

# **Analytische Geometrie**

## **Übungsaufgaben Vektoren**

### **Oberstufe**

Alexander Schwarz

[www.mathe-aufgaben.com](http://www.mathe-aufgaben.com)

Oktober 2015

### Aufgabe 1:

- a) Bestimme für die Punkte  $A(1/2/3)$  und  $B(0/9/-1)$  den Vektor  $\overrightarrow{AB}$  und dessen Gegenvektor.
- b) Bestimme die Koordinaten von B, wenn der Punkt  $A(0/-1/2)$  und der Vektor  $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$  gegeben sind.
- c) Bestimme die Koordinaten von A, wenn der Punkt  $B(2/0/3)$  und der Vektor  $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$  gegeben sind.

### Aufgabe 2:

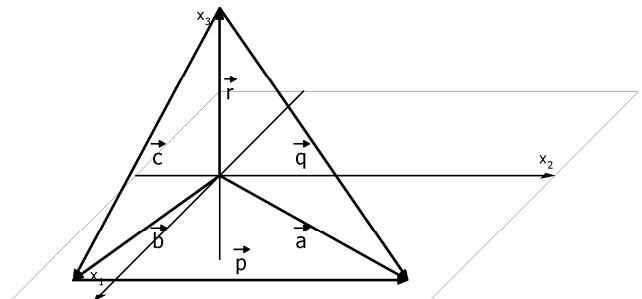
Gegeben sind der Ursprung O des Koordinatensystems, die Punkte  $A(1/1/0)$ ,  $B(2/-2/5)$ ,  $C(1/0/0)$  und  $D(2/4/-3)$  sowie die Vektoren  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$  und  $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ . Berechne folgende Linearkombinationen:

- a)  $2\vec{a} + \vec{b}$       b)  $\frac{1}{2}\vec{c} - 3\vec{a}$       c)  $-\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$

### Aufgabe 3:

Untersuche, welche der Aussagen über die Vektoren wahr bzw. falsch sind:

- a)  $\vec{r} + \vec{q} = \vec{a}$   
 b)  $\vec{p} = -\vec{b} + \vec{r} + \vec{q}$   
 c)  $\vec{a} - \vec{p} - \vec{c} = \vec{r}$   
 d)  $\vec{q} - \vec{p} + \vec{c} = \vec{0}$



### Aufgabe 4:

Berechne die Koordinaten des Punktes Q, der sich ergibt, wenn du den Punkt  $P(1/2/4)$  am Punkt  $A(0/2/-1)$  spiegelst.

### Aufgabe 5:

- a) Berechne die Koordinaten des Ortsvektors des Mittelpunktes der Strecke  $\overline{AB}$  mit  $A(2/2/4)$  und  $B(-4/0/10)$ .
- b)  $M_a(d/e/f)$ ,  $M_b(1,5/2,5/3,5)$  und  $M_c(2/3,5/h)$  seien die Mittelpunkte der Seiten  $a = \overline{BC}$ ,  $b = \overline{AC}$  und  $c = \overline{AB}$  des Dreiecks ABC mit  $A(1/k/4)$ ,  $B(m/n/9)$  und  $C(p/3/i)$ . Berechne die Zahlenwerte d, e, f, h, k, m, n, p, i.

## Lösungen

### Aufgabe 1:

$$a) \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 9-2 \\ -1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad \text{Es sei } B(a/b/c). \text{ Es gilt } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} a-0 \\ b-(-1) \\ c-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt  $a = 3$  und  $b = 2$  und  $c = 5$ . Die Koordinaten von B lauten  $B(3/2/5)$ .

$$c) \quad \text{Es sei } A(a/b/c). \text{ Es gilt } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-a \\ 0-b \\ 3-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt  $a = -1$  und  $b = -3$  und  $c = 0$ . Die Koordinaten von A lauten  $A(-1/-3/0)$ .

### Aufgabe 2:

$$\text{Es gilt } \vec{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ -2-1 \\ 5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \vec{b} = \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ -2-0 \\ 5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \vec{c} = \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 4-0 \\ -3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$a) \quad 2\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 15 \end{pmatrix} \quad b) \quad \frac{1}{2}\vec{c} - 3\vec{a} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 2 \\ -1,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,5 \\ 11 \\ -16,5 \end{pmatrix}$$

$$c) \quad -\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -11 \\ 16 \end{pmatrix}$$

### Aufgabe 3:

Wahr sind die Aussagen a), b) und c)

Die Aussage d) ist falsch. Es gilt  $\vec{q} - \vec{p} - \vec{c} = \vec{0}$ .

### Aufgabe 4:

Um die Koordinaten von Q zu berechnen, bestimmen wir den Ortsvektor von Q.

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Der Punkt Q besitzt die Koordinaten  $Q(-1/2/-6)$ .

**Aufgabe 5:**

$$a) \quad \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2} \cdot \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad \overrightarrow{OM_b} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2,5 \\ 3,5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \left( \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ 3 \\ i \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0,5 + 0,5p \\ 0,5k + 1,5 \\ 2 + 0,5i \end{pmatrix}$$

Daraus folgt  $p = 2$ ,  $k = 2$ ,  $i = 3$ .

$$\overrightarrow{OM_c} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3,5 \\ h \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \\ 9 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0,5 + 0,5m \\ 1 + 0,5n \\ 2 + 4,5 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt  $m = 3$ ,  $n = 5$ ,  $h = 6,5$ .

$$\overrightarrow{OM_a} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \Rightarrow \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt  $d = 2,5$  und  $e = 4$  und  $f = 6$ .