Analysis

Übungsaufgaben zu Exponentialfunktionen
Pflicht- und Wahlteil
gesamtes Stoffgebiet (insbesondere Funktionsscharen)
ohne Wachstum

Gymnasium ab J1

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Februar 2014

Pflichtteil: (ohne GTR und ohne Formelsammlung)

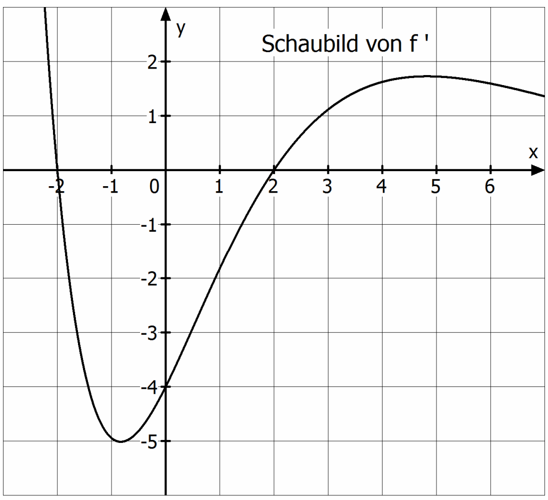
P1:
Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung:
a) $e^{4x} - 4e^{2x} + 3 = 0$ b) $e^{x+1} + e^{x} = 1$

P2:
Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = e^{x}$, $x \in \mathbb{R}$ wird um zwei Einheiten in x-Richtung nach rechts verschoben, anschließend an der x-Achse gespiegelt und dann in y-Richtung um 3 Einheiten nach oben verschoben.
Skizziere das letzte Schaubild und gib einen Funktionsterm dazu an.

P3:
Berechne die erste Ableitungsfunktion:
a) $f(x) = x \cdot e^{2x} + \frac{1}{x}$ b) $f(x) = e^{2x} \cdot \ln x$

P4:
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2 + e^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$
a) Wie lautet die Gleichung der Asymptote des Schaubildes ?
b) Berechne den Inhalt der nach rechts offenen Fläche, die durch das Schaubild von f , der y-Achse und der Asymptote im 1.Feld begrenzt wird.

P5:
Von einer Funktion f ist der Graph seiner Ableitungsfunktion f' gegeben.



Untersuche die folgenden Aussagen auf ihre Richtigkeit.

a) Der Graph von f hat an der Stelle x = -2 einen Hochpunkt.
b) Der Graph von f hat an der Stelle x = 2 einen Tiefpunkt.
c) Für x > 2 gilt f(x) > 0.
d) Für x > 2 steigt f streng monoton.
e) Der Graph von f hat genau zwei Schnittpunkte mit der x-Achse.
f) Der Graph von f hat genau zwei Wendestellen.

Wahlteil: (mit GTR und Formelsammlung)

W1:
Für jedes t > 0 ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = e - e^{tx}$; $x \in \mathbb{R}$
das Schaubild sei K_t.
Bestimme die Gleichungen der Tangente und der Normalen von K_t im Schnittpunkt von K_t mit der y-Achse.
Zeichne mit dem GTR K_1 sowie Tangente und Normale.
Die Tangente und die Normale im Schnittpunkt von K_t mit der y-Achse schneiden aus der x-Achse eine Strecke aus. Für welches t wird diese Strecke extremal ?
Wie groß ist dieser Extremwert ?

W2:
Gegeben ist eine Funktionsschar durch $f_t(x) = e^x \cdot \left(e^x - t\right)$ mit t > 0 und $x \in \mathbb{R}$

a) Auf welcher Kurve liegen alle Extrempunkte ?
b) Auf welcher Kurve liegen alle Wendepunkte ?
c) Untersuche die Schaubilder verschiedener Funktionen auf gemeinsame Punkte.
d) Zeige, dass $F_t(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^x - t\right)^2$ eine Stammfunktion ist.
   Wie groß ist der Flächeninhalt A_t der Fläche, die im 4.Quadranten von den Koordinatenachsen und dem Schaubild von f_t für t > 1 eingeschlossen wird ?

W3:

a) Zu jedem $t \in \mathbb{R}$ ist eine Funktion f_t gegeben mit der Gleichung
$$f_t(x) = 10 \cdot (x - t) \cdot e^{-x}, \; x \in \mathbb{R}$$
   Das zugehörige Schaubild ist die Kurve K_t.
   Skizziere für zwei selbst gewählte Werte die Schaubilder K_t in einem Koordinatensystem und stelle einige gemeinsame Eigenschaften dieser Kurven zusammen.

b) Die Kurven K_{t+1} und K_t bestimmen zusammen mit der y-Achse eine nach rechts unbeschränkte Fläche. Zeige, dass der Inhalt dieser Fläche endlich ist und nicht von t abhängt.

c) Jede Kurve K_t besitzt als einzige Extrempunkt einen Hochpunkt H_t.
   Berechne seine Koordinaten.
   Auf welcher Kurve liegen die Hochpunkte aller Kurven K_t ?
   Für welche Werte von t schneidet die Kurve K_t die Gerade y = 2 ?

W4:

Gegeben ist die Funktion $f(x)=(x+1)\cdot e^{1-x}$ mit $x\in\mathbb{R}$
Ihr Schaubild sei die Kurve K.

a) Untersuche K auf Asymptoten. Bestimme exakt die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sowie die Extrem- und Wendepunkte.
Zeichne K für $-1{,}5\le x\le 5$.

b) Zeige, dass die Funktion $F(x)=-(x+2)\cdot e^{1-x}$ eine Stammfunktion zur Funktion f ist.
Die Kurve K und die Normale im Wendepunkt schließen eine Fläche ein.
Berechne exakt deren Inhalt A_1. Die Kurve K und die x-Achse beranden eine ins Unendliche reichende Fläche. Berechne deren Inhalt A_2

c) Gegeben ist die Funktion $g(x)=e^{1-x}$. Ihr Schaubild sei die Kurve C.
Die Kurven K und C schneiden aus der Geraden mit der Gleichung x = u (u > 0) eine Sehne aus. Berechne u so, dass die Länge der Sehne maximal wird.

Lösungen

P1:

a) $e^{4x} - 4e^{2x} + 3 = 0$

Substitution: $u = e^{2x}$

$u^2 - 4u + 3 = 0 \quad \Rightarrow u_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3}}{2} = \dfrac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow u_1 = 3$ und $u_2 = 1$

Rücksubstitution: $e^{2x} = 3 \Leftrightarrow 2x = \ln(3) \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln(3)}{2}$

$e^{2x} = 1 \Leftrightarrow 2x = \ln(1) \Leftrightarrow x = 0$

$L = \{ 0 ; \dfrac{\ln(3)}{2} \}$

b) $e^{x+1} + e^x = 1 \quad \Leftrightarrow e^x \cdot e + e^x = 1 \quad \Leftrightarrow e^x \cdot (e+1) = 1 \quad \Leftrightarrow e^x = \dfrac{1}{1+e} \quad \Leftrightarrow x = \ln \dfrac{1}{1+e}$

$L = \{ \ln \dfrac{1}{1+e} \}$

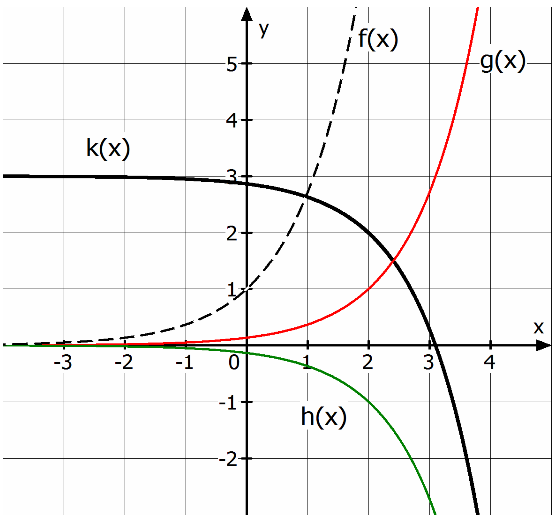
P2:

Ausgangsfunktion: $f(x) = e^x$

Verschiebung um 2 nach rechts: $g(x) = e^{x-2}$

Spiegelung an der x-Achse: $h(x) = -e^{x-2}$

Verschiebung um 3 nach oben: $k(x) = -e^{x-2} + 3$



P3:

a) $f(x) = x \cdot e^{2x} + x^{-1} \qquad \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot e^{2x} + x \cdot e^{2x} - x^{-2}$ (Produkt- und Kettenregel)

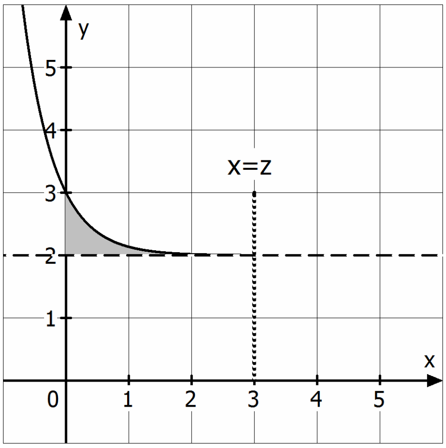
b) $f(x) = e^{2x} \cdot \ln x \quad \Rightarrow f'(x) = 2e^{2x} \cdot \ln(x) + e^{2x} \cdot \dfrac{1}{x} = e^{2x}(2\ln(x) + \dfrac{1}{x})$

(Produkt- und Kettenregel)

P4:

a) Für $x \to \infty$ strebt $e^{-2x} \to 0$; folglich strebt $f(x) \to 2$
Die waagrechte Asymptote ist y = 2 für $x \to \infty$ -

b) Skizze des Schaubildes und der gesuchten Fläche:



$$A(z) = \int_0^z (f(x) - 2)dx = \int_0^z (2 + e^{-2x} - 2)dx = \int_0^z e^{-2x}dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} \right]_0^z = -\frac{1}{2}e^{-2z} + \frac{1}{2}$$

Für $z \to \infty$ strebt $A(z) \to \frac{1}{2}$.

Die gesuchte Fläche hat den Inhalt 0,5.

P5:

a) Die Aussage ist richtig. An der Stelle x = -2 besitzt die Ableitungsfunktion eine Nullstelle mit einem Vorzeichenwechsel von + nach - , also Hochpunkt von f.

b) Die Aussage ist richtig. An der Stelle x = 2 besitzt die Ableitungsfunktion eine Nullstelle mit einem Vorzeichenwechsel von – nach + , also Tiefpunkt von f.

c) Diese Aussage kann richtig oder falsch sein. Da es unendlich viele Stammfunktionen f(x) gibt, ist diese Aussage unentscheidbar.

d) Für x > 2 gilt $f'(x) > 0$ und daraus folgt, dass f für x > 2 streng monoton wächst. Die Aussage ist richtig.

e) Diese Aussage kann richtig oder falsch sein. Da es unendlich viele Stammfunktionen f(x) gibt, ist diese Aussage unentscheidbar.

f) Diese Aussage ist richtig, da das Schaubild der Ableitungsfunktion zwei Extremstellen besitzt. Diese Extremstellen von $f'(x)$ sind die Wendestellen des Schaubildes von f(x).

W1:

Schnittpunkt mit der y-Achse: $f_t(0) = e - e^0 = e - 1$, also $S_y(0 / e - 1)$.

Es gilt $f_t'(x) = -t \cdot e^{tx}$.

Allgemeine Tangentengleichung: $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$

Die Berührstelle der Tangente ist u = 0: $y = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0)$

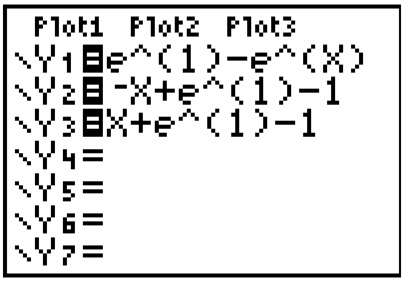
Es ist $f_t'(0) = -t$

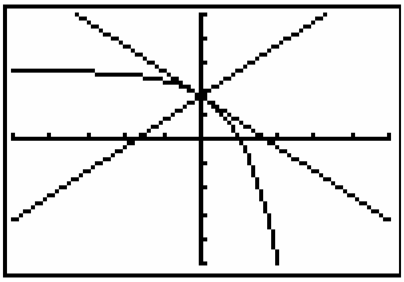
Die Tangentengleichung lautet $y = -t \cdot (x - 0) + e - 1 \Rightarrow y = -tx + e - 1$

Allgemeine Normalengleichung an der Stelle u = 0: $y = -\frac{1}{f'(0)} \cdot (x - 0) + f(0)$

Die Normalengleichung lautet $y = -\frac{1}{-t} \cdot (x - 0) + e - 1 \Rightarrow y = \frac{1}{t} x + e - 1$

GTR:





Für die Berechnung der Strecke der x-Achse werden die Schnittstellen der Tangente und der Normale mit der x-Achse benötigt.

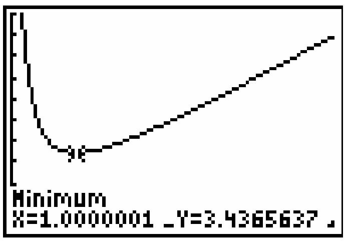
Schnittstelle der Tangente mit der x-Achse: $-tx + e - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{e-1}{t}$

Schnittstelle der Normale mit der x-Achse: $\frac{1}{t} \cdot x + e - 1 = 0 \Rightarrow x = t \cdot (1 - e)$

Strecke auf der x-Achse = rechte Schnittstelle – linke Schnittstelle:

$s(t) = \frac{e-1}{t} - t \cdot (1 - e)$

Gesucht ist der Extremwert von s(t) für t > 0.
Bestimmung mit dem GTR:



Die Streckenfunktion s(t) wird minimal für t =1 und die minimale Strecke hat eine Länge von 3,44 LE.

W2:
$f_t(x) = e^x \cdot \left(e^x - t\right) = e^{2x} - t \cdot e^x$

Ableitungen: $f_t'(x) = 2e^{2x} - t \cdot e^x$ und $f_t''(x) = 4e^{2x} - t \cdot e^x$ und $f_t'''(x) = 8e^{2x} - t \cdot e^x$

a) Extrempunkte: Hinreichende Bedingung $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$f_t'(x) = 0 \Rightarrow 2e^{2x} - te^x = 0 \Rightarrow e^x(2e^x - t) = 0$ Lösung mit Satz vom Nullprodukt:

1) $e^x = 0$ ist nicht lösbar

2) $2e^x = t \Rightarrow x = \ln\frac{t}{2}$

$f_t''(\ln\frac{t}{2}) = 4e^{2\cdot\ln\frac{t}{2}} - t \cdot e^{\ln\frac{t}{2}} = 4e^{\ln\frac{t^2}{4}} - t \cdot \frac{t}{2} = 4 \cdot \frac{t^2}{4} - \frac{t^2}{2} = \frac{t^2}{2} > 0$ also relatives Minimum

Es ist $f_t(\ln\frac{t}{2}) = \frac{t}{2}(\frac{t}{2} - t) = -\frac{t^2}{4}$; Tiefpunkt $T(\ln\frac{t}{2} / -\frac{t^2}{4})$

Kurve, auf der alle Tiefpunkte liegen (=Ortskurve der Tiefpunkte):

$x = \ln\frac{t}{2} \Rightarrow e^x = \frac{t}{2} \Rightarrow t = 2e^x$

$y = -\frac{t^2}{4} \Rightarrow y = -\frac{(2e^x)^2}{4} = -e^{2x}$ ist die Ortskurve der Extrempunkte.

b) Wendepunkte: Hinreichende Bedingung $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

$f_t''(x) = 0 \Rightarrow e^x(4e^x - t) = 0$ Lösung mit Satz vom Nullprodukt

1) $e^x = 0$ ist nicht lösbar

2) $4e^x = t \Rightarrow x = \ln\frac{t}{4}$

$f_t'''(\ln\frac{t}{4}) = 8e^{2\cdot\ln\frac{t}{4}} - t \cdot e^{\ln\frac{t}{4}} = 8e^{\ln\frac{t^2}{16}} - t \cdot \frac{t}{4} = 8 \cdot \frac{t^2}{16} - \frac{t^2}{4} = \frac{t^2}{4} \neq 0$, also Wendestelle

$f_t(\ln\frac{t}{4}) = \frac{t}{4}(\frac{t}{4} - t) = -\frac{3}{16}t^2$; Wendepunkt $W(\ln\frac{t}{4} / -\frac{3}{16}t^2)$

Kurve, auf der alle Wendepunkte liegen (=Ortskurve der Wendepunkte):

$x = \ln\frac{t}{4} \Rightarrow e^x = \frac{t}{4} \Rightarrow t = 4e^x$

$y = -\frac{3}{16}t^2 \Rightarrow y = -\frac{3}{16} \cdot 16e^{2x} = -3 \cdot e^{2x}$ Ortskurve der Wendepunkte.

c) Schnittpunkt zweier Scharkurven: $f_t(x) = f_{t^*}(x)$ mit $t \neq t^*$:

$e^x(e^x - t) = e^x(e^x - t^*) \Rightarrow e^x(e^x - t - e^x + t^*) = 0 \Rightarrow e^x(t^* - t) = 0$

Da sowohl $e^x \neq 0$ als auch $t^* - t \neq 0$ ist, ist die Gleichung nicht lösbar.
Somit besitzen zwei verschiedene Scharkurven keine gemeinsamen Punkte.

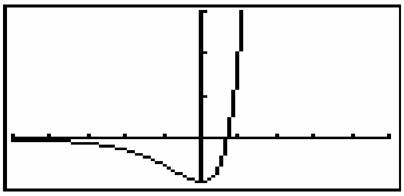
d) Es gilt $F_t'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2(e^x - t) \cdot e^x = (e^x - t) \cdot e^x = f_t(x)$.

Damit ist F_t eine Stammfunktion von f_t.

Schnittpunkt von f_t mit der x-Achse: $e^x(e^x - t) = 0 \Rightarrow x = \ln(t)$

Um das Integral richtig aufzustellen, sollte man das Schaubild von f_t für einen konkreten Parameterwert veranschaulichen:

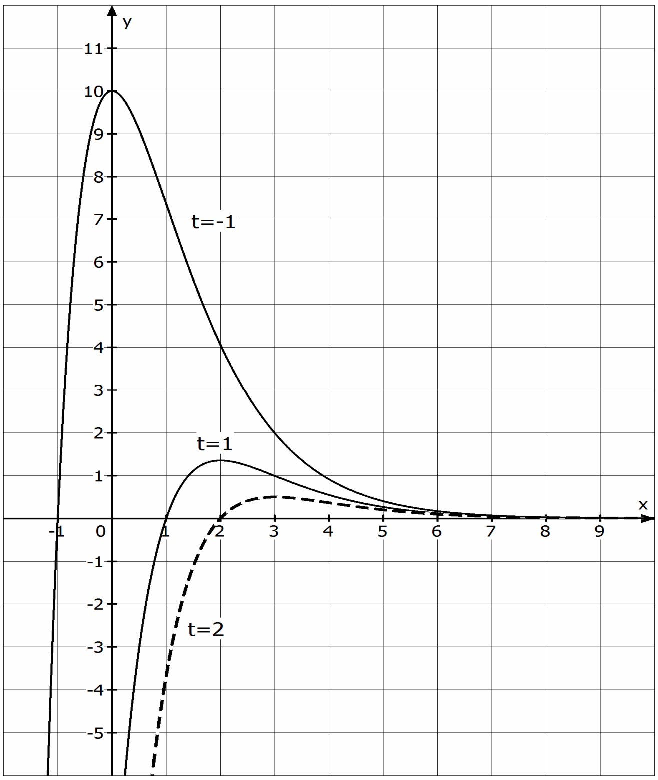
GTR-Schaubild für t = 2:



$$A_t = \int_0^{\ln t} -f_t(x)dx = [-F_t(x)]_0^{\ln t} = \left[-\frac{1}{2}(e^x - t)^2\right]_0^{\ln t} = -\frac{1}{2}(t-t)^2 + \frac{1}{2}(1-t)^2 = \frac{1}{2}(1-t)^2$$

W3:

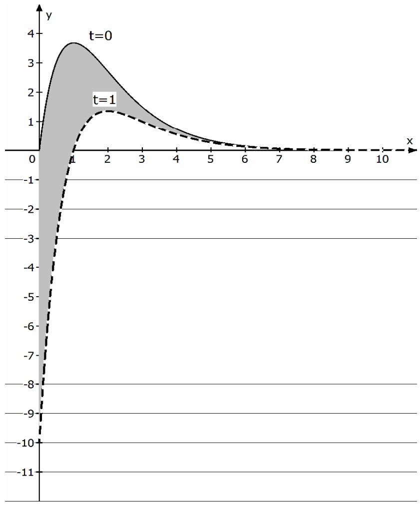
a) Skizze für t = 1 und t = 2 und t = -1:



gemeinsame Eigenschaften der Kurven:

- Jedes Schaubild besitzt genau einen Hochpunkt
- Jedes Schaubild besitzt genau einen Wendepunkt
- Jedes Schaubild besitzt die waagrechte Asymptote y = 0 für $x \to \infty$

b) Skizze der gesuchten Fläche am Beispiel K_0 und K_1



$$A(z) = \int_0^z (f_t(x) - f_{t+1}(x))dx = \int_0^z (10(x-t)e^{-x} - 10(x-(t+1))e^{-x})dx$$
$$= \int_0^z (10xe^{-x} - 10te^{-x} - 10xe^{-x} + 10te^{-x} + 10e^{-x})dx = \int_0^z 10e^{-x}dx = \left[-10e^{-x}\right]_0^z$$
$$= -10e^{-z} + 10$$

Für $z \to \infty$ strebt $A(z) \to 10$

Damit ist gezeigt, dass der Flächeninhalt unabhängig von t und endlich ist.

c) Bedingung für einen Hochpunkt: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

Es gilt $f_t'(x) = 10e^{-x} + 10(x-t)\cdot(-e^{-x}) = 10e^{-x}(1-x+t)$

$f_t'(x) = 0 \Rightarrow 10e^{-x}(1-x+t) = 0$

Mit dem Satz vom Nullprodukt folgt $1-x+t = 0 \Leftrightarrow x = 1+t$

Da in der Aufgabenstellung bereits beschrieben ist, dass jedes Schaubild genau einen Hochpunkt besitzt, muss der Nachweis mit der 2.Ableitung nicht mehr geführt werden.

Koordinaten des Hochpunktes:

$f_t(1+t) = 10(1+t-t)e^{-(1+t)} = 10e^{-1-t}$ also $H(1+t\,/\,10e^{-1-t})$

Ortskurve der Hochpunkte:

$x = 1+t \quad \Rightarrow t = x-1$

$y = 10e^{-1-t} \Rightarrow y = 10e^{-1-(x-1)} \Rightarrow y = 10e^{-x}$ ist die gesuchte Ortskurve

Das Schaubild K_t schneidet die Gerade y = 2, wenn der Hochpunkt einen y-Wert besitzt, der ≥ 2 ist.

$10e^{-1-t} \geq 2 \quad \Leftrightarrow e^{-1-t} \geq 0,2 \quad \Leftrightarrow -1-t \geq \ln(0,2) \quad \Leftrightarrow t \leq -1-\ln(0,2) \quad \Leftrightarrow t \leq 0,609$

W4:

a) Waagerechte Asymptote:
Für $x \to \infty$ strebt $f(x) \to 0$, damit ist y = 0 die waagrechte Asymptote.

Schnittpunkt mit x-Achse: $f(x) = 0$
$(x+1) \cdot e^{1-x} = 0 \Rightarrow x = -1$, also N(-1/0)

Schnittpunkt mit y-Achse: $f(0) = e$, also S(0/e)

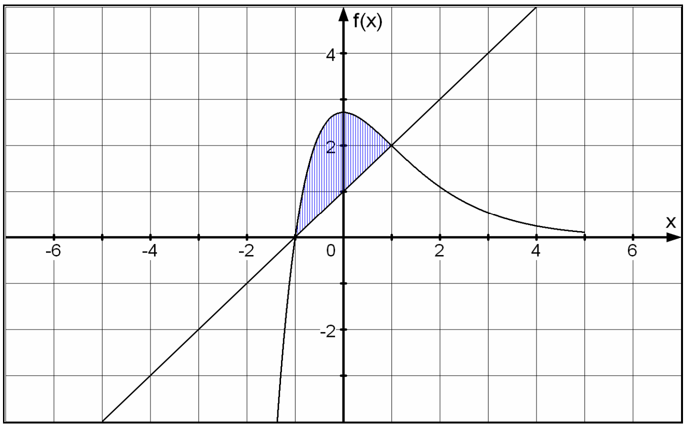
Ableitungen: $f'(x) = 1 \cdot e^{1-x} + (x+1) \cdot e^{1-x} \cdot (-1) = e^{1-x}(1-x-1) = -x \cdot e^{1-x}$
$f''(x) = -1 \cdot e^{1-x} - x \cdot e^{1-x} \cdot (-1) = e^{1-x}(-1+x)$

Extrempunkte: $f'(x) = 0 \Rightarrow -x \cdot e^{1-x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Satz vom Nullprodukt)
$f''(0) < 0 \Rightarrow H(0/e)$

Wendepunkte: $f''(x) = 0 \Rightarrow e^{1-x}(-1+x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (Satz vom Nullprodukt)(

Hinreichende Bedingung mit VZW: $f''(0{,}9) < 0$ und $f''(1{,}1) > 0$
Beim Durchgang durch x = 1 existiert bei $f''(x)$ ein Vorzeichenwechsel.
Damit existiert bei x = 1 eine Wendestelle.
Wendepunkt W(1/2).

Schaubild:



b) $F(x) = -(x+2) \cdot e^{1-x}$
Nachweis der Stammfunktion erfolgt mit Hilfe der Ableitung:
$F'(x) = -1 \cdot e^{1-x} - (x+2) \cdot e^{1-x} \cdot (-1) = e^{1-x}(-1+x+2) = f(x)$ und somit ist F(x) die Stammfunktion.

Für die Berechnung der Fläche A_1 wird die Gleichung der Normalen im Wendepunkt benötigt:

Allgemeine Normalengleichung an der Stelle u = 1: $y = -\frac{1}{f'(1)}(x-1) + f(1)$

Es gilt: $f'(1) = -1$ und f(1) = 2.

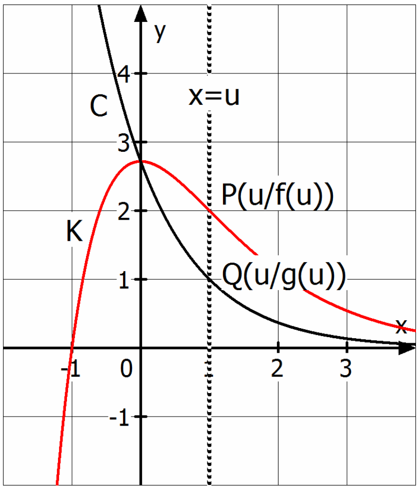
Normalengleichung: $y = -\frac{1}{-1}(x-1)+2 \quad \Rightarrow y = x+1$

$$A_1 = \int_{-1}^{1} [(x+1)\cdot e^{1-x} - (x+1)]dx = \left[-(x+2)\cdot e^{1-x} - \frac{1}{2}x^2 - x\right]_{-1}^{1}$$
$$= -3 - 0,5 - 1 - (-e^2 - 0,5 + 1) = e^2 - 5$$

$$A_2(z) = \int_{-1}^{z} (x+1)e^{1-x}dx = \left[-(x+2)e^{1-x}\right]_{-1}^{z} = -(z+2)e^{1-z} + 1e^2$$

Für $z \to \infty$ strebt $A_2(z) \to e^2 = A_2$

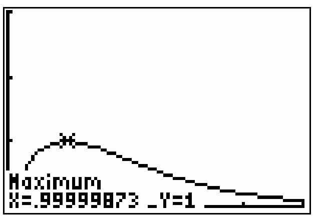
c)



Berechnung der Sehnenlänge d(u):
$d(u) = f(u) - g(u) = (u+1)\cdot e^{1-u} - e^{1-u} = u \cdot e^{1-u}$ mit $0 < u < \infty$.

Gesucht ist das Maximum von d(u):

Lösung mit dem GTR:



d(u) hat ein lokales Maximum für u = 1 mit d(1) = 1.

Untersuchung der Randwerte:
Es ist d(0) = 0
Für $u \to \infty$ strebt $d(u) \to 0$
Da die Randwerte keine höheren Werte als das lokale Maximum liefern, ist bei u = 1 mit d(1) = 1 auch das absolute Maximum.