Stochastik

Klausur zu
Pfadregeln, bedingte Wahrscheinlichkeit,
Erwartungswert einer Zufallsvariablen
Vierfeldertafel

berufliche Gymnasien
Oberstufe

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Oktober 2015

Aufgabe 1:
Eine Schulklasse entwickelt und programmiert im Informatikunterricht ein Computerspiel. Das Ziel des Spiels besteht darin, mit einer Spielfigur einen Parcours mit vier Hindernissen zu durchlaufen. Man darf den Parcours nur dann fortsetzen, wenn die Spielfigur das jeweilige Hindernis überquert. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Spielfigur ein Hindernis überquert, beträgt 50%.

Die Schüler setzen folgende Regeln fest:
- Der Einsatz für einen Versuch, den Parcours zu bewältigen, beträgt 50 Cent.
- Überquert die Spielfigur alle vier Hindernisse, so werden 2 € als Hauptgewinn ausbezahlt.
- Die übrigen Auszahlungsbeträge sind folgendermaßen festgelegt:

Die Spielfigur scheitert am	Auszahlung
1. Hindernis	0 Cent
2. Hindernis	10 Cent
3. Hindernis	20 Cent
4. Hindernis	60 Cent

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, nach dem Überqueren des zweiten Hindernisses auch das vierte Hindernis zu bewältigen ?
b) Untersuche, ob die Schulklasse auf lange Sicht Gewinn macht.
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei fünf Versuchen mindestens zweimal der Hauptgewinn ausgezahlt wird ?

Aufgabe 2:
An einer Schule findet alljährlich im Frühjahr eine Fahrradkontrolle statt. Erfahrungsgemäß verfügen 80% der Fahrräder über eine funktionierende Beleuchtung und 85% der Fahrräder über funktionierende Bremsen.
Bei 70% aller Fahrräder funktionieren sowohl Beleuchtung als auch Bremsen, alle anderen Fahrräder werden als mangelhaft eingestuft.
Die diesjährige Kontrolle steht bevor.

a) Von der ersten Stunde werden fünf Fahrräder kontrolliert.
Berechne für jedes der folgenden Ergebnisse die Wahrscheinlichkeit:

A: Alle fünf Fahrräder haben eine funktionierende Beleuchtung.
B: Genau drei Fahrräder haben eine funktionierende Beleuchtung.
C: Mindestens zwei Fahrräder sind mangelhaft.

b) Wie viele Fahrräder müssen mindestens kontrolliert werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90% mindestens ein mangelhaftes Fahrrad zu finden ?

c) Zeige, dass die Funktionsfähigkeit der Beleuchtung und die Funktionsfähigkeit der Bremsen stochastisch unabhängig sind.

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Fahrrad weder Bremsen noch Beleuchtung funktionieren.

Aufgabe 3:

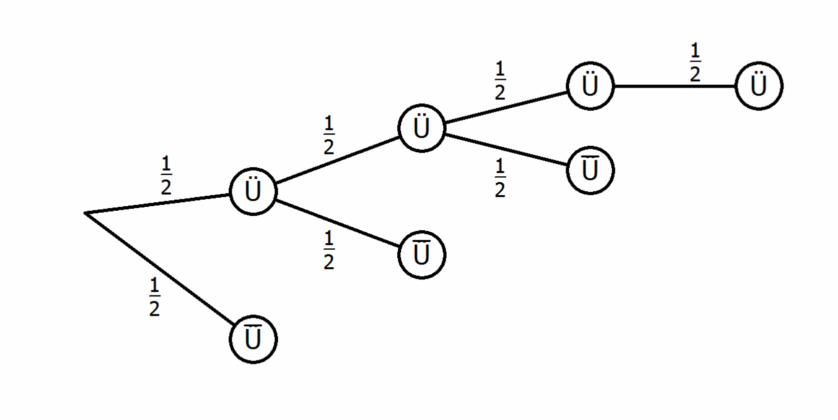
In einer Schachtel liegen 2 gelbe, 4 blaue und 5 rote Kugeln.
Die Kugeln unterscheiden sich nur in ihrer Farbe.
Es werden 2 Kugeln wie folgt nacheinander gezogen:
Wird im ersten Zug eine rote Kugel gezogen, so wird diese in die Schachtel zurückgelegt.
Kugeln mit anderen Farben werden nicht zurückgelegt.

a) Zeichne dazu ein Baumdiagramm mit den dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten.
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit
   - dass die zweite gezogene Kugel gelb ist ?
   - dass beim zweiten Zug eine blaue Kugel gezogen wird, falls beim ersten Zug keine blaue Kugel gezogen wurde ?

Lösungen

Aufgabe 1:

a) Zunächst wird ein Baumdiagramm gezeichnet:



Es handelt sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit:
A: zweites Hindernis wird überwunden
B: viertes Hindernis wird überwunden

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(ÜÜÜÜ)}{P(ÜÜ)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 0,25$$

b) Die Zufallsvariable X sei die Auszahlung in € an den Spieler pro Spiel.

$P(X=0)=0,5$ $\quad P(X=0,10)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

$P(X=0,20)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$ $\quad P(X=0,60)=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$ $\quad P(X=2)=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

Es ist $E(X)=0\cdot 0,5+0,10\cdot\frac{1}{4}+0,20\cdot\frac{1}{8}+0,60\cdot\frac{1}{16}+2\cdot\frac{1}{16}=0,2125$

Die Klasse muss durchschnittlich 21,25 Cent pro Spiel auszahlen, nimmt aber pro Spiel 50 Cent als Einsatz ein.
Somit macht die Klasse durchschnittlich pro Spiel 28,75 Cent Gewinn.

c) Es gilt: P(Hauptgewinn wird ausgezahlt) = P(ÜÜÜÜ) = $\frac{1}{16}$

und P(kein Hauptgewinn wird ausgezahlt) = $1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit für mindestens zwei Hauptgewinne wird mit Hilfe des Gegenereignisses berechnet, da dann weniger zu berechnen ist.

P(mindestens zwei Hauptgewinne) =
1 - P(kein Hauptgewinn) - P(genau ein Hauptgewinn)

P(kein Hauptgewinn) = $\left(\frac{15}{16}\right)^5 \approx 0{,}7242$

P(genau ein Hauptgewinn) = $\frac{1}{16} \cdot \left(\frac{15}{16}\right)^4 \cdot 5 \approx 0{,}241$

P(mindestens zwei Hauptgewinne) = $1 - 0{,}7242 - 0{,}241 = 0{,}0348$

Aufgabe 2:

Anhand der Angaben wird zunächst eine Vierfeldertafel aufgestellt:

	Bremse ok	Bremse mangelh.	Summe
Beleuchtung ok	70%	10%	80%
Beleuchtung mangelh.	15%	5%	20%
Summe	85%	15%	100%

a) $P(A) = 0{,}8^5 = 0{,}32768$

$P(B) = 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 \cdot \binom{5}{3} = 0{,}2048$

$P(C) =$ 1 - P(kein Fahrrad mangelhaft) - P(genau ein Fahrrad mangelhaft)

$= 1 - 0{,}7^5 - 0{,}7^4 \cdot 0{,}3 \cdot 5 = 0{,}47178$

b) Es werden n Fahrräder kontrolliert.

Es soll gelten:
P(mindestens ein mangelhaftes Fahrrad) > 0,99

$\Rightarrow 1 - P($ kein mangelhaftes Fahrrad$) > 0{,}99$

$\Rightarrow 1 - 0{,}7^n > 0{,}99 \quad \Rightarrow 0{,}7^n < 0{,}01 \quad \Rightarrow n \cdot \ln(0{,}7) < \ln(0{,}01) \quad \Rightarrow n > \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}7)} \approx 12{,}9$

Es müssen mindestens 13 Fahrräder kontrolliert werden.

c) Die Funktionsfähigkeit der Beleuchtung und der Bremse sind stochastisch abhängig, wenn gilt:

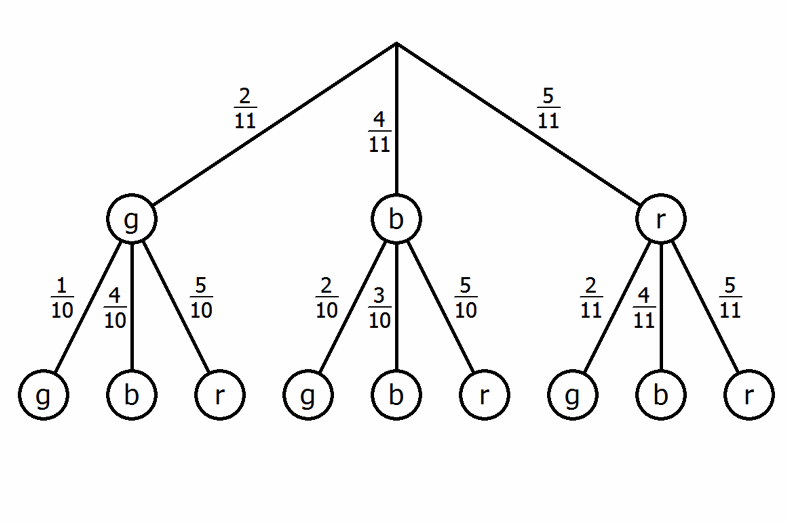
P(Bremse ok $\cap$ Beleuchtung ok) $\neq$ P(Bremse ok) $\cdot$ P(Beleuchtung ok)

Kontrolle: $0{,}7 \neq 0{,}85 \cdot 0{,}80$
Damit ist die stochastische Abhängigkeit nachgewiesen.

P(Bremse mangelh $\cap$ Beleuchtung mangelh) $= 0{,}05$ (siehe Vierfeldertafel)

Aufgabe 3:

a)



b) P(zweite Kugel ist gelb) = P(gg) + P(bg) + P(rb) = $\frac{2}{11}\cdot\frac{1}{10}+\frac{4}{11}\cdot\frac{2}{10}+\frac{5}{11}\cdot\frac{2}{11}=\frac{951}{6050}$

Es sei A: "zweite Kugel ist blau" und B: "erste Kugel ist nicht blau"

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(gb,rb)}{7/11}=\frac{\frac{2}{11}\cdot\frac{4}{10}+\frac{5}{11}\cdot\frac{4}{11}}{7/11}=\frac{144}{385}$$