Klausur 1
Gebrochenrationale Funktionen
Schwerpunkt: Kurvendiskussion, Extremwertaufgabe

Aufgabe 1 (ohne Taschenrechner)

Gegeben ist die Funktion $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{2x+1}$.

Leite f(x) zweimal ab und vereinfache soweit wie möglich.
Gib den maximalen Definitionsbereich an.
Bestimme die schiefe Asymptote. Gibt es Wendepunkte ?

Aufgabe 2 (ohne Taschenrechner)

Gib jeweils eine Funktion an mit:

a) Nullstelle x = 2 und Polstelle x = 3 mit VZW von – nach +
b) Nullstelle x = 5 und Polstelle x = 4 von + nach + ohne VZW
c) Waagrechte Asymptote y = 2 und Polstelle x = 0 von – nach - ohne VZW
d) Schiefe Asymptote y = 2x-1 und senkrechte Asymptote bei x = 2

Aufgabe 3 (ohne Taschenrechner)

Gegeben ist die Funktion $f(x)=\dfrac{4x}{(x-1)^2}$ mit $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Das Schaubild sei K.

Berechne die Extrempunkte des Schaubildes.

Aufgabe 4: (mit Taschenrechner)

Gegeben ist die Funktion $f(x)=\dfrac{20x-20}{x^3}$ mit $x \geq 1$. Das Schaubild sei K.

Skizziere K für $x \geq 1$.
P(u/v) liege auf K mit $u \geq 1$. N(1/0), P(u/v) und Q(u/0) bilden ein Dreieck.
Welche Koordinaten müssen für P gewählt werden, damit der Flächeninhalt des Dreiecks maximal ist ?

Musterlösung Klausur 1
Gebrochenrationale Funktionen
Schwerpunkt: Kurvendiskussion, Extremwertaufgabe

Aufgabe 1:

Aus $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{2x+1}$ folgt:

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(2x+1) - 2(x^2-2x)}{(2x+1)^2} = \frac{4x^2 - 2x - 2 - 2x^2 + 4x}{(2x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - 2}{(2x+1)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{(4x+2)(2x+1)^2 - 2(2x+1)\cdot 2\cdot(2x^2+2x-2)}{(2x+1)^4} = \frac{(4x+2)(2x+1) - 4(2x^2+2x-2)}{(2x+1)^3}$$

$$= \frac{8x^2 + 8x + 2 - 8x^2 - 8x + 8}{(2x+1)^3} = \frac{10}{(2x+1)^3}$$

Maximaler Definitionsbereich: Für x = -0,5 nimmt der Nennerterm 2x+1 den Wert 0 an.
Es gilt somit D = ℝ \ {-0,5}

Da der Zählergrad > Nennergrad ist, existiert eine schiefe Asymptote, deren Gleichung mit Hilfe der Polynomdivision ermittelt wird:

$(x^2 - 2x) : (2x+1) = 0{,}5x - 1{,}25 + \frac{1{,}25}{2x+1}$

$-(x^2 + 0{,}5x)$

$-2{,}5x$

$-(-2{,}5x - 1{,}25)$

$1{,}25$

Die Gleichung der schiefen Asymptote lautet y = 0,5x – 1,25.

Berechnung der Wendepunkte:

Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{10}{(2x+1)^3} = 0$

Da diese Gleichung keine Lösung besitzt, gibt es folglich keine Wendepunkte.

Aufgabe 2:

a) $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$ mit D = ℝ \ {3}

b) $f(x) = -\frac{x-5}{(x-4)^2}$ mit D = ℝ \ {4}

Das Minuszeichen vor dem Bruch sorgt dafür, dass die Polstelle von + nach + verläuft und nicht von – nach - .

c) $f(x) = \frac{2x^2 - 5}{x^2}$ mit $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Das Zahl -5 im Zähler kann auch durch eine andere negative Zahl ersetzt werden.

d) $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x-2}$

Die Funktionsgleichung wird am einfachsten als Polynomdivisionsergebnis dargestellt.

Aufgabe 3:

Berechnung der Ableitungen:

$$f(x) = \frac{4x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4(x-1)^2 - 2(x-1)\cdot 4x}{(x-1)^4} = \frac{4(x-1) - 8x}{(x-1)^3} = \frac{-4x-4}{(x-1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{-4(x-1)^3 - 3(x-1)^2(-4x-4)}{(x-1)^6} = \frac{-4(x-1) - 3(-4x-4)}{(x-1)^4} = \frac{8x+16}{(x-1)^4}$$

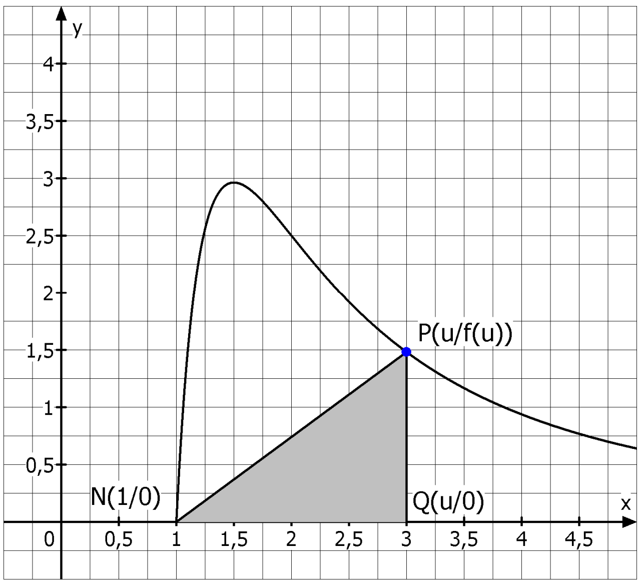
Berechnung der Extrempunkte:

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-4x-4}{(x-1)^3} = 0 \Rightarrow x = -1$

Hinreichende Bedingung: $f''(-1) = \frac{8}{32} > 0$ und damit T(-1/f(-1)) = T(-1/-1)

Aufgabe 4:

Skizze von K und des Dreiecks für die Extremwertaufgabe:



Es gilt $A_{Dreieck} = \frac{1}{2}\cdot\overline{NQ}\cdot\overline{PQ}$ mit $\overline{NQ} = u - 1$ und $\overline{PQ} = f(u) - 0$.

Somit gilt für die Zielfunktion $A(u) = \frac{1}{2}(u-1)\cdot f(u) = \frac{1}{2}(u-1)\cdot\frac{20u-20}{u^3}$.

Mit Hilfe des GTR ergibt sich, dass die Zielfunktion ein Maximum besitzt für u = 3 mit A(3) = 1,481.