Analysis

Klausur zur Integralrechnung
Stammfunktionsberechnung, Flächenberechnung, Rotationsvolumen, Funktionen zu Änderungsraten
(Bearbeitungszeit: 90 Minuten)

Gymnasium J1

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Januar 2014

Pflichtteil - ohne Hilfsmittel

Aufgabe P1: (4 VP)
Gib eine Stammfunktion an:

a) $f(x) = \sqrt{x} + \cos(0{,}5x)$ b) $g(x) = \dfrac{6}{(2-3x)^2}$

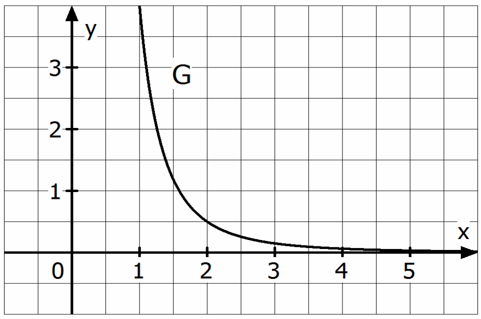
c) Gib die Stammfunktion H(x) der Funktion $h(x) = 1 + 2x^3$ an, für die H(2) = 0 ist .

Aufgabe P2: (3 + 4 VP)
Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = 2x - 0{,}5x^2$, $0 \le x \le 6$

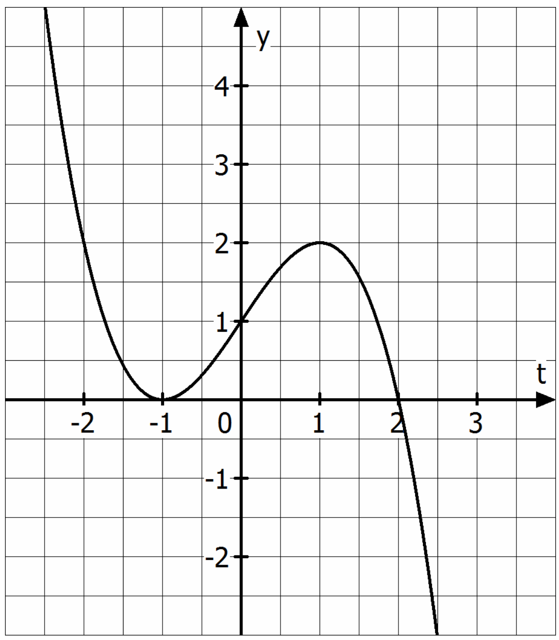
a) Skizziere das Schaubild K von f. Die x-Achse, K und die Gerade x = 6 begrenzen im Bereich $4 \le x \le 6$ eine Fläche. Berechne den Inhalt dieser Fläche.
b) Bestimme die Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt B(4/0). Der Graph von f, seine Tangente in B(4/0) und die y-Achse begrenzen eine Fläche. Berechne ihren Inhalt.

Aufgabe P3: (3 VP)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{4}{x^3}$, x > 0.
Der Graph G von f, die x-Achse und die Gerade x = 1 begrenzen eine ins Unendlich reichende Fläche. Untersuche, ob ihr Inhalt einen Grenzwert hat.



Aufgabe P4: (4 VP)
Die Abbildung zeigt das Schaubild einer ganzrationalen Funktion f.
Begründe, welche der folgenden Aussagen über die Funktion $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ wahr und welche falsch sind.
(1) F(2) < 2
(2) Der Graph von F ist für -1 < x < 1 eine Linkskurve.
(3) F(-2) ist positiv.
(4) $F''(1)$ ist Null



Wahlteil - mit GTR und Formelsammlung

Aufgabe W1: (6 + 6 VP)
Ein Staubecken wird zur Zeit der Schneeschmelze gefüllt. Da die Schneeschmelze temperaturabhängig ist, kann die momentane Zuflussrate des Wassers durch die Funktion w mit $w(t) = 0{,}25 \cdot t^3 - 6 \cdot t^2 + 36 \cdot t + 50$, $0 \le t \le 12$

beschrieben werden (t in Stunden seit Beobachtungsbeginn, w(t) in $\frac{m^3}{h}$).

a) In welchem Zeitraum ist die momentane Zuflussrate größer als 100 $\frac{m^3}{h}$?
   Zu welchem Zeitpunkt nimmt die momentane Zuflussrate am stärksten ab ?
   Welche mittlere momentane Zuflussrate erhält man für die ersten 12 Stunden seit Beobachtungsbeginn ?

b) Zu Beobachtungsbeginn enthält das Staubecken 4500 m³ Wasser.
   Wie viel Wasser enthält es nach 10 Stunden ?
   Zeige (ohne GTR), dass die Funktion f mit
   $f(t) = \frac{1}{16} t^4 - 2 \cdot t^3 + 18 \cdot t^2 + 50 \cdot t + 4500$; $0 \le t \le 12$
   (t in Stunden seit Beobachtungsbeginn, f(t) in m³) die zum Zeitpunkt t im Staubecken enthaltene Wassermenge angibt.

   Nach welcher Zeit sind 5000 m³ Wasser im Becken ?

Aufgabe W2: (2 + 2 VP)
Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{40x}{x^2 + 16}$; $x \in \mathbb{R}$
Der Graph von f, die x-Achse und die Geraden x = 2 und x = 30 schließen eine Fläche ein. Diese rotiert um die x-Achse. Der dabei entstehende Rotationskörper stellt die Designstudie einer Flasche dar (Koordinatenangaben in cm).

a) Welches Volumen hat die Flasche ?

b) Solche Flaschen sollen später gefüllt und in einem zylinderförmigen Karton verkauft werden. Dabei steht eine Flasche so in einem 30 cm hohen Zylinder, dass sie an ihrer breitesten Stelle 1 cm Abstand vom Zylindermantel hat. Der die Flasche umgebende Hohlraum ist mit Holzwolle gefüllt.
   Welches Volumen hat der Hohlraum ?

Lösungen

Aufgabe P1:

a) $f(x) = x^{\frac{1}{2}} + \cos(0,5x) \quad \Rightarrow F(x) = \frac{1}{1,5}x^{1,5} + \sin(0,5x)\cdot\frac{1}{0,5} = \frac{2}{3}x^{1,5} + 2\sin(0,5x)$

b) $f(x) = 6(2-3x)^{-2} \quad \Rightarrow F(x) = \frac{6}{-1}(2-3x)^{-1}\cdot\frac{1}{-3} = 2(2-3x)^{-1} = \frac{2}{2-3x}$

c) Es ist $H(x) = x + \frac{1}{2}x^4 + C$

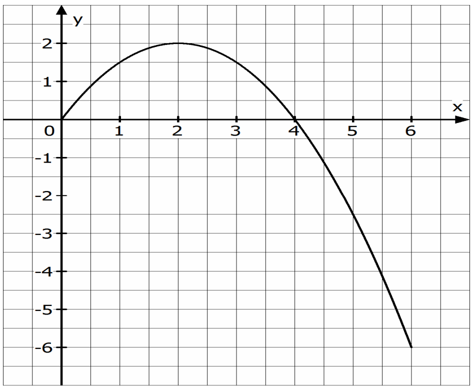
Es gilt H(2) = 0: $0 = 2 + \frac{1}{2}\cdot 2^4 + C \Leftrightarrow C = -10$

Die Stammfunktion lautet $H(x) = x + \frac{1}{2}x^4 - 10$

Aufgabe P2:

a) Die Skizze der nach unten geöffneten Parabel wird mit Hilfe einer Wertetabelle durchgeführt.

x	0	1	2	3	4	5	6
y	0	1,5	2	1,5	0	-2,5	-6



Es ist $\int_4^6 f(x)dx = \left[x^2 - \frac{1}{6}x^3\right]_4^6 = 36 - 36 - (16 - \frac{32}{3}) = -\frac{16}{3}$

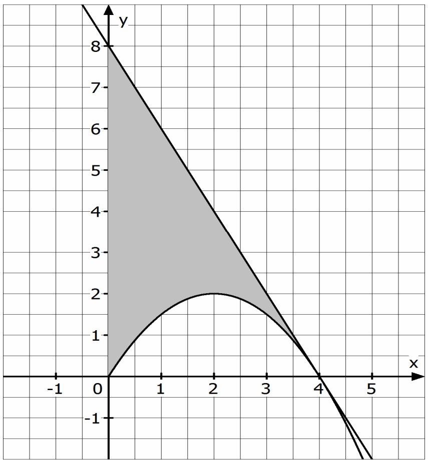
Da die Fläche unterhalb der x-Achse liegt, ist das Ergebnis des Integrals negativ.

Die gesuchte Fläche beträgt $A = \frac{16}{3}$ Flächeneinheiten.

Tangentengleichung im Punkt B(4/0):
Die allgemeine Tangentenformel lautet $y = f'(u)\cdot(x-u) + f(u)$

Die Berührung erfolgt an der Stelle u = 4: $y = f'(4)\cdot(x-4) + f(4)$
Mit $f'(x) = 2 - x$ folgt $f'(4) = -2$. Außerdem ist $f(4) = 0$.

Tangentengleichung in B: $y = -2\cdot(x-4) + 0$ und vereinfacht $y = -2x + 8$



Der gesuchte grau markierte Flächeninhalt beträgt

$$A = \int_0^4 (-2x + 8 - (2x - 0{,}5x^2))dx = \int_0^4 (-4x + 8 + 0{,}5x^2)dx = \left[-2x^2 + 8x + \frac{1}{6}x^3\right]_0^4$$

$$= -32 + 32 + \frac{32}{3} - 0 = \frac{32}{3} \text{ Flächeneinheiten}$$

Aufgabe P3:

Da die Fläche nach rechts offen ist, wird als obere Grenze die Variable x = z gewählt.

$$\int_1^z \frac{4}{x^3}dx = \int_1^z 4x^{-3}dx = \left[-2x^{-2}\right]_1^z = \left[\frac{-2}{x^2}\right]_1^z = \frac{-2}{z^2} + 2$$

Für $z \to +\infty$ strebt $\frac{-2}{z^2} + 2 \to 2$

Die nach rechts offene Fläche hat den Grenzwert A = 2.

Aufgabe P4:

(1) Es ist $F(2) = \int_0^2 f(t)dt$

Die Fläche zwischen f(t) und der x-Achse im Intervall von 0 bis 2 ist größer als 2.
Die Aussage ist falsch.

(2) Der Graph von F ist eine Linkskurve, wenn $F''(x) > 0$ ist.

Da $F''(x) = f'(x)$ ist, muss somit $f'(x) > 0$ sein.

Im Intervall -1 x < 1 ist das Schaubild von f(x) streng monoton wachsend, somit sind Steigungen der Tangenten an f(x) positiv und die Aussage ist wahr.

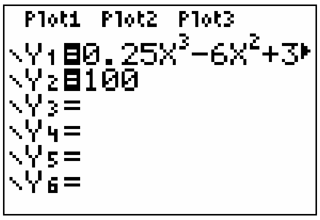
(3) $F(-2) = \int_0^{-2} f(t)dt$ liefert einen negativen Wert, da die Fläche zwar oberhalb der t-Achse liegt, aber von rechts nach links integriert wird und daher das Integral negativ wird.
Die Aussage ist falsch.

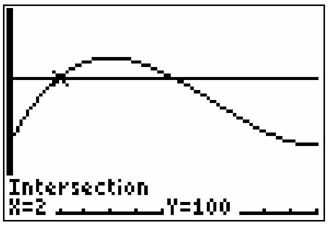
(4) $F''(1) = f'(1) = 0$ ist wahr, da bei x = 1 das Schaubild von f(x) einen Hochpunkt besitzt und damit auch eine waagrechte Tangente.

Aufgabe W1:

a) Zeitraum, in dem die Zuflussrate größer als 100 m³/h ist:

Ansatz: $w(t) > 100$

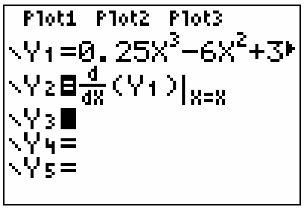


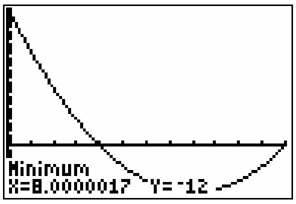


Die beiden Schaubilder schneiden sich bei t = 2 sowie bei t = 6,417.
Die Zuflussrate ist größer als 100 m³/h im Zeitraum $2 < t < 6,417$.

stärkste Abnahme der momentanen Zuflussrate:

Die Zuflussrate nimmt am stärksten ab, wenn $w'(t)$ minimal wird.





Die Zuflussrate wird nach t = 8 Stunden minimal.

Mittlere momentane Zuflussrate = $\frac{1}{12-0} \cdot \int_0^{12} w(t)dt = \frac{1}{12} \cdot 1032 = 86$ m³/h (GTR).

b) Wassermenge nach 10 Stunden $= 4500 + \int_0^{10} w(t)dt = 4500 + 925 = 5425$ m³

Die Stammfunktion f von w(t) mit $f(0) = 4500$ beschreibt die zum Zeitpunkt t enthaltene Wassermenge.

Stammfunktion von w(t): $f(t) = \frac{0,25}{4}t^4 - \frac{6}{3}t^3 + \frac{36}{2}t^2 + 50t + C$

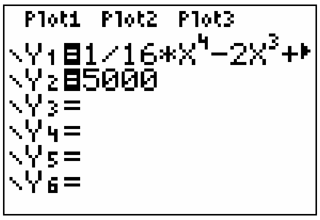
und vereinfacht $f(t) = \frac{1}{16}t^4 - 2t^3 + 18t^2 + 50t + C$

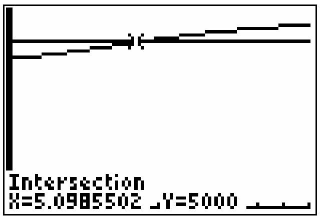
Aus f(0) = 4500 folgt C = 4500.

Damit lautet die gesuchte Stammfunktion $f(t) = \frac{1}{16}t^4 - 2t^3 + 18t^2 + 50t + 4500$ und diese stimmt mit der dargestellten Funktion überein.

Zeit, nach der 5000 m³ im Becken sind: $f(t) = 5000$

Lösung mit GTR:

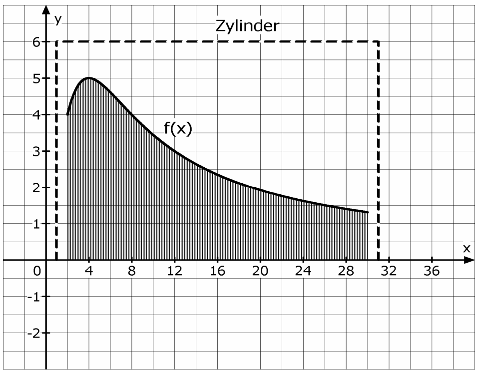




Nach t = 5,1 Stunden sind 5000 m³ im Becken.

Aufgabe W2:

a)



Volumen der Flasche = $\pi \cdot \int_2^{30} f(x)^2 \, dx \approx 781{,}4$ cm³

b) Die breiteste Stelle der Flasche entspricht dem Hochpunkt des Schaubildes.
Mit dem GTR ergibt sich als Hochpunkt H(4/5).
Der Radius der Flasche an der breitesten Stelle beträgt daher r = 5 cm.
Aufgrund des vorgegebenen Abstandes muss der Zylinder einen Radius von 6 cm haben. Die Zylinderhöhe beträgt 30 cm.
$V_{Zylinder} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 6^2 \cdot 30 \approx 3393$ cm³

Der Hohlraum beträgt $V_{Hohlraum} = 3393 - 781{,}4 = 2611{,}4$ cm³.