Analysis

Ganzrationale Funktionen
Nullstellen, Funktionen aufstellen, Extrempunkte, Symmetrie, Verhalten im Unendlichen

Gymnasium Klasse 10

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2014

Aufgabe 1: (Teil f) mit GTR)
Bestimme die Nullstellen und zerlege den Funktionsterm in Faktoren.
Skizziere das Schaubild von f mit Hilfe der Achsenschnittpunkte, möglicher Symmetrie und dem Verhalten von f für $x \to \infty$ und für $x \to -\infty$.

a) $f(x) = x^3 - 5x^2$ b) $f(x) = (2 - 3x^2)^2$ c) $f(x) = 2x^5 - 8x^3$

d) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 9$ e) $f(x) = x^6 - 2x^3 - 8$ f) $f(x) = 2x^3 - 12x + 10$ (mit GTR)

g) $f(x) = (x+3)^2(x+1)$ h) $f(x) = 4x^6(x^2 - 9) + 4x^6$

Aufgabe 2:
Eine ganzrationale Funktion 3. Ordnung hat die Nullstellen -3, 1 und 2,5.
Ihr Schaubild geht durch den Punkt P(0/15). Wie lautet die Funktionsgleichung ?

Aufgabe 3:
Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion 4.Grades ist symmetrisch zur y-Achse, berührt die x-Achse bei x = 3 und geht durch A(0/-4). Bestimme die Funktionsgleichung.

Aufgabe 4:
Gib alle ganzrationalen Funktionen 5.Grades an, die x = 1 als dreifache und x = 2 als doppelte Nullstelle haben.

Aufgabe 5: (mit GTR)
Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - 2x - 4$ schneidet aus der Geraden $11x + 8y + 26 = 0$ zwei Abschnitte heraus. Berechne ihre Länge.

Aufgabe 6: (mit GTR)
Bestimme die Achsenschnittpunkte und die lokalen Extrempunkte der Schaubilder mit dem GTR.

a) $f(x) = 4x^3 - 24x^2 - x - 6$ b) $f(x) = x^3 - 26x^2 - 8375x + 8400$

c) $f(x) = 0{,}1x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 2$

Aufgabe 7:
Bestimme die Schnittpunkte der Schaubilder von f und g:
$f(x) = x^3 - 4x^2 + x - 1$ und $g(x) = x^2 - 3x - 1$

Aufgabe 8:
Erkläre, warum eine ganzrationale Funktion n-ten Grades höchstens n Nullstellen haben kann.

Aufgabe 9:
Gib eine ganzrationale Funktion 4.Grades an, die genau eine (zwei, drei) Nullstellen hat.

Aufgabe 10:
Eine Parabel 3.Ordnung ist symmetrisch zum Punkt S(0/3) und geht durch die Punkte A(3/6) und B(4/21). Bestimme ihre Gleichung.

Lösungen

Aufgabe 1:

a) $f(x) = x^3 - 5x^2$

Nullstellen: $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 5x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 \cdot (x-5) = 0$

Satz vom Nullprodukt: x = 0 oder x = 5

Zerlegung in Faktoren: $f(x) = x^2 \cdot (x-5)$

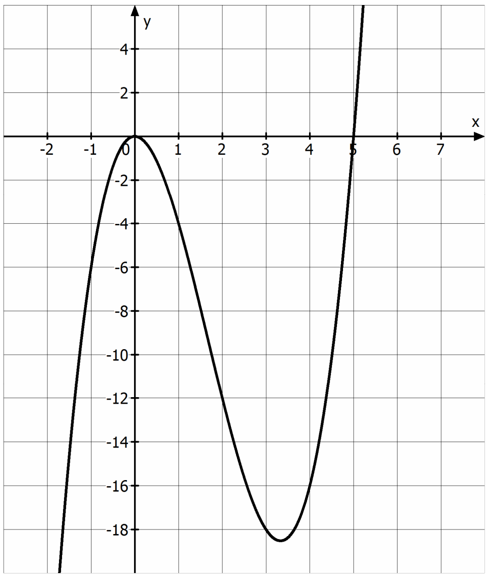
Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 0 \Rightarrow S_y(0\,/\,0)$

Symmetrie: keine erkennbar, da gerade und ungerade Hochzahlen existieren

Für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to -\infty$ (Betrachte den Term mit größter Hochzahl)

Für $x \to +\infty$ gilt $f(x) \to +\infty$ (Betrachte den Term mit größter Hochzahl)

Skizze:



b) $f(x) = (2-3x^2)^2 = 4 - 12x^2 + 9x^4$

Nullstellen: $f(x) = 0 \Rightarrow (2-3x^2)^2 = 0 \quad \overset{\sqrt{}}{\Rightarrow} 2 - 3x^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

Zerlegung in Faktoren: $f(x) = (-3 \cdot (x - \sqrt{\frac{2}{3}}) \cdot (x + \sqrt{\frac{2}{3}}))^2 = 9 \cdot (x - \sqrt{\frac{2}{3}})^2 \cdot (x + \sqrt{\frac{2}{3}})^2$

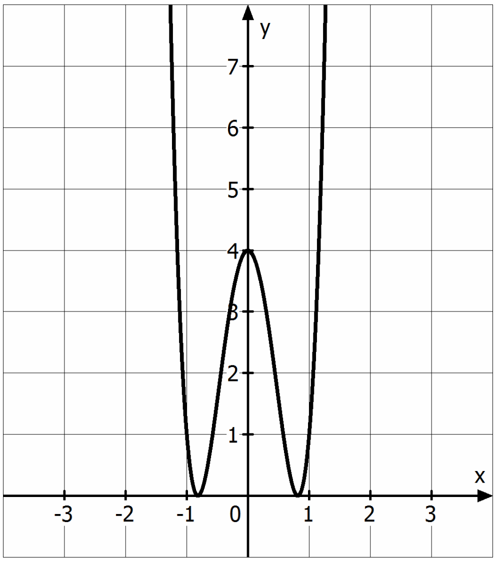
Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 4 \Rightarrow S_y(0\,/\,4)$

Symmetrie: Achsensymmetrie zur y-Achse, da nur gerade Hochzahlen existieren

Für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to +\infty$ (Betrachte den Term mit größter Hochzahl)

Für $x \to +\infty$ gilt $f(x) \to +\infty$ (Betrachte den Term mit größter Hochzahl)

Skizze:



c) $f(x) = 2x^5 - 8x^3$

Nullstellen: $f(x) = 0 \Rightarrow 2x^5 - 8x^3 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^3 \cdot (x^2 - 4) = 0$

Satz vom Nullprodukt: x = 0 oder x = 2 oder x = -2

Zerlegung in Faktoren: $f(x) = 2x^3 \cdot (x^2 - 4) = 2x^3 \cdot (x+2) \cdot (x-2)$

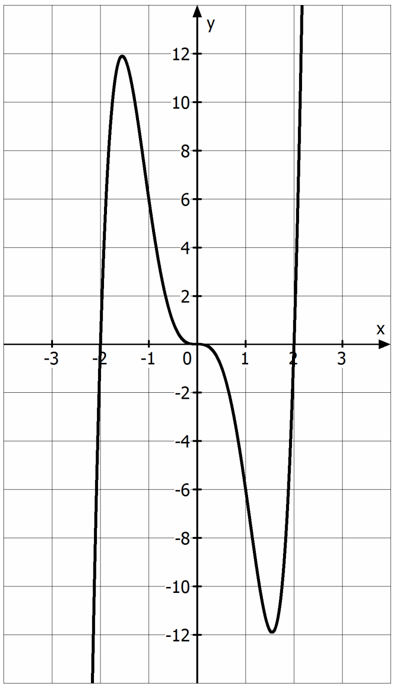
Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 0 \Rightarrow S_y(0/0)$

Symmetrie: Punktsymmetrie zum Ursprung, da nur ungerade Hochzahlen existieren

Für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to -\infty$ (Betrachte den Term mit größter Hochzahl)

Für $x \to +\infty$ gilt $f(x) \to +\infty$ (Betrachte den Term mit größter Hochzahl)

Skizze:



d) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 9 = (x^2 - 3)^2$

Nullstellen: $f(x) = 0 \Rightarrow (x^2 - 3)^2 = 0 \quad \overset{\sqrt{\ }}{\Rightarrow} x^2 - 3 = 0$

$\Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

Zerlegung in Faktoren: $f(x) = (x - \sqrt{3})^2 \cdot (x + \sqrt{3})^2$

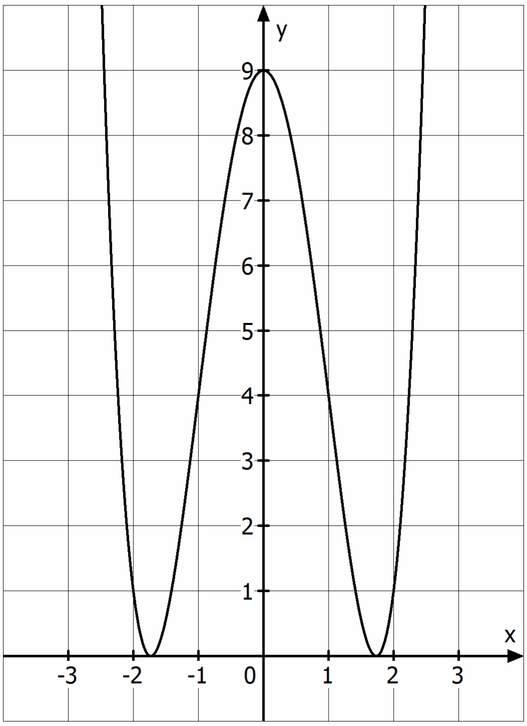
Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 9 \Rightarrow S_y(0 / 9)$

Symmetrie: Achsensymmetrie zur y-Achse, da nur gerade Hochzahlen existieren

Für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to +\infty$ (Betrachte den Term mit größter Hochzahl)

Für $x \to +\infty$ gilt $f(x) \to +\infty$ (Betrachte den Term mit größter Hochzahl)

Skizze:



e) $f(x) = x^6 - 2x^3 - 8$

Nullstellen: $f(x) = 0 \Rightarrow x^6 - 2x^3 - 8 = 0$ Substitution: $u = x^3$

dies führt auf die quadratische Gleichung $u^2 - 2u - 8 = 0$

Lösungsformel: $u_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \dfrac{2 \pm 6}{2} \Rightarrow u = 4$ oder u = -2.

Rücksubstitution: $x^3 = 4 \Rightarrow x = \sqrt[3]{4}$

$x^3 = -2 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{2}$

Zerlegung in Faktoren: Die substituierte Gleichung lässt sich zerlegen in $(u - 4) \cdot (u + 2)$

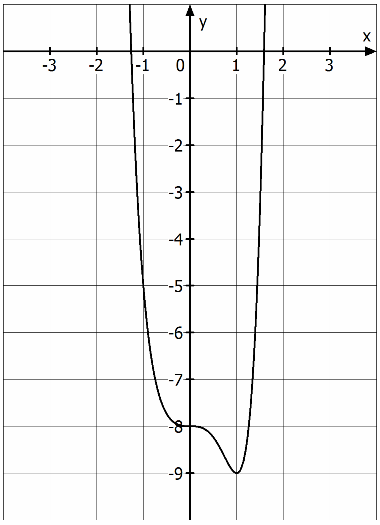
Nach Rücksubstitution ergibt sich als Zerlegung $f(x) = (x^3 - 4) \cdot (x^3 + 2)$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = -8 \Rightarrow S_y(0 / -8)$

Symmetrie: keine erkennbar, da gerade und ungerade Hochzahlen existieren

Für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to +\infty$ (Betrachte den Term mit größter Hochzahl)
Für $x \to +\infty$ gilt $f(x) \to +\infty$ (Betrachte den Term mit größter Hochzahl)

Skizze:



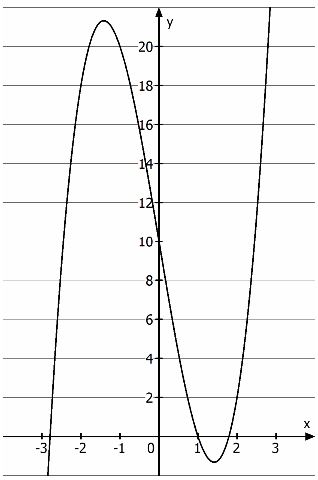
f) $f(x) = 2x^3 - 12x + 10$

Nullstellen: $f(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 - 12x + 10 = 0$
Lösung mit dem GTR: $x \approx -2{,}791$ oder $x = 1$ oder $x \approx 1{,}791$

Zerlegung in Faktoren: $f(x) \approx (x + 2{,}791)(x - 1)(x - 1{,}791)$
Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 10 \Rightarrow S_y(0/10)$
Symmetrie: keine erkennbar, da gerade und ungerade Hochzahlen existieren

Für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to -\infty$ (Betrachte den Term mit größter Hochzahl)
Für $x \to +\infty$ gilt $f(x) \to +\infty$ (Betrachte den Term mit größter Hochzahl)

Skizze:



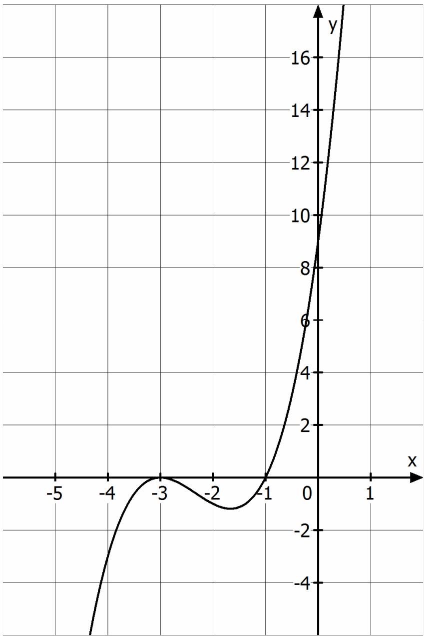
g) $f(x) = (x+3)^2(x+1) = (x^2+6x+9)(x+1) = x^3+7x^2+15x+9$

Nullstellen: $f(x) = 0 \Rightarrow (x+3)^2(x+1) = 0$
Satz vom Nullprodukt: x = -3 oder x = -1

Zerlegung in Faktoren: Funktionsgleichung liegt bereits in der Zerlegung vor
Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 9 \Rightarrow S_y(0/9)$
Symmetrie: keine erkennbar, da gerade und ungerade Hochzahlen existieren

Für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to -\infty$ (Betrachte den Term mit größter Hochzahl)
Für $x \to +\infty$ gilt $f(x) \to +\infty$ (Betrachte den Term mit größter Hochzahl)

Skizze:



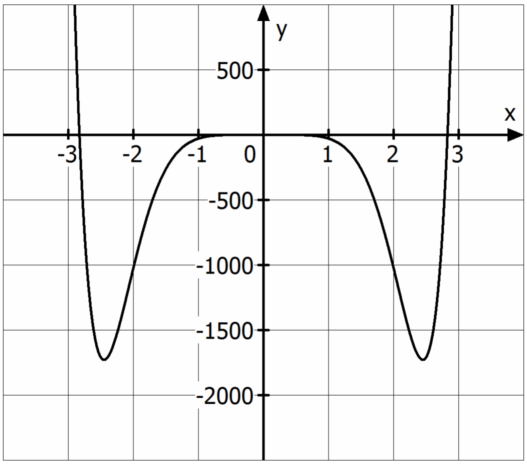
h) $f(x) = 4x^6(x^2-9)+4x^6 = 4x^8-32x^6$

Nullstellen: $f(x) = 0 \Rightarrow 4x^8-32x^6 = 0$
$\Leftrightarrow 4x^6(x^2-8) = 0$
Satz vom Nullprodukt: x = 0 oder $x = \pm\sqrt{8}$

Zerlegung in Faktoren: $f(x) = 4x^6(x-\sqrt{8})(x+\sqrt{8})$
Schnittpunkt Achsensymmetrie zur y-Achse, da nur gerade Hochzahlen existieren

Für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to +\infty$ (Betrachte den Term mit größter Hochzahl)
Für $x \to +\infty$ gilt $f(x) \to +\infty$ (Betrachte den Term mit größter Hochzahl)

Skizze:



Aufgabe 2:

Anhand der gegebenen Nullstellen kann die Funktion als Linearfaktoransatz aufgestellt werden:
$f(x) = a \cdot (x+3)(x-1)(x-2,5)$
Mit f(0) = 15 folgt: $15 = a \cdot 3 \cdot (-1) \cdot (-2,5) \Rightarrow a = 2$
Die Funktionsgleichung lautet $f(x) = 2 \cdot (x+3)(x-1)(x-2,5)$

Aufgabe 3:
Da die Funktion symmetrisch zur y-Achse ist, berührt das Schaubild von f die x-Achse neben der Stelle x = 3 auch an der Stelle x = -3.

Aufgrund der Berührung handelt es sich um doppelte Nullstellen.
Ansatz: $f(x) = a \cdot (x-3)^2 (x+3)^2$

Mit $f(0) = -4$ folgt $-4 = a \cdot 9 \cdot 9 \Rightarrow a = -\frac{4}{81}$

Die Funktionsgleichung lautet $f(x) = -\frac{4}{81}(x-3)^2(x+3)^2$

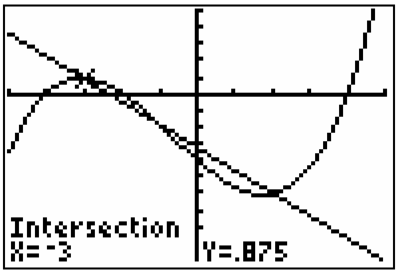
Aufgabe 4:
Die allgemeine Funktionsgleichung lautet $f(x) = a \cdot (x-1)^3 (x-2)^2$

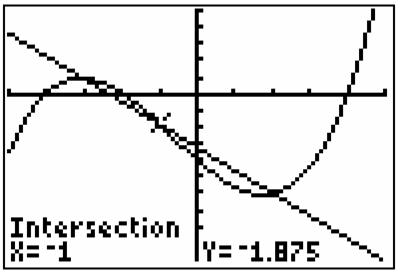
Aufgabe 5:

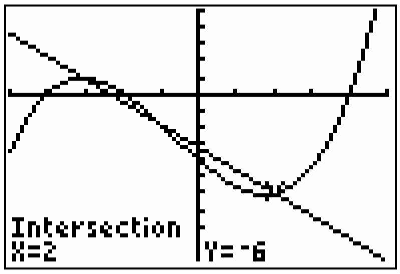
Auflösen der Geradengleichung nach y: $8y = -11x - 26 \Leftrightarrow y = -\frac{11}{8}x - \frac{13}{4}$

Schnittpunkt der Gerade und der Funktion:
Ansatz: $\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - 2x - 4 = -\frac{11}{8}x - \frac{13}{4}$

Lösung mit dem GTR:







Die Schnittpunkte lauten A(-3/0,875), B(-1/-1,875) und C(2/-6)

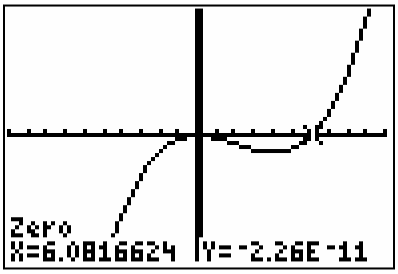
Länge des ersten Abschnittes: $\overline{AB} = \sqrt{(-1-(-3))^2 + (-1{,}875 - 0{,}875)^2} \approx 3{,}4$ LE

Länge des zweiten Abschnittes: $\overline{BC} = \sqrt{(2-(-1))^2 + (-6-(-1{,}875))^2} \approx 5{,}1$ LE

Aufgabe 6:

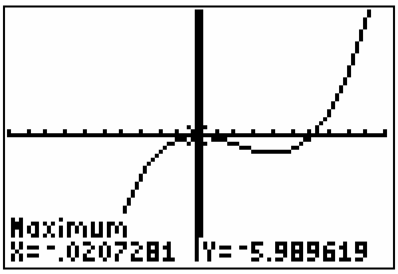
a) $f(x) = 4x^3 - 24x^2 - x - 6$

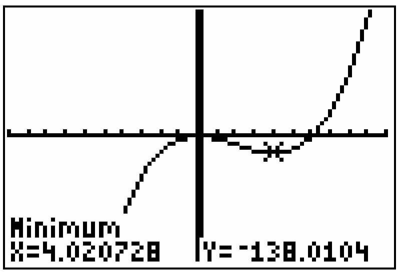
Achsenschnittpunkte:
Schnittpunkt mit y-Achse: $f(0) = -6 \Rightarrow S_y(0/-6)$
Schnittpunkte mit x-Achse: $f(x) = 0$



Schnittpunkt mit x-Achse lautet N(6,08/0)

Lokale Extrempunkte: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

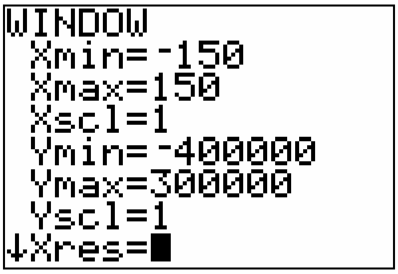


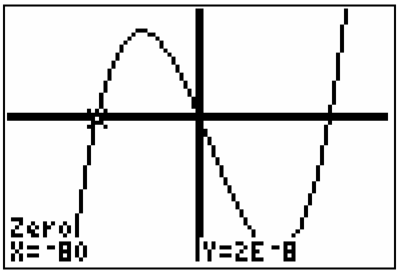


Hochpunkt H(-0,02/-5,99) und Tiefpunkt T(4,02/-138,01)

b) $f(x) = x^3 - 26x^2 - 8375x + 8400$

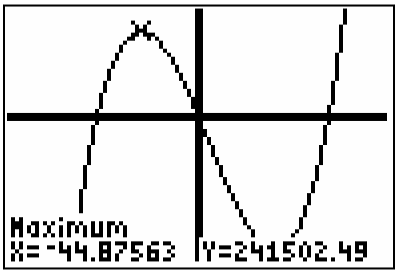
Achsenschnittpunkte:
Schnittpunkt mit y-Achse: $f(0) = 8400 \Rightarrow S_y(0 / 8400)$
Schnittpunkte mit x-Achse: $f(x) = 0$

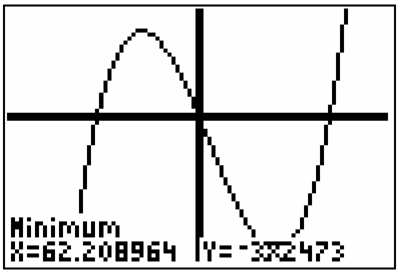




Schnittpunkte mit x-Achse: $N_1(-80 / 0)$, $N_2(1 / 0)$ und $N_3(105 / 0)$

Lokale Extrempunkte: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

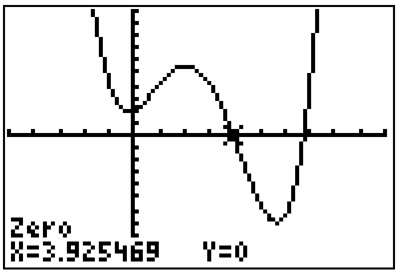




Hochpunkt H(-44,88/241502,5) und Tiefpunkt T(62,2/-372473)

c) $f(x) = 0{,}1x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 2$

Achsenschnittpunkte:
Schnittpunkt mit y-Achse: $f(0) = 2 \Rightarrow S_y(0 / 2)$
Schnittpunkte mit x-Achse: $f(x) = 0$



Schnittpunkt mit x-Achse: $N_1(3{,}93 / 0)$ und $N_2(6{,}76 / 0)$

Lokale Extrempunkte: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

Hochpunkt H(2,06/5,61) und Tiefpunkte $T_1(-0{,}21 / 1{,}89)$ und $T_2(5{,}65 / -6{,}96)$

Aufgabe 7:

Schnittbedingung: $f(x) = g(x) \Rightarrow x^3 - 4x^2 + x - 1 = x^2 - 3x - 1$

$$\Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 4x = 0 \quad \Leftrightarrow x \cdot (x^2 - 5x + 4) = 0$$

Satz vom Nullprodukt: x = 0 oder $x^2 - 5x + 4 = 0$

Mit der Lösungsformel folgt $x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow x = 4$ oder x =1

Es gibt drei verschiedene Schnittpunkte:
Mit f(0) = g(0) = -1 folgt $S_1(0 / -1)$
Mit f(4) = g(4) = 3 folgt $S_2(4 / 3)$
Mit f(1) = g(1) = -3 folgt $S_3(1 / -3)$

Aufgabe 8:
Die Nullstellenbedingung für eine Funktion f(x) lautet $f(x) = 0$.
Bei einer Funktion n-ten Grades entsteht eine Gleichung vom Grad n.
Eine Gleichung vom Grad n hat höchstens n Lösungen.
Daher kann f(x) auch nur höchstens n Nullstellen besitzen.

Aufgabe 9:
Funktion 4.Grades mit genau einer Nullstelle: $f(x) = (x-4)^4$ oder $f(x) = (x-2)^2(x^2+1)$
Funktion 4.Grades mit genau zwei Nullstellen: $f(x) = (x-4)^2(x-1)^2$ oder $f(x) = (x-4)^3(x-1)$
oder $f(x) = (x-1)(x-2)(x^2+1)$
Funktion 4.Grades mit genau drei Nullstellen: $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)^2$

Aufgabe 10:
Eine Parabel 3.Ordnung, die symmetrisch zum Ursprung ist, besitzt im Funktionsansatz nur ungerade Hochzahlen: $y = ax^3 + bx$
Da der Symmetriepunkt S(0/3) ist, wird dieser Funktionsansatz noch mit 3 addiert:
$f(x) = ax^3 + bx + 3$

Einsetzen von A(3/6): $6 = 27a + 3b + 3 \Rightarrow 27a + 3b = 3 \overset{:3}{\Rightarrow} 9a + b = 1$ (*)

Einsetzen von B(4/21): $21 = 64a + 4b + 3 \Rightarrow 64a + 4b = 18 \overset{:2}{\Rightarrow} 32a + 2b = 9$ (**)

Aus (*) folgt $b = 1 - 9a$
eingesetzt in (**): $32a + 2(1-9a) = 9 \Leftrightarrow 14a = 7 \Leftrightarrow a = 0,5$
Daraus folgt $b = 1 - 9 \cdot 0,5 = -3,5$

Die Funktionsgleichung lautet $f(x) = 0,5x^3 - 3,5x + 3$