Analysis

Wahlteilaufgaben zu exponentiellem und beschränktem Wachstum inkl. Differenzialgleichungen

Gymnasium ab J1

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Februar 2014

Aufgabe 1
Zu Beginn eines Experimentes wird eine Kolonie von 400 Bakterien in eine Nährlösung gebracht. Zwei Stunden später zählt man bereits 30.000. Man geht in diesem Stadium von exponentiellem Wachstum aus.
Die Funktion f(t) sei die Anzahl der Bakterien t Stunden nach Beginn des Experimentes.
Stelle die Wachstumsfunktion auf, wenn der Zeitschritt t

a) Bestimme f(t). Wie viele Bakterien sind es nach 3 Stunden?
   Wann sind es 50.000 Bakterien?
b) Um wie viel Prozent wächst der Bestand pro Minute ?
c) Berechne die Verdoppelungszeit.

Aufgabe 2
Ein Medikament ist im menschlichen Körper 6 Stunden nach der Einnahme zur Hälfte abgebaut.

a) Bestimme die Zerfallsfunktion für den Fall, dass die eingenommene Menge m_0 ist
b) In welchen zeitlichen Abständen und in welcher Menge ist das Medikament einzunehmen, wenn im menschlichen Körper ein Mindestniveau von $0{,}8 \cdot m_0$ aufrechterhalten werden soll?

Aufgabe 3
Bei einer Bakterienkultur wird die Anzahl der Bakterien stündlich bestimmt:

Zeit t (in h)	0	1	2	3	4	5	6
Bakterienzahl (in Mio)	7,1	7,7	8,3	9,0	9,7	10,5	11,3

a) Zeige, dass die Bakterienzahl in diesem Zeitraum angenähert exponentiell wächst
b) Bestimme die Gleichung der Wachstumsfunktion f(t). Wie viele Bakterien waren eine halbe Stunde vor Beobachtungsbeginn vorhanden, wenn auch schon vor Beobachtungsbeginn dasselbe Wachstumsgesetz unterstellt werden kann ?
c) Bestimme den Zeitpunkt zu dem die Bakterien in den nächsten 3 Stunden um 40 Mio ansteigen.

Aufgabe 4
Heißer Kaffee in einer Tasse kühlt sich langsam auf Zimmertemperatur ab.
Die Geschwindigkeit, mit der sich die Temperaturdifferenz d(t) verringert, ist proportional zur noch vorhandenen Differenz:

$$d'(t) = k \cdot d(t) \text{ mit } k < 0 \quad \text{(Newtonsches Abkühlungsgesetz)}$$

Die Zimmertemperatur beträgt 20° C und die anfängliche Kaffeetemperatur 80° C.
Nach 20 Minuten beträgt die Kaffeetemperatur noch 50° C.
Wie lange dauert es, bis der Kaffee auf 30° C abgekühlt ist?
Hinweis: Man geht vereinfachend davon aus, dass die Zimmertemperatur konstant bleibt)

Aufgabe 5
Wenn Licht in Wasser eindringt, so verliert es mit zunehmender Wassertiefe durch Absorption pro Meter 75% des bis dahin verbliebenen Wertes.
a) Wie lautet die zugehörige Differenzialgleichung?
b) Wie viel Prozent der ursprünglichen Intensität sind in 2m Wassertiefe noch vorhanden?
c) In welcher Tiefe beträgt die Intensität weniger als 0,1% der ursprünglichern Intensität?

Aufgabe 6
Ein Wasserreservoir enthält 20m³ Wasser. Pro Minute fließen150 Liter Wasser in das Reservoir. Gleichzeitig fließt aus dem Reservoir Wasser ab mit einer momentanen Rate von 0,25% der vorhandenen Wassermenge.
a) Stelle die Funktion f(t) für die vorhandene Wassermenge auf.
b) Wie muss sich die Zuflussmenge pro Minute ändern (bei gleich bleibender momentaner Abflussrate von 0,25%), wenn sich langfristig 40m³ Wasser im Reservoir befinden sollen ?
c) Wie muss sich die momentane Abflussrate pro Minute ändern (bei gleich bleibender Zuflussmenge von 150 Liter), wenn sich langfristig 50 m³ Wasser im Reservoir befinden sollen ?

Aufgabe 7
Zur Zeit t = 0 (t in Stunden) werden 100g Salz in ein Reagenzglas mit destilliertem Wasser geschüttet. Ein Teil dieses Salzes löst sich im Laufe der Zeit in der Flüssigkeit auf. Dabei kann die gelöste Salzmenge m(t) einen bestimmten Wert, nämlich den Sättigungswert $m_0 = 60g$ nicht überschreiten.

Beobachtungen haben gezeigt, dass näherungsweise die Geschwindigkeit, mit der sich m(t) ändert, proportional ist zur Menge des noch lösbaren Salzes.
Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von $t \to m(t)$, wenn der Proportionalitätsfaktor 3 ist.
Wie lange dauert es, bis 40g Salz gelöst sind?
Skizziere das Schaubild von $t \to m(t)$.

Aufgabe 8
Bei der Abkühlung von warmem Wasser in einer Umgebung mit der Temperatur S wird die Wassertemperatur f(t) (in Grad Celsius) zum Zeitpunkt t (in Minuten seit Beobachtungsbeginn) beschrieben durch
$f(t) = S + a \cdot e^{-0{,}035t}$; $t \geq 0$ und $a \in \mathbb{R}$

Warmes Wasser von 60°C kühlt sich zunächst 15 Minuten lang bei der Zimmertemperatur 20°C ab. Anschließend wird dieses Wasser in einen Kühlschrank mit 5°C gestellt.
Wie lange dauert es, bis sich das Wasser von 60°C auf 30°C abgekühlt hat?
Nach welcher Zeit hätte man das Wasser in den Kühlschrank stellen müssen, damit es bereits nach 25 Minuten die Temperatur 30°C hat?

Aufgabe 9:
Für den Abbau der Masse m(t) eines Stoffes (t in Stunden, m(t) Masse des vorhandenen in kg zum Zeitpunkt t) gilt die Differenzialgleichung $\frac{m'(t)}{m(t)} = -0{,}05$.

a) Wie groß ist die Halbwertszeit ?
b) Wie lange dauert es, bis 80% der ursprünglich vorhandenen Masse abgebaut sind ?
c) Zum Zeitpunkt t = 0 seien 10 kg vorhanden. Alle 5 Stunden werden weitere 10 kg Masse hinzugegeben. Berechne die Masse nach 15 Stunden, wobei in der 15.Stunde keine weitere Masse hinzugegeben wird.

Lösungen

Aufgabe 1

a) Ansatz für die Wachstumsfunktion: $f(t) = a \cdot e^{kt}$ mit a = f(0) = 400.

Außerdem gilt: $f(2) = 30.000 \Rightarrow 30.000 = 400 \cdot e^{2k} \Rightarrow k = \frac{1}{2}\ln 75 = 2{,}1587$

Also gilt $f(t) = 400 \cdot e^{2{,}1587 \cdot t}$ (t in Stunden).

Nach 3 Stunden sind es $f(3) = 400 \cdot e^{2{,}1587 \cdot 3} \approx 259773$ Bakterien.

Zeit, bis es 50.000 Bakterien sind:

$50.000 = 400 \cdot e^{2{,}1587 \cdot t} \Leftrightarrow \ln(125) = 2{,}1587 \cdot t \Leftrightarrow t = 2{,}237$ Stunden.

b) Zuwachs des Bestandes pro Minute:

$f(\frac{1}{60}) = 400 \cdot e^{2{,}1587 \cdot \frac{1}{60}} = 400 \cdot 1{,}0366$

Der Faktor 1,0366 entspricht einem Zuwachs von 3,66% pro Minute.

c) Verdoppelungszeit: $T_V = \frac{\ln(2)}{k} = \frac{\ln(2)}{2{,}1587} = 0{,}32$ Stunden.

Aufgabe 2

Der Abbau des Medikaments wird durch ein exponentielles Wachstum beschrieben, da die Halbwertszeit konstant 6 Stunden beträgt.

a) Ansatz für die Zerfallsfunktion: $m(t) = m_0 \cdot e^{kt}$

(m(t) = Menge des Medikaments im Körper nach t Stunden)

Für die Halbwertszeit gilt: $T_H = \frac{\ln(0{,}5)}{k} \Leftrightarrow k = \frac{\ln(0{,}5)}{6} \approx -0{,}1155$

Damit gilt für die Zerfallsfunktion: $m(t) = m_0 \cdot e^{-0{,}1155t}$.

b) Nach welcher Zeit befinden sich noch $0{,}8 \cdot m_0$ im Körper ?

$0{,}8 \cdot m_0 = m_0 \cdot e^{-0{,}1155t} \Rightarrow -0{,}1155t = \ln(0{,}8) \Rightarrow t = 1{,}93$ Stunden.

Das Medikament sollte alle 1,93 Stunden eingenommen werden.

Die einzunehmende Menge muss $m_0 - 0{,}8 \cdot m_0 = 0{,}2 \cdot m_0$ betragen.

Aufgabe 3

a) Es gilt $\frac{7{,}7}{7{,}1} \approx \frac{8{,}3}{7{,}7} \approx \frac{9{,}0}{8{,}3} \approx \frac{9{,}7}{9{,}0} \approx \frac{10{,}5}{9{,}7} \approx \frac{11{,}3}{10{,}5} \approx 1{,}08$

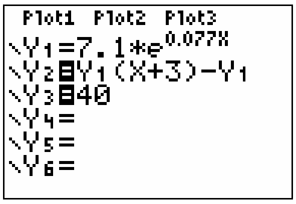
Also liegt angenähert exponentielles Wachstum vor mit einem stündlichen Zuwachs von 8%.

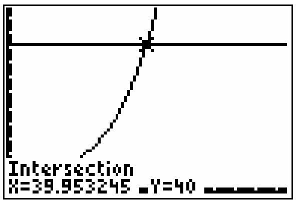
b) Die Wachstumsfunktion lautet $f(t) = 7{,}1 \cdot 1{,}08^t$
Mit dem Ansatz $f(t) = 7{,}1 \cdot e^{k \cdot t}$ ergibt sich mit $k = \ln(1{,}08) = 0{,}077$ die Funktion
Somit gilt $f(t) = 7{,}1 \cdot e^{0{,}077t}$.
Anzahl Bakterien 0,5 Stunden vor Beobachtungsbeginn: $f(-0{,}5) = 6{,}83$ Mio

c) Bedingung: Innerhalb von 3 Stunden soll Bakterienanzahl um 40 Mio wachsen:

Für den gesuchten Zeitpunkt t muss gelten: $B(t+3) - B(t) = 40$

Lösung mit dem GTR





Der Zeitpunkt beginnt nach ca. 40 Stunden.

Aufgabe 4
Aus der Differenzialgleichung ergibt sich, dass d(t) einem exponentiellen Wachstum entspricht mit der Gleichung $d(t) = c \cdot e^{kt}$, t ist die Zeit in Minuten, d(t) die Temperaturdifferenz zwischen dem Kaffee und der Zimmertemperatur.

Die anfängliche Temperaturdifferenz beträgt 80°C – 20°C = 60°C, also d(0) = 60.
Die Differenz nach 20 Minuten beträgt 50°C – 20°C = 30°C, also d(20) = 30.

Ansatz für die Funktion: $d(t) = 60 \cdot e^{kt}$.
Mit d(20) = 30 folgt $30 = 60 \cdot e^{k \cdot 20} \Rightarrow k = -0{,}0347$ und damit $d(t) = 60 \cdot e^{-0{,}0347t}$.

Der Kaffee ist auf 30°C abgekühlt wenn sich die Differenz auf 10°C reduziert hat.
Ansatz: $d(t) = 10 \Rightarrow 60e^{-0{,}0347t} = 10 \Rightarrow t = 51{,}6$ Minuten.

Aufgabe 5

a) Es handelt sich um einen exponentiellen Zerfall mit dem Zerfallfaktor $a = 0{,}25$.
Daraus folgt $k = \ln(a) = \ln(0{,}25) = -1{,}386$
Die zugehörige Differenzialgleichung lautet $f'(t) = -1{,}386 \cdot f(t)$.

b) Die Wachstumsfunktion lautet $f(t) = f(0) \cdot e^{-1{,}386t}$
t = Wassertiefe in Meter ; f(t) = Lichtintensität in t Meter Wassertiefe.

In 2 m Tiefe gilt $f(2) = f(0) \cdot e^{-2{,}772} = f(0) \cdot 0{,}0625$, also sind noch 6,25% der Anfangsintensität vorhanden.

c) 0,1% der ursprünglichen Intensität sind $0,001\cdot f(0)$

$0,001\cdot f(0)=f(0)\cdot e^{-1,386t}$

$\Leftrightarrow 0,001=e^{-1,386t} \Rightarrow t=4,984$ Meter.

Ab ca. 5 Meter ist die Lichtintensität weniger als 0,1% der ursprünglichen Intensität.

Aufgabe 6

a) Aus dem Zufluss von 150 Liter Wasser und dem Abfluss von 0,25% des Wassers ergibt sich die Differenzialgleichung $f'(t)=150-0,0025\cdot f(t)$.

Umformung der Differenzialgleichung: $f'(t)=0,0025\cdot(60000-f(t))$

Es handelt sich hierbei um die Differenzialgleichung $f'(t)=k\cdot(S-f(t))$, also um ein beschränktes Wachstum mit der Wachstumsgleichung $f(t)=S-a\cdot e^{-kt}$.

Daraus folgt: $f(t)=60000-a\cdot e^{-0,0025t}$.

Der Anfangsbestand beträgt 20 m³ = 20.000 dm³ = 20.000 Liter Wasser.

Also $f(0)=60000-a=20000 \Rightarrow a=40000$

Die Wachstumsfunktion lautet $f(t)=60.000-40.000\cdot e^{-0,0025t}$

b) Die neue Differenzialgleichung lautet $f'(t)=0,0025\cdot(40000-f(t))$

Die Differenzialgleichung ergibt ausmultipliziert $f'(t)=100-0,0025\cdot f(t)$

Die Zuflussmenge pro Minute müsste 100 Liter sein.

c) Die neue Differenzialgleichung lautet $f'(t)=k\cdot(50000-f(t))$

Die Differenzialgleichung ergibt ausmultipliziert $f'(t)=k\cdot 50000-k\cdot f(t)$

Nun soll gelten: $k\cdot 50000=150 \Leftrightarrow k=0,003$

Pro Minute müsste die momentane Abflussrate 0,3% der vorhandenen Wassermenge betragen.

Aufgabe 7

Die Geschwindigkeit , mit der sich m(t) ändert, ist die Ableitungsufnktion $m'(t)$.

$m'(t)$ ist proportional zur Menge des noch lösbaren Salzes, also zu 60 – m(t).

Damit ergibt sich als Differenzialgleichung $m'(t)=k\cdot(60-m(t))$ mit k = 3.

Es handelt sich um ein beschränktes Wachstum mit $m(t)=60-a\cdot e^{-3t}$.

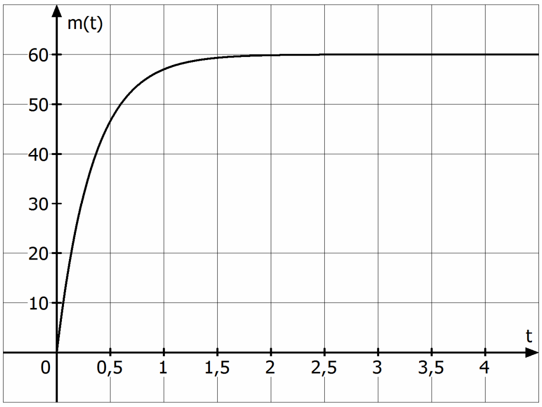
Da zu Beginn noch kein Salz gelöst ist, gilt m(0) = 0 und damit

$m(0)=60-a=0 \Rightarrow a=60$.

Die Funktionsgleichung lautet $m(t)=60-60\cdot e^{-3t}$.

Dauer, bis 40 g gelöst sind: $40=60-60\cdot e^{-3t} \Rightarrow t=0,366$ Stunden = 22 Minuten.

Skizze von m(t):



Aufgabe 8

Aufgrund der Zimmertemperatur gilt $S = 20$. Außerdem gilt $f(0) = 60$.

Eingesetzt in die Funktionsgleichung ergibt sich $60 = 20 + a \cdot e^0 \Rightarrow a = 40$.

Die Wachstumsfunktion lautet $f(t) = 20 + 40 \cdot e^{-0{,}035t}$.

Nach 15 Minuten hat das Wasser eine Temperatur von $f(15) = 43{,}66$ °C.

Nun wird das Wasser in den Kühlschrank gestellt. Da nun $S = 5$ ist, muss für diesen Abkühlungsvorgang eine neue Wachstumsfunktion $g(t) = 5 + a \cdot e^{-0{,}035t}$; $t \geq 0$ aufgestellt werden, wobei t = 0 der Zeitpunkt ist, bei dem das Wasser in den Kühlschrank gestellt wird.

Mit $g(0) = 43{,}66$ gilt $43{,}66 = 5 + a \cdot e^0 \Rightarrow a = 38{,}66$.

Die Wachstumsfunktion lautet $g(t) = 5 + 38{,}66 \cdot e^{-0{,}035t}$.

Dauer, bis sich das Wasser auf 30°C abgekühlt hat:

$30 = 5 + 38{,}66 \cdot e^{-0{,}035t} \Rightarrow t = 12{,}46$ Minuten.

Insgesamt dauert es 15 + 12,46 = 27,46 Minuten, bis sich das Wasser auf 30°C abgekühlt hat.

Nun soll das Wasser bereits nach 25 Minuten eine Temperatur von 30°C erreichen.
Zunächst wird das Wasser t* Minuten in das Zimmer gestellt.

Danach hat es die Temperatur $f(t^*) = 20 + 40 \cdot e^{-0{,}035t^*}$.

Diese Temperatur f(t*) ist gleichzeitig die Anfangstemperatur, mit der das Wasser in den Kühlschrank gestellt wird.

Für die neue Wachstumsfunktion im Kühlschrank gilt:

$g(0) = 20 + 40 \cdot e^{-0{,}035t^*} \Rightarrow 5 + a = 20 + 40 \cdot e^{-0{,}035t^*} \Rightarrow a = 15 + 40 \cdot e^{-0{,}035t^*}$

$g(t) = 5 + (15 + 40e^{-0{,}035t^*}) \cdot e^{-0{,}035t}$

Da die gesamte Dauer 25 Minuten betragen soll, kann sich das Wasser im Kühlschrank nur noch 25 – t* Minuten befinden. In dieser Zeit soll es eine Temperatur von 30°C annehmen.

Also muss gelten: $g(25 - t^*) = 30 \Rightarrow 30 = 5 + (15 + 40e^{-0{,}035t^*}) \cdot e^{-0{,}035(25-t^*)}$

$\Rightarrow 25 = 15e^{-0{,}875+0{,}035t^*} + 40e^{-0{,}875} \Rightarrow 8{,}3255 = 15e^{-0{,}875+0{,}035t^*} \Rightarrow \ln(0{,}555) = -0{,}875 + 0{,}035t^*$

$\Rightarrow t^* = 8{,}18$ Minuten

Das Wasser hätte man nach 8,18 Minuten in den Kühlschrank stellen müssen.

Aufgabe 9:

a) Die Differenzialgleichung lautet umgeformt $m'(t) = -0,05 \cdot m(t)$
Es handelt sich um exponentielles Wachstum.
Die Halbwertszeit beträgt $T_H = \frac{\ln(0,5)}{k} = \frac{\ln(0,5)}{-0,05} = 13,86$ Stunden

b) Die Wachstumsfunktion hat die Gleichung $m(t) = m(0) \cdot e^{-0,05 \cdot t}$
Wenn 80% abgebaut sind, sind noch $0,2 \cdot m(0)$ vorhanden.

$0,2 \cdot m(0) = m(0) \cdot e^{-0,05 \cdot t} \quad | : m(0)$

$0,2 = e^{-0,05t} \Leftrightarrow t = \frac{\ln(0,2)}{-0,05} = 32,2$ Stunden

c) Es gilt $m(t) = 10 \cdot e^{-0,05t}$
Masse nach 5 Stunden: $m(5) = 10 \cdot e^{-0,05 \cdot 5} = 7,79$ kg.
Hinzugabe von 10 kg ergibt 17,79 kg.
Masse nach 10 Stunden: $17,79 \cdot e^{-0,05 \cdot 5} = 13,85$ kg
Hinzugabe von 10 kg ergibt 23,85 kg
Masse nach 15 Stunden: $23,85 \cdot e^{-0,05 \cdot 5} = 18,57$ kg