# Stochastik

## Testen von Hypothesen (einseitiger Test)

**allgemein bildende Gymnasien J1/J2**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Oktober 2015

**Hinweis:**
Für die Aufgaben darf der GTR benutzt werden.

**Aufgabe 1:**

a) Die Nullhypothese $H_0 : p = 0,6$ soll gegen die Alternativhypothese $H_1 : p > 0,6$ bei einem Stichprobenumfang n = 100 und einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 2\%$ getestet werden. Bestimme den Ablehnungsbereich.

b) Die Nullhypothese $H_0 : p = 0,4$ soll gegen die Alternativhypothese $H_1 : p < 0,4$ bei einem Stichprobenumfang n = 100 und einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 10\%$ getestet werden. Bestimme den Ablehnungsbereich.

**Aufgabe 2:**
Ein Fußballspieler behauptet, beim Elfmeterschießen eine Trefferquote von 95% zu erreichen. Um seiner Behauptung zu untermauern, schießt er 50 Elfmeter.

a) Wie viele Treffer muss er erzielen, damit seine Behauptung mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% glaubhaft ist ?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit irrt man, wenn seine Behauptung bei 45 Treffern verworfen wird ?

**Aufgabe 3:**
Eine Person behauptet, hellseherische Fähigkeiten zu haben. Um die Aussage zu überprüfen, wird 1000 mal gewürfelt und die Person muss die richtige Augenzahl vorhersagen. Wie viele richtige Vorhersagen muss die Person machen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,5% diese Fähigkeiten tatsächlich akzeptiert werden ?

**Aufgabe 4:**
Auf einer Straße überschritten bisher 25% der Fahrer die zulässige Höchstgeschwindigkeit. Nachdem zusätzliche Warnschilder angebracht wurden, konnte man beobachten, dass von 100 Fahrern nur noch 17 zu schnell unterwegs waren.

a) Kann man mit 95%-iger Sicherheit davon ausgehen, dass die Maßnahme Erfolg hatte ?

b) Wie viele Fahrer hätten höchstens zu schnell fahren dürfen, um mit mindestens 98%-iger Sicherheit von einer Abnahme der Raserei sprechen zu können ?

**Aufgabe 5:**
Ein Medikament A ist laut Untersuchungen in 98% aller Fälle wirksam.
Ein vergleichbares, aber günstigeres Medikament B darf nur dann auf den Markt gebracht werden, wenn es eine bessere Wirkung wie das Medikament A besitzt.
Das Medikament B wird an 300 Personen getestet. Bei wie vielen dieser Personen muss das Medikament B Wirkung zeigen, damit ihm mit einer Sicherheit von 95% eine bessere Wirkung wie das Medikament A attestiert werden kann ?

# Lösungen

**Aufgabe 1:**

a) Es handelt sich um einen rechtsseitigen Test.
Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der Treffer.
X ist binomialverteilt mit n = 100 und p = 0,6.
Der Ablehnungsbereich hat die Gestalt $\overline{A} = \{k+1, ..., 100\}$

Der Wert von k ist so zu wählen, dass gilt: $P(X \geq k+1) \leq \alpha \quad \Rightarrow 1 - P(X \leq k) \leq 0{,}02$
GTR: Es ergibt sich k = 70 mit $1 - P(X \leq 70) = 0{,}0148$
Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{71, ..., 100\}$

b) Es handelt sich um einen linksseitigen Test.
Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der Treffer.
X ist binomialverteilt mit n = 100 und p = 0,4.
Der Ablehnungsbereich hat die Gestalt $\overline{A} = \{0, ..., k\}$

Der Wert von k ist so zu wählen, dass gilt: $P(X \leq k) \leq \alpha \quad \Rightarrow P(X \leq k) \leq 0{,}1$
GTR: Es ergibt sich k = 33 mit $P(X \leq 33) = 0{,}091$
Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{0, ..., 33\}$

**Aufgabe 2:**

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Treffer an.
X ist binomialverteilt mit n = 50 und p = 0,95.

a) Die Nullhypothese lautet $H_0 : p = 0{,}95$ .
Die Alternativhypothese lautet $H_1 : p < 0{,}95$ .
Es handelt sich um einen linksseitigen Test.
Der Ablehnungsbereich lautet $\overline{A} = \{0, ..., k\}$ .
Das Signifikanzniveau sei $\alpha = 0{,}05$

Der Wert von k ist so zu wählen, dass $P(X \leq k) \leq \alpha \quad \Rightarrow P(X \leq k) \leq 0{,}05$

GTR: Es ergibt sich k = 44 mit $P(X \leq 44) = 0{,}038$

Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{0, ..., 44\}$ . Der Spieler muss mindestens 45 mal treffen.

b) Wenn die Behauptung auch noch bei 45 Treffern abgelehnt wird, ist $\overline{A} = \{0, ..., 45\}$ .
Es gilt $P(X \leq 45) = 0{,}104$
Man irrt mit einer Wahrscheinlichkeit von 10,4 %.

**Aufgabe 3:**
Man geht von der Nullhypothese aus, dass die Person keine hellseherischen Fähigkeiten hat.
In diesem Fall ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie die richtige Augenzahl zufälligerweise rät, bei $p = \frac{1}{6}$. Getestet werden soll, ob sie hellseherische Fähigkeiten besitzt und daher die Wahrscheinlichkeit größer ist.
$H_0 : p = \frac{1}{6}$ und $H_1 : p > \frac{1}{6}$
Es handelt sich um einen rechtsseitigen Test.

Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der von der Person richtig genannten Zahlen.
X ist binomialverteilt mit n = 1000 und p = $\frac{1}{6}$.
Der Ablehnungsbereich hat die Gestalt $\overline{A} = \{k+1,...,1000\}$.
Aufgrund der vorgegebenen Sicherheitswahrscheinlichkeit von 99,5% ergibt sich eine Irrtumswahrscheinlichkeit von 0,5%.

Der Wert von k ist so zu wählen, dass gilt: $P(X \geq k+1) \leq \alpha \quad \Rightarrow 1 - P(X \leq k) \leq 0{,}005$
GTR: Es ergibt sich k = 198 mit $1 - P(X \leq 198) = 0{,}004$
Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{199,...,1000\}$

Die Person muss mindestens 199 richtige Vorhersagen machen.

**Aufgabe 4:**
Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der Fahrer, die die Geschwindigkeit überschreiten.
X ist binomialverteilt mit n = 100 und p = 0,25.

a) $P(X \leq 17) = 0{,}0377$
Die Wahrscheinlichkeit, dass maximal 17 Fahrer zu schnell sind, beträgt unter der Annahme, dass 25% aller Fahrer zu schnell sind, lediglich 3,77%.
Insofern kann man mit 96,23% > 95% davon ausgehen, dass die Maßnahme Erfolg hatte.

b) Nullhypothese $H_0 : p = 0{,}25$
Gegenhypothese $H_1 : p < 0{,}25$

Es handelt sich um einen linksseitigen Test.

Der Ablehnungsbereich lautet $\overline{A} = \{0,...,k\}$.
Das Signifikanzniveau sei $\alpha = 0{,}02$

Der Wert von k ist so zu wählen, dass $P(X \leq k) \leq \alpha \quad \Rightarrow P(X \leq k) \leq 0{,}02$

GTR: Es ergibt sich k = 15 mit $P(X \leq 15) = 0{,}011$
Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{0,...,15\}$. Es hätten höchstens 15 Fahrer zu schnell fahren dürfen.

**Aufgabe 5:**

Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der Personen, bei denen das Medikament B wirkt.
X ist binomialverteilt mit n = 300 und p = 0,98.

Nullhypothese $H_0 : p = 0{,}98$
Gegenhypothese $H_1 : p > 0{,}98$

Es handelt sich um einen rechtsseitigen Test.
Der Ablehnungsbereich hat die Gestalt $\overline{A} = \{k+1,...,300\}$ .
Das Signifikanzniveau beträgt $\alpha = 0{,}05$

Der Wert von k ist so zu wählen, dass gilt: $P(X \geq k+1) \leq \alpha \quad \Rightarrow 1 - P(X \leq k) \leq 0{,}05$
GTR: Es ergibt sich k = 298 mit $1 - P(X \leq 298) = 0{,}017$
Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{299, 300\}$

Das Medikament muss bei mindestens 299 Personen Wirkung zeigen.