Analysis

Ganzrationale Funktionen
Differenzialrechnung, Extrem- und Wendepunkte

Gymnasium Klasse 10

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2014

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{2}x^4-x^2-7,5$; $x\in\mathbb{R}$

Ihr Schaubild sei K.

a) Bestimme die Nullstellen und das globale Minimum von f.

b) In welchem Intervall ist K eine Rechtskurve ?

Aufgabe 2:

a) Welche Bedeutung haben die folgenden Angaben für das Schaubild K einer auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktion f ?
   1.) Die 1.Ableitung von f hat einen Vorzeichenwechsel von minus nach plus.
   2.) Das Schaubild der 1.Ableitung hat einen Hochpunkt.

b) Warum kann das Schaubild einer ganzrationalen Funktion vom Grad n höchstens n-2 Wendestellen haben ?

c) Fülle die Lücken aus: "Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion hat einen Übergang von einer Links- in eine Rechtskurve, wenn die erste Ableitung _____________ oder wenn die zweite Ableitung _________________________".

Aufgabe 3: (Teil b) mit GTR)

Gegeben sind die Funktionen f und g durch $f(x)=\frac{1}{6}x^3-4,5x$ und $g(x)=\frac{1}{2}x^4-2x^3$, $x\in\mathbb{R}$

a) Untersuche eine der beiden Funktionen auf Extrema und gib deren Art an.

b) Bestimme den Schnittpunkt der beiden Schaubilder im 2.Quadranten.

Aufgabe 4:

Begründe die Symmetrie des Schaubildes der Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{20}x^5-\frac{4}{3}x^3+6$, $x\in\mathbb{R}$

In welchem Intervall ist das Schaubild eine Linkskurve ?

Aufgabe 5:

Gegeben ist für jedes t > 0 eine Funktion f_t durch $f_t(x)=x^3-2tx^2+t^2x$, $x\in\mathbb{R}$

Ihr Schaubild sei K_t.

a) Skizziere K_3 mit Hilfe des GTR. Zeige, dass jedes Schaubild K_t die x-Achse berührt.

b) Auf welche Kurve liegen die Hochpunkte aller K_t ?

c) Für welchen Wert von t geht die Wendetangente in $W(\frac{2}{3}t\,/\,?)$ durch den Punkt P(0/8) ?

Aufgabe 6: (mit GTR)

Eine ganzrationale Funktion f 3.Grades hat folgende Eigenschaften:

(1) Der Ursprung liegt auf dem Graphen G_f

(2) Die Wendetangente t: $y=-3x-\frac{4}{3}$ berührt G_f an der Stelle $x=-\frac{4}{3}$

a) Bestimme den Funktionsterm von f (Kontrollergebnis: $f(x)=\frac{9}{16}x^3+\frac{9}{4}x^2$)

b) Bestimme die Nullstellen und Extrema von G_f.

c) Skizziere G_f aufgrund der bisherigen Ergebnisse und zeichne t ein.

d) Die Punkte A(-4/0), B(b/0) und C(b/f(b)) bilden ein rechtwinkliges Dreieck. Dabei ist -4 < b < 0. vorausgesetzt. Bestimme b so, dass die Dreiecksfläche maximal wird. Wie groß ist dann die Fläche ?

Lösungen

Aufgabe 1:

a) Nullstellen von f(x): $f(x)=0$

$\frac{1}{2}x^4 - x^2 - 7,5 = 0 \overset{\cdot 2}{\Rightarrow} x^4 - 2x^2 - 15 = 0$ Substitution $u = x^2$

$\Rightarrow u^2 - 2u - 15 = 0$ Lösungsformel: $u_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} \Rightarrow u = 5$ oder u = -3

Rücksubstitution: $x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$

$x^2 = -3 \Rightarrow$ nicht lösbar

Das Schaubild besitzt 2 Nullstellen bei $x = \pm\sqrt{5}$

Lokales Minimum von f: $f'(x)=0$ und $f''(x) \neq 0$

$f'(x) = 2x^3 - 2x$ und $f''(x) = 6x^2 - 2$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 - 2x = 0 \Rightarrow 2x \cdot (x^2 - 1) = 0$

Satz vom Nullprodukt: x = 0 oder x = -1 oder x = 1

$f''(-1) = 4 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt $T_1(-1 / f(-1)) \Rightarrow T_1(-1/-8)$

$f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt

$f''(1) = 4 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt $T_2(1 / f(1)) \Rightarrow T_2(1/-8)$

Zur Bestimmung des globalen Minimums müssen die Randwerte von f untersucht werden:

Für $x \to -\infty$ strebt $f(x) \to +\infty$

Für $x \to +\infty$ strebt $f(x) \to +\infty$

An den Rändern existiert kein kleinerer Wert als -8.

Folglich besitzt das globale Minimum von f(x) den Wert -8.

b) Das Schaubild K ist rechtsgekrümmt, wenn $f''(x) < 0$ ist.

Zu lösen ist die Ungleichung $6x^2 - 2 < 0$

Zunächst wird die zugehörige Gleichung gelöst: $6x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

Bei diesen x-Werten befinden sich die Wendestellen der Funktion.

Wir betrachten nun 3 Intervalle:

$x < -\sqrt{\frac{1}{3}}$: Es gilt z.B. $f''(-1) = 4 > 0 \Rightarrow$ Linkskurve

$-\sqrt{\frac{1}{3}} < x < \sqrt{\frac{1}{3}}$: Es gilt z.B. $f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow$ Rechtskurve

$x > \sqrt{\frac{1}{3}}$: Es gilt z.B. $f''(1) = 4 > 0 \Rightarrow$ Linkskurve

K ist rechtsgekrümmt im Intervall $-\sqrt{\frac{1}{3}} < x < \sqrt{\frac{1}{3}}$

Aufgabe 2:

a) 1.) Wenn die 1.Ableitung von f einen Vorzeichenwechsel von minus nach plus besitzt, befindet sich an der betroffenen Stelle ein lokales Minimum (Tiefpunkt).

2.) Wenn das Schaubild der 1.Ableitung einen Hochpunkt besitzt, hat das Schaubild von f an der betroffenen Stelle eine Wendestelle.
Der Wendepunkt von f hat eine maximale Tangentensteigung und stellt den Übergang von einer Links- in eine Rechtskurve dar.

b) Wenn man das Schaubild einer ganzrationalen Funktion vom Grad n zweimal ableitet, erhält man eine Funktion vom Grad n-2.
Da man zur Berechnung des Wendepunktes $f''(x) = 0$ setzen muss, erhält man eine Gleichung vom Grad n-2, die maximal n-2 Lösungen besitzt.
Somit kann es maximal n-2 Wendestellen geben.

c) Fülle die Lücken aus: "Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion hat einen Übergang von einer Links- in eine Rechtskurve, wenn die erste Ableitung **einen Hochpunkt / ein relatives Maximum besitzt** oder wenn die zweite Ableitung **eine Nullstelle mit einem Vorzeichenwechsel von plus nach minus besitzt".**

Aufgabe 3:

a) Extrema von $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 4,5x$

Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4,5$ und $f''(x) = x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 - 4,5 = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$

$f''(-3) = -3 < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt H(-3/9)

Wegen der Symmetrie zum Ursprung folgt T(3/-9)

Extrema von $g(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3$

Bedingung: $g'(x) = 0$ und $g''(x) \neq 0$

$g'(x) = 2x^3 - 6x^2$ und $g''(x) = 6x^2 - 12x$

$g'(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 - 6x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2(x-3) = 0$

Satz vom Nullprodukt: x = 0 oder x = 3

$g''(3) = 18 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt T(3/-13,5)

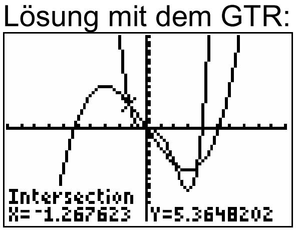
$g''(0) = 0 \Rightarrow$ keine Aussage möglich, Kontrolle mit VZW von f' erforderlich

$g'(-1) = -8 < 0$ und $g'(1) = -4 < 0$

Es existiert beim Durchgang durch x = 0 kein Vorzeichenwechsel, daher existiert bei x = 0 auch kein Extrempunkt.

b) Schnittpunkt im 2.Quadrant: $f(x) = g(x)$

Lösung mit dem GTR:



Schnittpunkt S(-1,27/5,36)

Aufgabe 4:
Begründung der Symmetrie:
Das Schaubild von $g(x) = \frac{1}{20}x^5 - \frac{4}{3}x^3$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung, da die Funktion nur ungerade Hochzahlen besitzt.
Das Schaubild von $f(x) = g(x) + 6$ ist gegenüber g(x) um 6 Einheiten nach oben verschoben.
Somit ist das Schaubild von f punktsymmetrisch zum Punkt P(0/6).

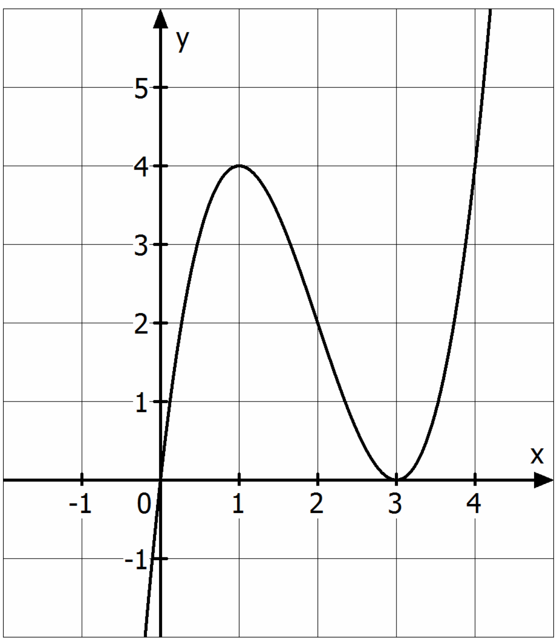
Intervall der Linkskurve:
Bedingung für eine Linkskurve: $f''(x) > 0$
Es ist $f'(x) = 0{,}25x^4 - 4x^2$ und $f''(x) = x^3 - 8x$

Um die Ungleichung $x^3 - 8x > 0$ zu lösen, löst man zunächst die zugehörige Gleichung:
$x^3 - 8x = 0 \Rightarrow x \cdot (x^2 - 8) = 0$
Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt: x = 0 oder $x = \pm\sqrt{8}$

Wir betrachten nun 4 Intervalle:
$x < -\sqrt{8}$: Es gilt z.B. $f''(-3) = -3 < 0 \Rightarrow$ Rechtskurve
$-\sqrt{8} < x < 0$: Es gilt z.B. $f''(-1) = 7 > 0 \Rightarrow$ Linkskurve
$0 < x < \sqrt{8}$: Es gilt z.B. $f''(1) = -7 < 0 \Rightarrow$ Rechtskurve
$x > \sqrt{8}$: Es gilt z.B. $f''(3) = 3 > 0 \Rightarrow$ Linkskurve

Das Schaubild ist linksgekrümmt in den Intervallen $-\sqrt{8} < x < 0$ und für $x > \sqrt{8}$

Aufgabe 5:
a) Skizze von K_3:
Es ist $f_3(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$



Die Zerlegung der Funktionsgleichung in Faktoren ergibt:
$f_t(x) = x \cdot (x^2 - 2tx + t^2) = x \cdot (x-t)^2$

An der Zerlegung erkennt man, dass bei x = t eine doppelte Nullstelle existiert.
Eine doppelte Nullstelle stellt eine Berührung des Schaubildes von f mit der x-Achse dar.

b) Berechnung der Hochpunkte der Schar:
Es ist $f_t'(x) = 3x^2 - 4tx + t^2$ und $f_t''(x) = 6x - 4t$

Bedingung für Hochpunkt: $f_t'(x) = 0$ und $f_t''(x) < 0$

$3x^2 - 4tx + t^2 = 0$

Lösungsformel: $x_{1,2} = \frac{4t \pm \sqrt{16t^2 - 12t^2}}{6} = \frac{4t \pm 2t}{6} \Rightarrow x = t$ oder $x = \frac{1}{3}t$

$f_t''(t) = 2t > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt

$f_t''(\frac{1}{3}t) = -2t < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt $H(\frac{1}{3}t / \frac{4}{27}t^3)$

Berechnung der Kurve der Hochpunkte:
$x = \frac{1}{3}t$ (*) $y = \frac{4}{27}t^3$

Aus (*) folgt $t = 3x$
Einsetzen in (**) ergibt die Kurvengleichung $y = \frac{4}{27}(3x)^3 \Rightarrow y = 4x^3$

c) Die allgemeine Gleichung der Wendetangente lautet $y = mx + b$
Es ist $m = f_t'(\frac{2}{3}t) = -\frac{1}{3}t^2$
Der y-Wert des Wendpunktes lautet $f_t(\frac{2}{3}t) = \frac{2}{27}t^3$
Einsetzen der Steigung und der Wendepunktkoordinaten in die Geradengleichung:
$\frac{2}{27}t^3 = -\frac{1}{3}t^2 \cdot \frac{2}{3}t + b \Rightarrow b = \frac{8}{27}t^3$

Die Gleichung der Wendetangente lautet $y = -\frac{1}{3}t^2 \cdot x + \frac{8}{27}t^3$
Einsetzen des Punktes P(0/8) in die Gleichung ergibt $8 = \frac{8}{27}t^3 \Rightarrow t^3 = 27 \Rightarrow t = 3$

Für t = 3 geht die Wendetangente durch P(0/8).

Aufgabe 6:

a) Ansatz für die Funktionsgleichung: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$f''(x) = 6ax + 2b$

Bedingungen:
Ursprung liegt auf dem Graphen: $f(0)=0 \Rightarrow d=0$

Wendestelle bei $x=-\frac{4}{3}$: $f''(-\frac{4}{3})=0 \Rightarrow -8a+2b=0$

Steigung an der Wendestelle ist -3: $f'(-\frac{4}{3})=-3 \Rightarrow \frac{16}{3}a-\frac{8}{3}b+c=-3$

y-Wert des Wendepunktes ist $y=-3\cdot(-\frac{4}{3})-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$: $f(-\frac{4}{3})=\frac{8}{3} \Rightarrow -\frac{64}{27}a+\frac{16}{9}b-\frac{4}{3}c=\frac{8}{3}$

Lösung des Gleichungssystems mit dem GTR: $a=\frac{9}{16}$; b = 2,25 ; c = 0

Die Funktionsgleichung lautet $f(x)=\frac{9}{16}x^3+\frac{9}{4}x^2$

b) Nullstellen von f(x): $f(x)=0 \Rightarrow \frac{9}{16}x^3+\frac{9}{4}x^2=0 \Rightarrow x^2\cdot(\frac{9}{16}x+\frac{9}{4})=0$

Satz vom Nullprodukt: x = 0 oder $x=-4$

Extrema: $f'(x)=0$ und $f''(x)\neq 0$

$f'(x)=\frac{27}{16}x^2+\frac{9}{2}x$ und $f''(x)=\frac{27}{8}x+\frac{9}{2}$

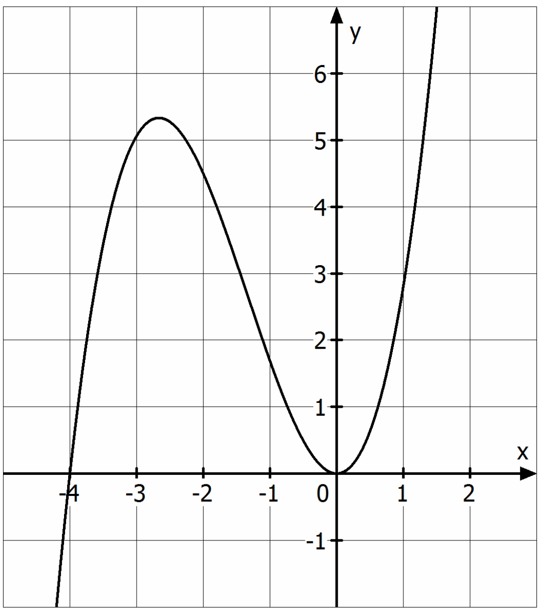
$f'(x)=0 \Rightarrow x\cdot(\frac{27}{16}x+\frac{9}{2})=0$

Satz vom Nullprodukt: x = 0 oder $x=-\frac{8}{3}$

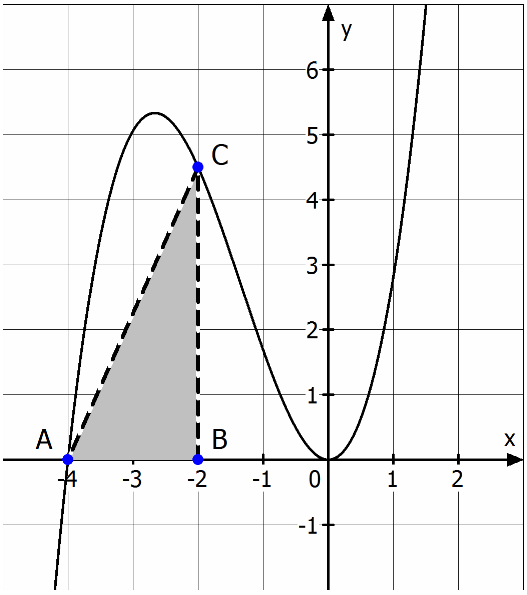
$f''(0)=\frac{9}{2}>0 \Rightarrow$ Tiefpunkt T(0/0)

$f''(-\frac{8}{3})=-4{,}5<0 \Rightarrow$ Hochpunkt $H(-\frac{8}{3}/\frac{16}{3})$

c)



d) Skizze des Dreiecks:



Flächeninhaltsformel des Dreiecks: $A = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC}$

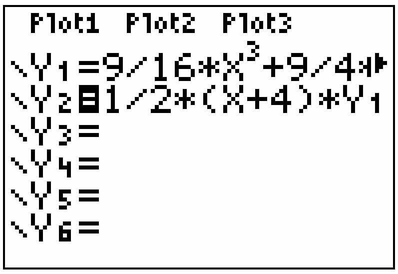
Die Punktkoordinaten lauten A(-4/0), B(b/0) und C(b/f(b)).

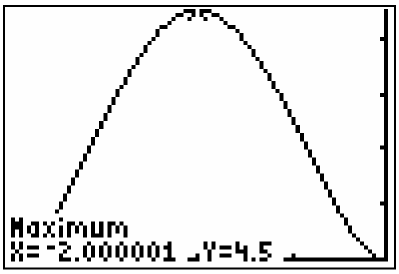
Für die Strecken gilt $\overline{AB} = b - (-4) = b + 4$

$\overline{BC} = f(b) - 0 = f(b)$

$\Rightarrow A(b) = \frac{1}{2}(b + 4) \cdot f(b)$

Gesucht ist das globale Maximum von A(b) mit -4 < b < 0:





Die Dreiecksfläche wird maximal für b = -2 mit A(-2) = 4,5 FE.

Untersuchung der Randwerte:
Für b = -4 ergibt sich A(-4) = 0.
Für b = 0 ergibt sich A(0) = 0.

Somit befinden sich am Rand keine höheren Ergebnisse.
Das globale Maximum der Fläche beträgt A = 4,5 Flächeneinheiten.