Analytische Geometrie

Übungsaufgaben
Abstand Punkt Ebene

Oberstufe

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

November 2015

Aufgabe 1:
Bestimme den Abstand des Punktes R(4/0/7) von der Ebene $E: 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 1$ E mit Hilfe einer Lotgeraden.

Aufgabe 2:
Wandle die folgenden Gleichungen in eine Hesse'sche Normalenform um:

a) $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 0$ b) E: $x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1$ c) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3:
Eine Ebene E hat den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und geht durch den Punkt P(6/4/-1).

Berechne den Abstand des Ursprungs von der Ebene.

Aufgabe 4:
Gib den Abstand des Punktes P(-3/4/2) von den einzelnen Koordinatenebenen an.

Aufgabe 5:
a) Berechne den Abstand des Punktes A(7/4/9) von der Ebene $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = 0$

b) Berechne den Abstand des Punktes P(2/-3/5) von der Ebene E: $4x_1 - 3x_3 = 10$.

Aufgabe 6:
Weise nach, dass die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ parallel zur Ebene E: $4x_1 + 0,5x_2 - 2x_3 = 2$ ist. Berechne den Abstand der Gerade g von der Ebene E.

Aufgabe 7:
Bestimme den Abstand der parallelen Ebenen E: $2x_1 - 2x_2 + x_3 = -1$ und F: $4x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 10$.

Aufgabe 8:
Bestimme die beiden Ebenen F und G, die von der Ebene E: $6x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 12$ den Abstand d = 6 LE haben.

Lösungen

Aufgabe 1:

Die Lotgerade g steht senkrecht auf E und geht durch den Punkt R.

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt von E mit g: $2(4+2s)+3(0+3s)+6(7+6s)=1$

$$8+4s+9s+42+36s=1 \Rightarrow 49s=-49 \Rightarrow s=-1$$

Einsetzen von s = -1 in die Geradengleichung ergibt Lotfußpunkt F(2/-3/1).

Abstand von R zu E: $\left|\overrightarrow{FR}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+9+36} = 7$

Aufgabe 2:

a) Ansatz Koordinatengleichung von E: $2x_1+6x_2+9x_3=d$
Einsetzen von P(2/3/6) in E: $2\cdot 2+6\cdot 3+9\cdot 6=d \Rightarrow d=76$
Koordinatengleichung von E: $2x_1+6x_2+9x_3=76$
Hesse'sche Normalenform von E: $\dfrac{2x_1+6x_2+9x_3-76}{\sqrt{4+36+81}}=0 \Rightarrow \dfrac{2x_1+6x_2+9x_3-76}{11}=0$

b) Hesse'sche Normalenform von E: $\dfrac{x_1-3x_2+2x_3-1}{\sqrt{1+9+4}}=0 \Rightarrow \dfrac{x_1-3x_2+2x_3-1}{\sqrt{14}}=0$

c) Umwandlung der Parametergleichung in eine Koordinatengleichung:

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$ bzw. vereinfacht $\vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Ansatz Koordinatengleichung von E: $-3x_1+x_2-2x_3=d$
Einsetzen von P(1/5/7) in E: $-3+5-14=d \Rightarrow d=-12$
Koordinatengleichung von E: $-3x_1+x_2-2x_3=-12$
Hesse'sche Normalenform von E: $\dfrac{-3x_1+x_2-2x_3+12}{\sqrt{9+1+4}}=0 \Rightarrow \dfrac{-3x_1+x_2-2x_3+12}{\sqrt{14}}=0$

Aufgabe 3:

Ansatz für die Koordinatengleichung von E: $-0{,}5x_1+x_2-x_3=d$
Einsetzen von P(6/4/-1): $-0{,}5\cdot 6+4-(-1)=d \Rightarrow d=2$
Koordinatengleichung von E: $-0{,}5x_1+x_2-x_3=2$

Hesse'sche Normalenform von E: $\frac{-0,5x_1 + x_2 - x_3 - 2}{\sqrt{0,25+1+1}} = 0 \Rightarrow \frac{-0,5x_1 + x_2 - x_3 - 2}{1,5} = 0$

Abstand von O(0/0/0) zu E: $d = \left|\frac{-0,5 \cdot 0 + 0 - 0 - 2}{1,5}\right| = \frac{4}{3}$

Aufgabe 4:

Der Abstand von P zu den Koordinatenebenen kann man direkt an den Koordinaten von P ablesen:

Abstand von der x_1x_2-Ebene (ablesbar am x_3-Wert von P) = 2
Abstand von der x_1x_3-Ebene (ablesbar am x_2-Wert von P) = 4
Abstand von der x_2x_3-Ebene (ablesbar am x_1-Wert von P) = 3

Aufgabe 5:

a) Ansatz für die Koordinatengleichung von E: $8x_1 + 4x_2 + 8x_3 = d$
Einsetzen von P(1/0/-1): $8 + 0 - 8 = d \Rightarrow d = 0$
Koordinatengleichung von E: $8x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 0$

Hesse'sche Normalenform von E: $\frac{8x_1 + 4x_2 + 8x_3}{\sqrt{64+16+64}} = 0 \Rightarrow \frac{8x_1 + 4x_2 + 8x_3}{12} = 0$

Abstand von A(7/4/9) zu E: $d = \left|\frac{56+16+72}{12}\right| = 12$

b) Hesse'sche Normalenform von E: $\frac{4x_1 - 3x_3 - 10}{\sqrt{16+9}} = 0 \Rightarrow \frac{4x_1 - 3x_3 - 10}{5} = 0$

Abstand von P(2/-3/5) zu E: $d = \left|\frac{8-15-10}{5}\right| = \frac{17}{5}$

Aufgabe 6:

Berechnung des Schnittpunktes von g und E: $4(10+r) + 0,5(-3+4r) - 2(-2+3r) = 2$
$\Rightarrow 40 + 4r - 1,5 + 2r + 4 - 6r = 2 \Rightarrow 42,5 = 2$
Aufgrund des entstehenden Widerspruchs existiert kein Schnittpunkt.
Daher ist g zu E parallel.

Zur Berechnung des Abstandes wird ein Punkt A(10/-3/-2) von g ausgewählt und der Abstand von A zur Ebene E berechnet.

Hesse'sche Normalenform von E: $\frac{4x_1 + 0,5x_2 - 2x_3 - 2}{\sqrt{16+0,25+4}} = 0 \Rightarrow \frac{4x_1 + 0,5x_2 - 2x_3 - 2}{4,5} = 0$

Abstand von A(10/-3/-2) zu E: $d = \left|\frac{40-1,5+4-2}{4,5}\right| = 9$

Die Gerade g hat von der Ebene E den Abstand 9.

Aufgabe 7:

Die Ebenen sind parallel, da die Normalenvektoren der Ebenen E und F Vielfache zueinander sind.

Wir wählen einen beliebigen Punkt der Ebene F, z.B. A(0/0/5).

Der Abstand der beiden parallelen Ebenen entspricht dem Abstand des Punktes A von der Ebene E.

Hesse'sche Normalenform von E: $\frac{2x_1 - 2x_2 + x_3 + 1}{\sqrt{4+4+1}} = 0 \Rightarrow \frac{2x_1 - 2x_2 + x_3 + 1}{3} = 0$

Abstand von A(0/0/5) zu E: $d = \left| \frac{0 - 0 + 5 + 1}{3} \right| = 2$

Der Abstand der beiden Ebenen beträgt 2.

Aufgabe 8:

Hesse'sche Normalenform von E: $\frac{6x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 12}{\sqrt{36+9+4}} = 0 \Rightarrow \frac{6x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 12}{7} = 0$

Gleichung der Ebene F: $\frac{6x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 12}{7} = 6 \Rightarrow 6x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 54$

Gleichung der Ebene G: $\frac{6x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 12}{7} = -6 \Rightarrow 6x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -30$