Analytische Geometrie

Übungsaufgaben
Betrag von Vektoren

Oberstufe

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

November 2015

Aufgabe 1:

a) Berechne den Abstand der Punkte A(3/-2/5) und B(2/2/3).

b) Berechne den Abstand der Punkte $A(\sqrt{2}\,/\,1\,/\,-0{,}4)$ und B(0/0,5/0,1).

c) Berechne den Wert von a so, dass die Punkte A(1/a/3) und B(2/4/-1) den Abstand $d = \sqrt{17}$ haben.

d) Berechne den Wert von x so, dass die Punkte A(x/x/2) und B(1/x/5) den Abstand d = 5 haben.

Aufgabe 2:

Gegeben ist das Viereck ABCD mit A(2/0/2), B(1/1/1), C(0/2/2) und D(1/1/3).

a) Untersuche, ob es sich bei dem Viereck ABCD um eine Raute handelt.

b) Berechne die Länge der Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$.

Aufgabe 3:

a) Bestimme den zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ zugehörigen Einheitsvektor.

b) Welcher Punkt zwischen A(2/3/-1) und B(5/7/-1) liegt von A aus eine Einheit entfernt ?
Wie weit ist dieser Punkt von B entfernt ?

Lösungen

Aufgabe 1:

a) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left\|\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{21}$

b) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left\|\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (-0{,}5)^2 + 0{,}5^2} = \sqrt{2{,}5}$

c) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 4-a \\ -4 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{17} \Rightarrow \sqrt{1+(4-a)^2+16} = \sqrt{17} \quad \Rightarrow (4-a)^2 = 0 \Rightarrow a = 4$

d) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left\|\begin{pmatrix} 1-x \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right\| = 5 \Rightarrow \sqrt{(1-x)^2+9} = 5 \quad (1-x)^2 + 9 = 25 \Rightarrow (1-x)^2 = 16$

1.Lösung: $1-x = 4 \Rightarrow x = -3$
2.Lösung: $1-x = -4 \Rightarrow x = 5$

Aufgabe 2:

a) Es gilt $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Da diese beiden Vektoren gleich sind, handelt es sich bei dem Viereck um ein Parallelogramm.
Nun wird geprüft, ob die benachbarten Seiten gleich lang sind:

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left\|\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{3}$ und $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \left\|\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{3}$

Damit handelt es sich bei dem Viereck um eine Raute.

b) $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left\|\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{8}$ und $\left|\overrightarrow{BD}\right| = \left\|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right\| = 2$

Aufgabe 3:

a) Es gilt $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{4+25+1} = \sqrt{30}$

Einheitsvektor: $\overrightarrow{a_0} = \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Es gilt $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{9+16+0} = 5$.

Der gesuchte Punkt Q wird mit Hilfe des Einheitsvektors $\overrightarrow{AB_0} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ermittelt.

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB_0} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,6 \\ 3,8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Der gesuchte Punkt hat die Koordinaten Q(2,6/3,8/-1).

Abstand von Q zu B: $\left|\overrightarrow{QB}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2,4 \\ 3,2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 4$