

Analytische Geometrie

Übungsaufgaben Ebenengleichungen (Umformung der Gleichungstypen)

Oberstufe

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

November 2015

Aufgabe 1:

a) Ermittle eine Normalengleichung der Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Ermittle eine Koordinatengleichung der Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2:

Die Punkte A(1/2/-2), B(3/2/2) und C(-4/1/1) liegen in der Ebene E.

Stelle die Gleichung von E als Parameterform, als Normalengleichung und als Koordinatengleichung dar.

Aufgabe 3:

Bestimme aus der Koordinatengleichung von E jeweils eine Parameterform.

a) E: $-x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 13$ b) E: $2x_1 - x_3 = 6$

Aufgabe 4:

Wandle die Normalengleichung $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$ der Ebene in eine Koordinatengleichung

um und bestimme anschließend eine Parameterform.

Lösungen

Aufgabe 1:

a) Normalenvektor von E: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$

Normalengleichung von E: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix} = 0$

b) Normalenvektor von E: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ -5 \end{pmatrix}$

Ansatz für die Koordinatengleichung von E: $2x_1 - 9x_2 - 5x_3 = d$

Einsetzen des Punktes P(1/2/1): $2 - 18 - 5 = d \Rightarrow d = -21$

Koordinatengleichung von E: $2x_1 - 9x_2 - 5x_3 = -21$

Aufgabe 2:

Parameterform von E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Normalenvektor von E: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -26 \\ -2 \end{pmatrix}$

Normalengleichung von E: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -26 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$

Ansatz für die Koordinatengleichung von E: $4x_1 - 26x_2 - 2x_3 = d$

Einsetzen des Punktes P(1/2/-2): $4 - 52 + 4 = d \Rightarrow d = -44$

Koordinatengleichung von E: $4x_1 - 26x_2 - 2x_3 = -44$

Aufgabe 3:

a) Wir wählen drei Punkte auf der Ebene E: $-x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 13$

A(-13/0/0) ; B(-16/-1/0) ; C(0/0/-3,25)

Parameterform: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -13 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ -3,25 \end{pmatrix}$

b) Wir wählen drei Punkte auf der Ebene E: $2x_1 - x_3 = 6$

A(3/0/0) ; B(0/-6/0) ; C(0/-6/1)

Parameterform: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4:

Ansatz für die Koordinatengleichung: $2x_1 + x_2 + 4x_3 = d$

Einsetzen von $P(1/1/3)$: $2 + 1 + 12 = d \Rightarrow d = 15$

Koordinatengleichung: $2x_1 + x_2 + 4x_3 = 15$

Wir wählen drei Punkte von der Ebene:

$A(7,5/0/0)$, $B(0/15/0)$, $C(0/0/3,75)$

Parameterform der Ebene: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -7,5 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -7,5 \\ 0 \\ 3,75 \end{pmatrix}$