Analysis

Übungsaufgaben zum Exponentiellen Wachstum zum Einstieg

Gymnasium Klasse 10

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Januar 2014

Aufgabe 1:
Eine Stadt zählt heute 276 800 Einwohner. Es ist mit einem jährlichen Zuwachs von 2,5% zu rechnen. Welche Einwohnerzahl ist in 5 Jahren zu erwarten ?

Aufgabe 2:
Die Bevölkerung Deutschlands betrug in Millionen:

1890	1900	1920	1930
49,43	56,37	61,80	65,08

a) Wie groß ist der prozentuale Zuwachs von 1890 bis 1900 und von 1920 bis 1930 ? Kann man näherungsweise von exponentiellem Wachstum ausgehen ?
b) In welcher Zeit verdoppelt sich eine Bevölkerung bei einem jährlichen Zuwachs von 1,3%?

Aufgabe 3:
Ein Auto, das neu 22 000 € kostet, wird nach 8 Jahren um 4000 € verkauft.
Wie viel Prozent betrug die jährliche Abschreibung ?

Aufgabe 4:
Ein Waldbestand hatte sich in den vergangenen 10 Jahren bis heute um 32% auf 39 600 Festmeter vergrößert. Man geht von exponentiellem Wachstum aus.
a) Wie groß war der Bestand vor 4 Jahren ? Wie groß wird er in 6 Jahren sein, wenn man weiterhin von exponentiellem Wachstum ausgeht ?
b) In welcher Zeit verdoppelt sich der Bestand ? Wie hoch ist die jährliche prozentuale Zunahme ?

Aufgabe 5:
Die Intensität von Licht nehme pro Meter Wassertiefe um 5% ab.
a) Welcher Prozentsatz der Intensität I_0 ist in 4,75 m Wassertiefe noch vorhanden ?
b) In welcher Wassertiefe ist nur noch 1% der Intensität I_0 vorhanden?
c) Um welchen Prozentsatz nimmt die Intensität pro Dezimeter ab ?

Aufgabe 6:
Ein radioaktives Jod hat eine Halbwertszeit von 8 Tagen.
a) Wie groß ist die prozentuale Abnahme der Jodmenge pro Tag ?
b) Nach welcher Zeit sind noch 10% der ursprünglichen Jodmenge vorhanden ?

Lösungen

Aufgabe 1:

Da der jährliche Zuwachs 2,5% beträgt, handelt es sich um exponentielles Wachstum.
In 5 Jahren ist mit $276800 \cdot 1{,}025^5 \approx 313174$ Einwohnern zu rechnen.

Aufgabe 2:

a) prozentualer Zuwachs von 1890 bis 1900: $\frac{56{,}37}{49{,}43} \approx 1{,}1404$

Dies entspricht einem prozentualen Zuwachs von 14,04 %.

prozentualer Zuwachs von 1920 bis 1930: $\frac{65{,}08}{61{,}80} \approx 1{,}053$

Dies entspricht einem prozentualen Zuwachs von 5,3%.

Für exponentielles Wachstum ist die Voraussetzung, dass innerhalb eines Zehn-Jahres-Schrittes der prozentuale Zuwachs näherungsweise identisch ist.
Dies ist hier nicht der Fall, also kann man nicht von exponentiellem Wachstum ausgehen.

b) Die exponentielle Wachstumsfunktion lautet $B(t) = B(0) \cdot a^t$

Gesucht ist die Verdoppelungszeit bei a = 1,013.

Die Verdoppelungszeit entspricht der Zeitdauer, bis sich beispielsweise der Anfangsbestand B(0) verdoppelt hat.

$$2 \cdot B(0) = B(0) \cdot 1{,}013^t \quad | : B(0)$$
$$2 = 1{,}013^t \quad | \log_{10} \quad (\text{schreibtechnisch ist } \log_{10} = \log)$$
$$\log(2) = \log(1{,}013^t)$$
$$0{,}30103 = t \cdot \log(1{,}013) \quad |: \log(1{,}013)$$
$$t = 53{,}7 \text{ Jahre}$$

Die Bevölkerung verdoppelt sich in einem Zeitraum von knapp 54 Jahren.

Aufgabe 3:

Es gilt die Wachstumsfunktion $B(t) = B(0) \cdot a^t$
Gegeben ist B(0) = 22 000 € und B(8) = 4000.

Es ist $B(t) = 22000 \cdot a^t$

Die Bedingung B(8) = 4000 liefert: $4000 = 22000 \cdot a^8 \quad |: 22000$

$$\frac{2}{11} = a^8 \quad | \sqrt[8]{\ }$$
$$a = \sqrt[8]{\frac{2}{11}} \approx 0{,}8081$$

Die jährliche Abschreibung betrug ca. 19,2%.

Aufgabe 4:

a) Der Waldbestand vor 10 Jahren betrug 100%.
Der Waldbestand heute mit 39600 Festmetern entspricht 132%.

Waldbestand vor 10 Jahren = $\frac{39600}{1{,}32} = 30000$ Festmeter

Die allgemeine Wachstumsfunktion lautet $B(t) = B(0) \cdot a^t$
(t ist die Zeit in Jahren und t = 0 entspricht dem Zeitpunkt vor 10 Jahren)

$B(t) = 30000 \cdot a^t$

Es gilt $B(10) = 39600$: $39600 = 30000 \cdot a^{10}$ | : 30000

$1{,}32 = a^{10}$ | $\sqrt[10]{}$

$a = \sqrt[10]{1{,}32} \approx 1{,}0282$

Die Wachstumsfunktion lautet $B(t) = 30000 \cdot 1{,}0282^t$

Bestand vor 4 Jahren:
Da t = 0 der Zeitpunkt vor 10 Jahren ist, ist t = 6 der Bestand vor 4 Jahren.
$B(6) = 30000 \cdot 1{,}0282^6 \approx 35448$ Festmeter.

Bestand in 6 Jahren:
Da t = 0 der Zeitpunkt vor 10 Jahren ist, ist t = 16 der Bestand in 6 Jahren.
$B(16) = 30000 \cdot 1{,}0282^{16} \approx 46813$ Festmeter

b) Gesucht ist der Zeitpunkt, bis zu dem sich der Anfangsbestand von 30000 Festmetern sich auf 60000 Festmetern verdoppelt hat.

$60000 = 30000 \cdot 1{,}0282^t$ | : 30000

$2 = 1{,}0282^t$ | log

$\log(2) = \log(1{,}0282^t)$

$\log(2) = t \cdot \log(1{,}0282)$ | : log(1,0282)

$t \approx 24{,}92$ Jahre

Der Bestand verdoppelt sich ca. alle 25 Jahre.

Die jährliche prozentuale Zunahme beträgt 2,82% (da a = 1,0282).

Aufgabe 5:

a) Die Wachstumsfunktion lautet $I(x) = I_0 \cdot 0{,}95^x$, x ist die Wassertiefe in Meter

$I(4{,}75) = I_0 \cdot 0{,}95^{4{,}75} = I_0 \cdot 0{,}784$

In 4,75m Wassertiefe sind noch 78,4% der Anfangsintensität vorhanden.

b) Gesucht ist die Wassertiefe x, in welcher noch $0,01 \cdot I_0$ vorhanden ist.

$I(x) = I_0 \cdot 0,95^x$

$0,01 \cdot I_0 = I_0 \cdot 0,95^x \quad | : I_0$

$0,01 = 0,95^x \quad | \log$

$\log(0,01) = \log(0,95^x)$

$\log(0,01) = x \cdot \log(0,95) \quad | : \log(0,95)$

$x = 89,8$ Meter

In ca. 90 Meter Wassertiefe ist nur noch 1% der Intensität vorhanden.

c) In 1 dm = 0,1 m Wassertiefe beträgt die Intensität $I(0,1) = I_0 \cdot 0,95^{0,1} = I_0 \cdot 0,9949$
Die Intensität nimmt in 1 dm Wassertiefe um ca. 0,5% ab.

Aufgabe 6:

Die Jodmenge zur Zeit t in Tagen zerfällt exponentiell gemäß $B(t) = B(0) \cdot a^t$.

a) Wenn die Halbwertszeit 8 Tage beträgt, heißt das, dass nach 8 Tagen nur noch die Hälfte des Anfangsbestandes vorhanden ist.

$0,5 \cdot B(0) = B(0) \cdot a^8 \quad | : B(0)$

$0,5 = a^8 \quad | \sqrt[8]{}$

$a = \sqrt[8]{0,5} = 0,917$

Es gilt $B(t) = B(0) \cdot 0,917^t$

Pro Tag nimmt die Jodmenge um 8,3% ab.

b) Gesucht ist der Zeitpunkt t, zu dem noch $0,1 \cdot B(0)$ vorhanden ist.

$0,1 \cdot B(0) = B(0) \cdot 0,917^t \quad | : B(0)$

$0,1 = 0,917^t \quad | \log$

$\log(0,1) = t \cdot \log(0,917) \quad | : \log(0,917)$

$t = 26,6$ Tage

Nach knapp 27 Tagen sind nur noch 10% der ursprünglichen Jodmenge vorhanden.