Analytische Geometrie

Übungsaufgaben
Winkelberechnung - Skalarprodukt

Oberstufe

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

November 2015

Aufgabe 1:

Berechne den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2:
Die Punkte A(-1/0/2), B(2/4/2) und C(-5/3/10) bilden ein Dreieck.
a) Berechne die Länge der Seiten des Dreiecks ABC.
b) Weise nach, dass das Dreieck bei A einen rechten Winkel hat.
c) Bestimme die Größen der Innenwinkel des Dreiecks.
d) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks.

Aufgabe 3:
Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden. Bestimme die Größe des Schnittwinkels.

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4:
Gegeben sind zwei Ebenen. Bestimme die Größe ihres Schnittwinkels.

a) $E_1 : 3x_1 - x_2 + 8x_3 = 4$ und $E_2 : x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0$

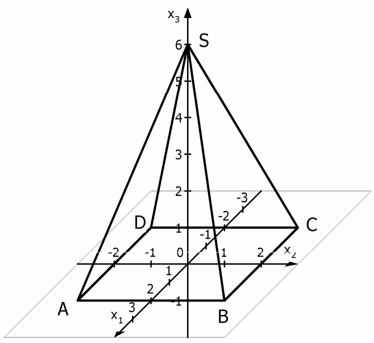
b) $E_1 : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ und $E_2 : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$

Aufgabe 5:

Die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ schneidet die Ebene E: $3x_1 - 6x_2 - x_3 = 20$.

Bestimme die Größe des Schnittwinkels.

Aufgabe 6:
Die Figur zeigt eine quadratische Pyramide mit der Grundseite 4 cm und der Höhe 6 cm.



a) Bestimme die Größe des Winkels, den zwei benachbarte Seitenkanten an der Spitze S haben.

b) Bestimme die Größe des Winkels zwischen der Grundfläche und einer Seitenfläche der Pyramide.

c) Bestimme die Größe des Winkels zwischen der Grundfläche und einer Seitenkante.

Lösungen

Aufgabe 1:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{20+0-6}{\sqrt{16+0+9}\cdot\sqrt{25+196+4}} = \frac{14}{5\cdot 15} \Rightarrow \alpha \approx 79{,}2°$$

Aufgabe 2:

a) Länge der Dreiecksseiten:

$$|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+16+0} = 5 \qquad |\overrightarrow{AC}| = \left|\begin{pmatrix}-4\\3\\8\end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+9+64} = \sqrt{89}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \left|\begin{pmatrix}-7\\-1\\8\end{pmatrix}\right| = \sqrt{49+1+64} = \sqrt{114}$$

b) Das Dreieck ist im Punkt A rechtwinklig, wenn $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$ ist:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\3\\8\end{pmatrix} = -12+12+0 = 0 \text{ womit der rechte Winkel gezeigt ist.}$$

c) Innenwinkel bei A: 90° (siehe Teilaufgabe b)

Innenwinkel bei B: $$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|} = \frac{\begin{pmatrix}-3\\-4\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-7\\-1\\8\end{pmatrix}}{\sqrt{9+16}\cdot\sqrt{49+1+64}} = \frac{21+4}{5\cdot\sqrt{114}} \Rightarrow \beta = 62{,}1°$$

Aufgrund der Winkelsumme ergibt sich für den dritten Winkel:
$\gamma = 180° - 90° - 62{,}1° = 27{,}9°$

d) Flächeninhalt des Dreiecks:

Da das Dreieck bei A rechtwinklig ist, gilt: $A_\Delta = \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC} = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot\sqrt{89} \approx 23{,}6$ FE

Aufgabe 3:

a) $$\cos\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5\\2\\-1\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{1+16+4}\cdot\sqrt{25+4+1}} = \frac{1}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{30}} \Rightarrow \alpha = 87{,}7°$$

b) $$\cos\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\7\\-3\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{4+4+9}\cdot\sqrt{0+49+9}} = \frac{23}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{58}} \Rightarrow \alpha = 42{,}9°$$

Aufgabe 4:

a) $\cos\alpha = \dfrac{\left|\begin{pmatrix}3\\-1\\8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{9+1+64}\cdot\sqrt{1+16+4}} = \dfrac{15}{\sqrt{74}\cdot\sqrt{21}} \Rightarrow \alpha = 67{,}6°$

b) $\cos\alpha = \dfrac{\left|\begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\-5\\4\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{9+4+1}\cdot\sqrt{36+25+16}} = \dfrac{4}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{77}} \Rightarrow \alpha = 83°$

Aufgabe 5:

$$\sin\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix}4\\-2\\7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-6\\-1\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{16+4+49}\cdot\sqrt{9+36+1}} = \frac{12+12-7}{\sqrt{69}\cdot\sqrt{46}} \Rightarrow \alpha = 17{,}6°$$

Aufgabe 6:
Die Pyramide hat die Eckpunkte A(2/-2/0), B(2/2/0), C(-2/2/0), D(-2/-2/0) und S(0/0/6).

a) Hier muss der Schnittwinkel zweier Geraden berechnet werden.

Die Richtungsvektoren der Geraden sind z.B. $\overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix}2\\-2\\6\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\6\end{pmatrix}$.

$$\cos\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix}2\\-2\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\-2\\6\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{4+4+36}\cdot\sqrt{4+4+36}} = \frac{36}{\sqrt{44}\cdot\sqrt{44}} \Rightarrow \alpha = 35{,}1°$$

b) Hier muss der Schnittwinkel zweier Ebenen berechnet werden.
Die Grundfläche ABCD liegt in der x_1x_2 - Ebene mit der Koordinatengleichung $x_3 = 0$.

Der Normalenvektor dieser Ebene ist $\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Als Seitenfläche wird die Fläche BCS gewählt.

Parametergleichung der Ebene durch BCS: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-2\\-2\\6\end{pmatrix}$

Berechnung des Normalenvektors: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ 8 \end{pmatrix}$ bzw. vereinfacht $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schnittwinkel: $\cos\alpha = \dfrac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{0+9+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \alpha = 71{,}6°$

c) Hier muss der Schnittwinkel einer Ebene und einer Geraden berechnen.
Die Grundfläche ABCD liegt in der x_1x_2 - Ebene mit der Koordinatengleichung $x_3 = 0$.

Der Normalenvektor dieser Ebene ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Als Seitenkante wählen wir die Kante CS mit dem Richtungsvektor $\overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Schnittwinkel: $\sin\alpha = \dfrac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{4+4+36}} = \dfrac{6}{\sqrt{44}} \Rightarrow \alpha = 64{,}8°$