

**Übungsaufgaben zum Pflichtteil (ohne GTR und Formelsammlung)**  
**Gebrochenrationale Funktionen**
**Aufgabe 1: Skizzieren von Schaubildern**

Skizziere die Schaubilder der folgenden Funktionen und bestimme jeweils die Asymptoten:

a)  $f(x) = \frac{1}{x+1} + 2$

b)  $f(x) = -\frac{1}{x-1}$

c)  $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - 1$

d)  $f(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} + 2$

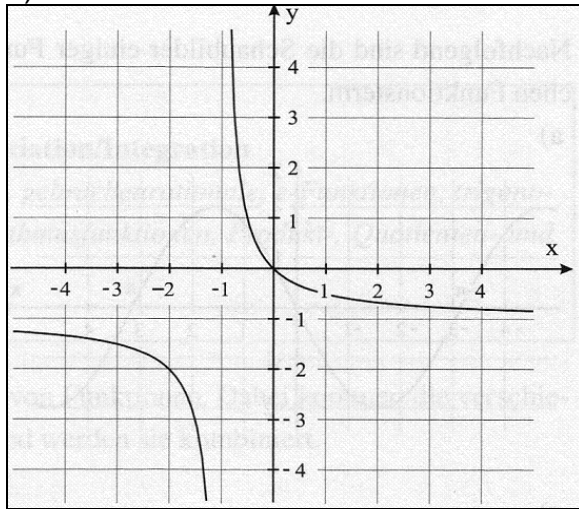
**Aufgabe 2: Aufstellen von Funktionsgleichungen**

- a) Das Schaubild einer gebrochenrationalen Funktion hat eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel (VZW) bei  $x = 1$ , die Gerade mit der Gleichung  $y = 4$  ist die waagrechte Asymptote und der Punkt  $P(2/6)$  liegt auf der Kurve. Bestimme eine mögliche Funktionsgleichung.
- b) Das Schaubild einer gebrochenrationalen Funktion hat eine Polstelle ohne VZW bei  $x = 2$ , die Gerade mit der Gleichung  $y = x+1$  ist die schiefe Asymptote und der Punkt  $Q(3/2)$  liegt auf der Kurve. Bestimme eine mögliche Funktionsgleichung.
- c) Das Schaubild einer gebrochenrationalen Funktion besitzt Polstellen mit VZW bei  $x = 1$  und  $x = -1$ , die Gerade mit der Gleichung  $y = 2x-3$  ist die schiefe Asymptote und der Punkt  $R(2/3)$  liegt auf der Kurve. Bestimme eine mögliche Funktionsgleichung.
- d) Das Schaubild einer gebrochenrationalen Funktion geht durch  $P(0/4)$ , hat einen Pol mit VZW bei  $x = 2$  und die  $x$ -Achse als waagrechte Asymptote. Bestimme eine mögliche Funktionsgleichung.
- e) Das Schaubild einer gebrochenrationalen Funktion geht durch  $P(2/4)$ , hat einen Pol mit VZW bei  $x = -1$  und die Parabel mit der Gleichung  $y = x^2 + 1$  ist die Näherungskurve. Bestimme eine mögliche Funktionsgleichung.
- f) Das Schaubild einer gebrochenrationalen Funktion hat bei  $x = 1$  einen Pol mit VZW und bei  $x = 3$  eine hebbare Lücke. Bestimme eine mögliche Funktionsgleichung.

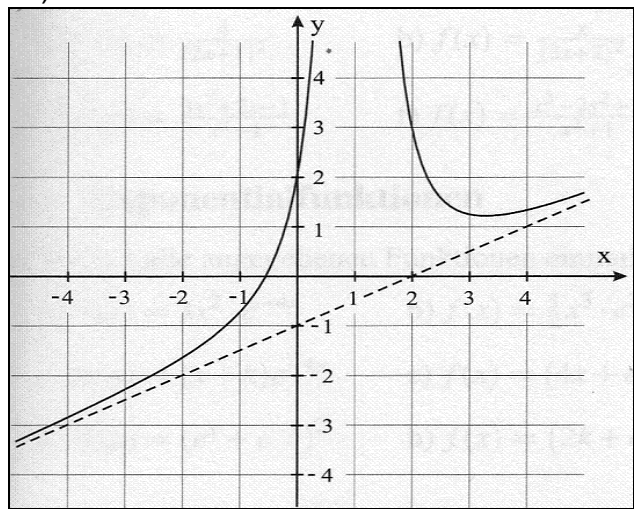
### Aufgabe 3: Aufstellen von Funktionsgleichungen anhand von Schaubildern

Stelle für die folgenden Schaubilder einen möglichen Funktionsterm auf.

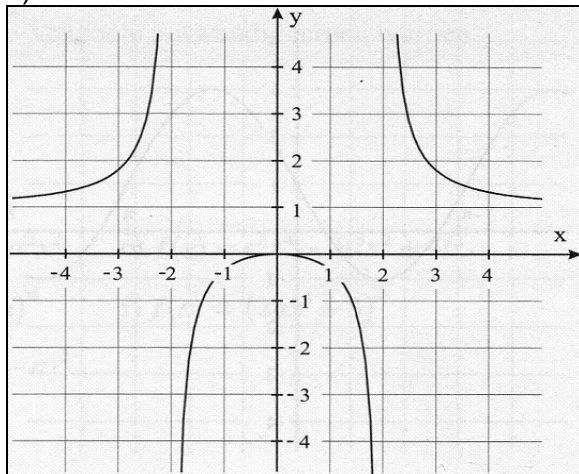
a)



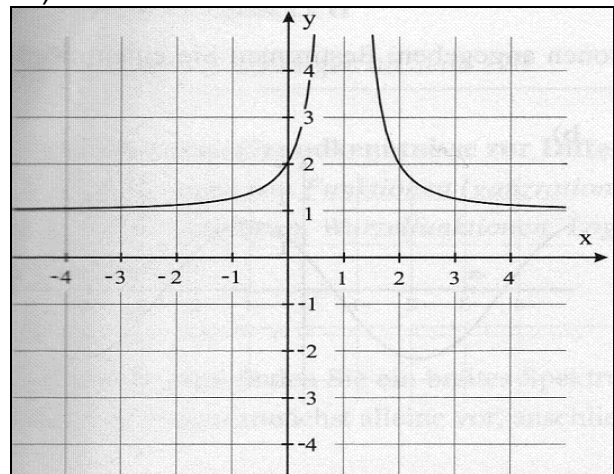
b)



c)



d)



### Aufgabe 4: Ableitungen (Produkt-, Quotienten-, Kettenregel)

Leite alle angegebenen Funktionen einmal ab:

a)  $f(x) = \frac{4}{(3x+1)^2}$

b)  $f_a(x) = \frac{ax}{x^2 + a}$

c)  $f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1}$

d)  $f(x) = \frac{x}{(4x+2)^3}$

e)  $f(x) = \frac{2x}{1 - \sin(x)}$

f)  $f(x) = x^2 \cdot \sin(4x + 3)$

g)  $f(x) = \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^3$

h)  $f(x) = \sqrt{x^3 - x^2}$

i)  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)$

### Aufgabe 5: Definitionsbereiche

Bestimme für folgende Funktionen den maximalen Definitionsbereich:

a)  $f(x) = \frac{3x+5}{x^2-5x+6}$       b)  $f(x) = \frac{4x^2+3}{x^2+1}$       c)  $f(x) = \frac{2x-1}{x^3-3x^2+2}$

### Aufgabe 6: Verständnisfragen

- Was ist eine Definitionslücke ?
- Charakterisiere eine Polstelle. Welche unterschiedlichen Arten von Polstellen gibt es ?
- Beschreibe den Unterschied zwischen einer Polstelle und einer Definitionslücke.
- Was ist eine hebbare Lücke ?
- Wie kommt es zu einer waagrechten Asymptote  $y = 0$  ?

### Aufgabe 7: Stammfunktionen

Gib eine Stammfunktion für alle folgenden Funktionen an.

(Hinweis: Die Teilaufgaben c) und h) können nur dann gelöst werden, wenn bereits die Logarithmusfunktion  $f(x) = \ln(x)$  im Unterricht behandelt wurde).

a)  $f(x) = 6 - \frac{8}{x^3}$       b)  $f(x) = \frac{6}{(2x+3)^3}$       c)  $f(x) = \frac{4}{2x+3}$       d)  $f(x) = 2 \cdot (3x+4)^3$

e)  $f(x) = (x^2+2)^2$       f)  $f(x) = \sin(3x-1)$       g)  $f(x) = \frac{2x^2+4x-1}{3x^4}$       h)  $f(x) = \frac{2x^2+1}{3x^3}$

- i) Bestimme zu  $f(x) = \frac{4}{(2x-1)^3}$  diejenige Stammfunktion, deren Schaubild durch den Punkt  $Q(1/3)$  geht.

### Aufgabe 8: Integrale

- a) Das Schaubild der Funktion  $f(x) = \frac{2}{x}$  über dem Intervall  $[1;2]$  rotiert um die x-Achse.

Berechne das Volumen des Rotationskörpers.

- b) Skizziere die Funktion  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ . Untersuche, ob die nach rechts ins Unendliche reichende Fläche, die von dem Schaubild von  $f$ , der x-Achse und der Geraden  $x = 1$  begrenzt wird, einen endlichen Flächeninhalt besitzt.

### Aufgabe 9: Tangenten und Normalen

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = \frac{3}{x-1}$ .

Bestimme die Gleichung der Tangente und der Normalen an das Schaubild im Kurvenpunkt  $P(2/y)$ .

**Aufgabe 10:**

Untersuche die folgenden Funktionen auf Asymptoten, Näherungskurven und hebbare Lücken.

a)  $f(x) = \frac{3x}{x-1}$

b)  $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 5}{x-3}$

c)  $f(x) = x - 1 + \frac{3}{x}$

d)  $f(x) = \frac{2(x-2)(x-3)}{3(x-2)(x+4)}$

e)  $f(x) = \frac{x^3 + 2x}{x-1}$

f)  $f(x) = \frac{3x+1}{(x-4)(x+1)}$