{,}002 \cdot \left(\frac{140000}{0{,}002} - B(t)\right)$$
$$B(t+1) = B(t) + 0{,}002 \cdot (70.000.000 - B(t))$$

Die Formel aus a) kann als beschränkte Wachstumsformel geschrieben werden mit k = 0,002 und S = 70.000.000.
Langfristig ist mit einer Einwohnerzahl von S = 70.000.000 Einwohnern zu rechnen.

Aufgabe 4:

a) Als Schranke für ein beschränktes Wachstum kann S = 5000 m³ unterstellt werden. Zum Nachweis des beschränkten Wachstums muss gezeigt werden, dass das Sättigungsmanko pro Zeitschritt exponentiell fällt.

t	0	1	2	3	4	5	6
A(t)	2500	3090	3540	3880	4150	4350	4500
S-A(t)	2500	1910	1460	1120	850	650	500

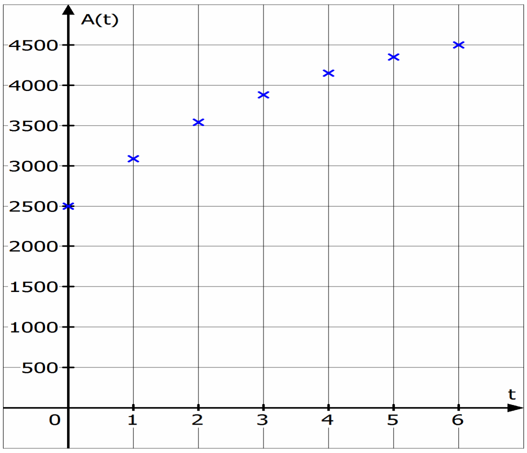
Es gilt $\frac{1910}{2500} \approx \frac{1460}{1910} \approx \frac{1120}{1460} \approx \frac{850}{1120} \approx \frac{650}{850} \approx \frac{500}{650} \approx 0,76$

Das Sättigungsmanko fällt exponentiell mit ca. 24% pro Monat.

Es gilt $A(t) = S - (S - A(0)) \cdot a^t$ mit S = 5000, A(0) = 2500 und a = 0,76.

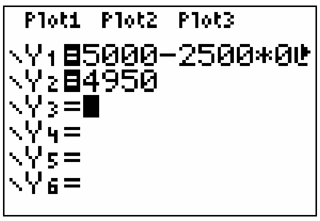
$A(t) = 5000 - 2500 \cdot 0,76^t$

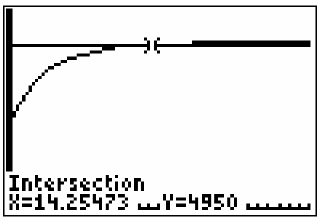
Schaubild:



99% von 5000 m² sind $0,99 \cdot 5000 = 4950$ m².

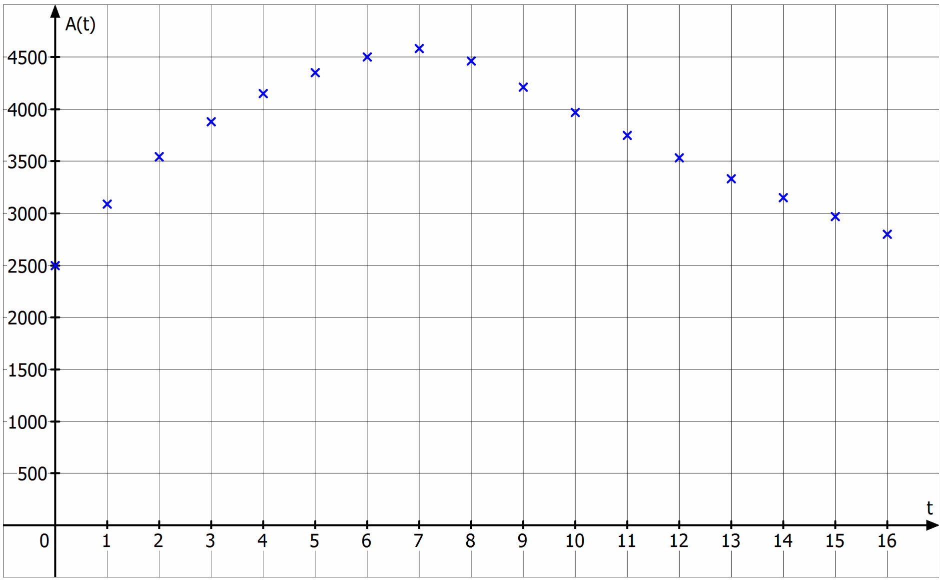
Bedingung: $5000 - 2500 \cdot 0,76^t = 4950$
Lösung mit dem GTR:





Nach ca. 14 Monaten ist 99% der gesamten Fläche mit Algen bedeckt.

b)



Wachstumsmodell für $t \geq 8$:

$$\frac{4210}{4460} \approx \frac{3970}{4210} \approx \frac{3750}{3970} \approx \frac{3530}{3750} \approx \frac{3330}{3530} \approx \frac{3150}{3330} \approx \frac{2970}{3150} \approx \frac{2800}{2970} \approx 0{,}942$$

Es kann exponentielles Wachstum unterstellt werden.
Die Wachstumsgleichung lautet $B(t) = 4460 \cdot 0{,}942^t$ (als Beobachtungsbeginn t = 0 wird der Zeitpunkt nach 8 Monaten gewählt, also zwei Monate nach Beginn der Algenbekämpfung)

20% von 5000 m² sind 1000 m².
Gesucht ist der Zeitpunkt, zu dem die Algenfläche nur noch 1000 m² beträgt.

$$1000 = 4460 \cdot 0{,}942^t \quad \Leftrightarrow \frac{1000}{4460} = 0{,}942^t \quad \Leftrightarrow \log(0{,}2242) = \log(0{,}942^t)$$

$$\Leftrightarrow \log(0{,}2242) = t \cdot \log(0{,}942) \qquad t = \frac{\log(0{,}2242)}{\log(0{,}942)} \approx 25 \text{ Monate.}$$

Antwort: 27 Monate nach Beginn der Algenbekämpfung ist der See nur noch zu 20% mit Algen bedeckt.

Aufgabe 5:

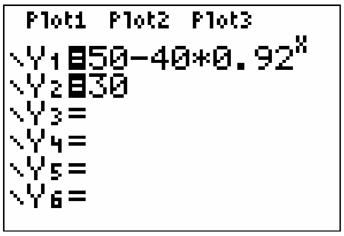
a) $f(t) = 50 - 40 \cdot 0{,}92^t$

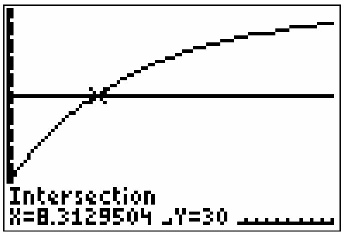
Es gilt $f(3) = 18{,}85$ Ar und $f(4) = 21{,}34$ Ar.
In der 4.Woche wächst die Fläche um 21,34 - 18,85 = 2,49 Ar

b) 1,5 ha = 150 Ar.
20% von 150 Ar sind 30 Ar.

Gesucht ist der Zeitpunkt, bei dem die Algenfläche 30 Ar beträgt.

Lösung mit dem GTR:

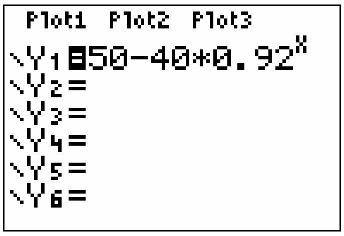


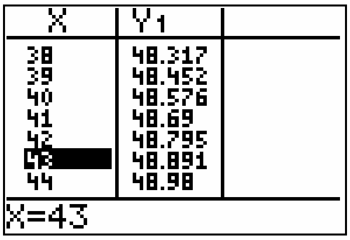


Nach ca. 8,3 Wochen sind 20% des Sees mit Algen bedeckt.

c) Es sind 10 m² = 0,1 Ar

Gesucht ist der Wert von t, bei dem in einem Zeitschritt um weniger als 0,1 zunimmt.





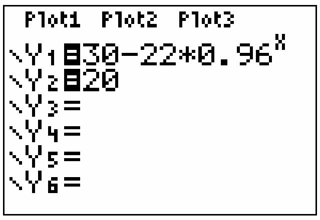
Zum ersten Mal wächst die Algenfläche in der 44. Woche um weniger als 0,1.
Es ist f(43) = 48,891 und f(44) = 48,98 mit 48,98 - 48,891 = 0,089 < 0,1.

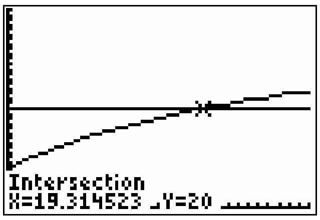
Aufgabe 6:

a) Die Funktion $f(t) = S - (S - f(0)) \cdot a^t$ ist die Wachstumsgleichung für beschränktes Wachstum.
f(t) sei die Temperatur des Saftes, t sei die Zeit in Minuten.
Es ist f(0) = 8°C. Außerdem ist S = 30°C, da der Saft nicht wärmer werden kann als die Umgebungstemperatur.
Da das Sättigungsmanko um 4% je Minute abnimmt, ist a = 0,96.

$f(t) = 30 - 22 \cdot 0{,}96^t$

b) Bedingung: $20 = 30 - 22 \cdot 0{,}96^t$





Nach 19,3 Minuten beträgt die Safttemperatur 20°C.

c) Nun sei $g(t) = S - (S - g(0)) \cdot a^t$ die Gleichung, die die Temperatur des Saftes zum Zeitpunkt t in Minuten beschreibt. (t = 0 entspricht dem Zeitpunkt, in dem der Saft in den Kühlschrank gestellt wird)

Es ist S = 8°C, da der Saft nicht kälter als 8°C werden kann. Außerdem ist g(0) = 30.
Es ist S - g(0) = -22

$g(t) = 8 + 22 \cdot a^t$

Bedingung: $g(15) = 19$

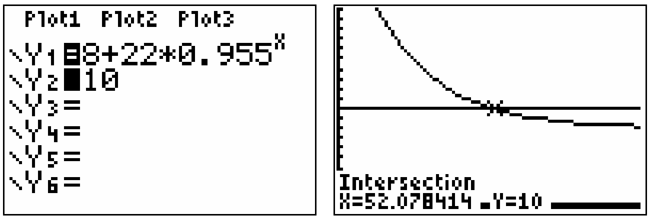
$19 = 8 + 22 \cdot a^{15} \quad \Leftrightarrow 0{,}5 = a^{15} \quad \Leftrightarrow a = \sqrt[15]{0{,}5} = 0{,}955$

Die Funktionsgleichung lautet $g(t) = 8 + 22 \cdot 0{,}955^t$

Dauer, bis der Saft auf 10°C abgekühlt ist:

$10 = 8 + 22 \cdot 0{,}955^t$

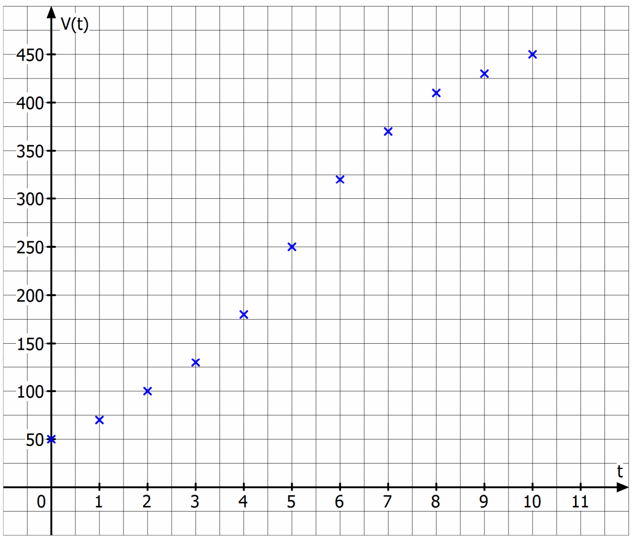
Lösung mit dem GTR



Nach ca. 52 Minuten ist der Saft auf 10°C abgekühlt.

Aufgabe 7:

a)



b) Es gilt: $\frac{70}{50} \approx \frac{100}{70} \approx \frac{130}{100} \approx \frac{180}{130} \approx \frac{250}{180} \approx 1{,}4$

$V(t) = V(0) \cdot a^t$

$V(t) = 50 \cdot 1{,}4^t$ wobei $0 \le t \le 5$ ist

Verdoppelungszeit: $T_V = \frac{\log 2}{\log 1{,}4} \approx 2$ Stunden.

c) Nachweis eines beschränkten Wachstums mit S = 500:

t	5	6	7	8	9	10
V(t)	250	320	370	410	430	450
S-V(t)	250	180	130	90	70	50

Es handelt sich um ein beschränktes Wachstum, wenn das Sättigungsmanko exponentiell abnimmt.

$$\frac{180}{250} \approx \frac{130}{180} \approx \frac{90}{130} \approx \frac{70}{90} \approx \frac{50}{70} \approx 0{,}72$$

Das Sättigungsmanko nimmt pro Stunde um ca. 28% ab. Somit handelt es sich für $t \geq 5$ um ein beschränktes Wachstum.

Da die Funktion nur für $t \geq 5$ gültig sein soll, wird folgender Ansatz gewählt:

$V(t-5) = S - (S - V(0)) \cdot a^{t-5}$

$V(t-5) = 500 - 250 \cdot 0{,}72^{t-5}$ mit $t \geq 5$

d) $V(3{,}25) = 50 \cdot 1{,}4^{3{,}25} = 149{,}2$ Liter

Anhand des Schaubildes erkennt man, dass die 200 Liter in den ersten 5 Stunden erreicht werden.
Somit wird als Funktion V(t) der Ansatz $V(t) = 50 \cdot 1{,}4^t$ genutzt.

$$200 = 50 \cdot 1{,}4^t \quad \Leftrightarrow 4 = 1{,}4^t \quad \Leftrightarrow t = \frac{\log(4)}{\log(1{,}4)} = 4{,}12 \text{ Stunden}$$

99,9% von 500 Liter sind 499,5 Liter.

$$499{,}5 = 500 - 250 \cdot 0{,}72^{t-5} \quad \Leftrightarrow \frac{0{,}5}{250} = 0{,}72^{t-5} \quad \Leftrightarrow t - 5 = \frac{\log(0{,}002)}{\log(0{,}72)} \quad \Leftrightarrow t \approx 24$$

Nach ca. 24 Stunden wird der Tank zu mehr als 99,9 % gefüllt sein.

Aufgabe 8:

a) Pro Tag werden zunächst 15 mg des Medikaments zugeführt.
Danach baut der Körper 30% des im Körper befindlichen Medikaments wieder ab.

m(n) sei die Medikamentenmenge im Körper vor der n-ten Spritze.
Es ist m(1) = 0, da vor der 1.Spritze noch kein Medikament im Körper ist.

Der Vorgang kann beschrieben werden durch $m(n+1) = (m(n) + 15) \cdot 0{,}7$

Medikamentenmenge vor der 2.Spritze: $m(2) = (0 + 15) \cdot 0{,}7 = 10{,}5$ mg

Medikamentenmenge vor der 3.Spritze: $m(3) = (10{,}5 + 15) \cdot 0{,}7 = 17{,}85$ mg

Medikamentenmenge nach der 3.Spritze: 17,85 mg + 15 mg = 32,85 mg

b) Es gilt: $m(n+1) = (m(n)+15) \cdot 0,7$
$\Leftrightarrow m(n+1) = 0,7 \cdot m(n) + 10,5$
$\Leftrightarrow m(n+1) = m(n) + 10,5 - 0,3 \cdot m(n)$
$\Leftrightarrow m(n+1) = m(n) + 0,3 \cdot (35 - m(n))$

Vor der täglichen Spritze strebt die Menge m gegen S = 35 mg.
Nach der täglichen Spritze strebt die Menge gegen 35 mg + 15 mg = 50 mg.

c) Im Gegensatz zu Teilaufgabe b) sei nun m(n) die Medikamentenmenge im Körper nach der n. Spritze.

Es gilt $m(n+1) = m(n) \cdot 0,7 + 15$
$\Leftrightarrow m(n+1) = m(n) + 15 - 0,3 \cdot m(n)$
$\Leftrightarrow m(n+1) = m(n) + 0,3 \cdot (50 - m(n))$

Damit ist gezeigt, dass es sich um ein beschränktes Wachstum handelt mit S = 50 mg.
Außerdem ist m(0) = 0 und m(1) = 15.
Funktionsansatz: $m(n) = S - (S - m(0)) \cdot a^n$

Hier gilt $m(n) = 50 - 50 \cdot a^n$
Mit $m(1) = 15$ folgt $15 = 50 - 50 \cdot a^1 \quad \Leftrightarrow a = 0,7$
$m(n) = 50 - 50 \cdot 0,7^n$

Aufgabe 9:

B(n) seien die Schulden am Ende des n. Monats.
Zu Beginn des Monats wird der aktuelle Schuldenstand um 0,5% erhöht.
Am Ende des Monats werden 400 Euro der Schulden abgetragen.

Es ist $B(n+1) = B(n) \cdot 1,005 - 400$ mit B(0) = 20.000 €.

Mit dem GTR folgt: B(12) = 16299 €.

Die Schulden nach 12 Monaten betragen noch 16299 €.