Analysis

Ableitung, Änderungsrate, Tangente Teil 2

Gymnasium Klasse 10

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Oktober 2016

Aufgabe 1:
Bestimme mit Hilfe einer Grenzwertbetrachtung die Tangentensteigung an der Stelle x = 3 für die Funktion $f(x) = 2x^2 + x - 1$

Aufgabe 2:
Die Funktion $s(t) = \frac{1}{4}t^2 + 2t$ beschreibe für ein Fahrzeug den zurückgelegten Weg in Meter an nach t Minuten.

a) Welchen Weg hat das Fahrzeug nach 4 Minuten zurückgelegt ?
b) Welche Durchschnittsgeschwindigkeit besitzt das Fahrzeug in den Zeitintervallen $0 \le t \le 4$ bzw. $5 \le t \le 12$?
c) Berechne die Momentangeschwindigkeit des Fahrzeugs nach 8 Minuten.

Aufgabe 3:
Bestimme die Gleichung der Tangente und der Normalen an das Schaubild von $f(x) = 2x^4 - 5x^2$ im Punkt P(1/f(1)).

Aufgabe 4:
Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3x^2 + x - 2$.
a) Welcher Punkt auf dem Schaubild von f besitzt eine Tangente mit der Steigung 7 ?
b) Bestimme die Gleichung der Tangente aus a).

Aufgabe 5:
Bestimme die Ableitungsfunktion unter Verwendung bekannter Ableitungsregeln.
Gib die Gleichungen der Ableitungsfunktionen ohne negative Hochzahlen an.

a) $f(x) = 3x^4 + \sqrt[3]{x} - 6$ b) $f(t) = \frac{6}{5t^3} + 2t - 7$ c) $g(s) = (2s-5)^2$

d) $f(x) = 6x^3 - 5x + t^2$ e) $g(r) = 4s^2 + 5z + r$ f) $f(x) = \frac{3x^3 - 2x + 1}{x^5}$

Aufgabe 6:
Bestimme die Ableitungsfunktion unter Verwendung bekannter Ableitungsregeln:

a) $f(x) = \frac{5}{28}x^8 - \frac{1}{12}x^4 + 0{,}5x^2 + 15$ b) $g(x) = \frac{1}{4}x^{-4} - \frac{1}{30x^6}$

c) $h(x) = \frac{3}{5}x^{15} - \sqrt{3} \cdot x + 7 \cdot \sqrt{x} + \frac{2}{3x^2} + 2\sqrt{3}$

d) $f(a) = \sqrt{a} \cdot b$ e) $f(b) = \sqrt{b} \cdot a$ f) $f(a) = \sqrt{b} \cdot a$

g) $f(q) = p^2 - 3s + 5q^2 - 12\sqrt{r} + x^3$ h) $f(x) = 2ax^2 - \frac{b}{x}$

i) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x}$

Aufgabe 7:

Die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 3$ stelle die Kurve einer Formel 1-Strecke dar.

An der Stelle x = -3 versagen bei einem Rennwagen die Bremsen und die Lenkung.

a) Bestimme die Gleichung der Geraden, die den weiteren Fahrtverlauf des Fahrzeugs nach dem Versagen der Bremsen und der Lenkung beschreibt.

a) Im Punkt A(3/12) trifft das Fahrzeug auf die aufgestapelten Autoreifen, die den Aufprall auf die Mauer dämpfen sollen. Beim Aufprall fliegt das linke Vorderrad im rechten Winkel zur Aufprallrichtung davon. Bestimme die Gleichung der Funktion, die die Flugbahn des Reifens beschreibt.

Aufgabe 8:

Gegeben sind die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sqrt{x}$. Die senkrechte Gerade g mit der Gleichung x = a schneidet das Schaubild von f im Punkt P und das Schaubild von h im Punkt Q. Bestimme a so, dass die Tangenten in P und Q parallel sind.

Aufgabe 9:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -0{,}5x^3 - 3x^2 - 5x$.

Bestimme die Schnittpunkte der Tangente und der Normalen im Punkt P(-2/f(-2)) mit der x-Achse.

Aufgabe 10:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3$. Die Tangente an das Schaubild von f im Punkt P(-1/f(-1)) schneidet das Schaubild von f in einem weiteren Punkt Q.

Bestimme die Koordinaten von Q mit dem GTR.

Aufgabe 11:

Zeige, dass sich die Schaubilder von $f(x) = x^2 + 2x + 1$ und $g_a(x) = ax^2 - \frac{x}{2} + 1$ (a > 0) im Punkt S(0/1) für jeden Wert von a rechtwinklig schneiden.

(Hinweis: Zwei Schaubilder schneiden sich rechtwinklig, wenn sich die Tangenten im Schnittpunkt der Schaubilder rechtwinklig schneiden)

Lösungen

Aufgabe 1:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(3+h)^2+(3+h)-1-20}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(9+6h+h^2)+3+h-21}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{13h+2h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(13+2h)}{h}=\lim_{h\to 0}(13+2h)=13$$

Aufgabe 2:

a) Es gilt $s(4)=\frac{1}{4}\cdot 16+8=12$
Nach 4 Sekunden hat das Fahrzeug 12 m zurückgelegt.

b) Die Durchschnittsgeschwindigkeit entspricht der mittleren Änderungsrate im betroffenen Intervall:
Zeitintervall $0\le t\le 4$: $\frac{s(4)-s(0)}{4-0}=\frac{12-0}{4-0}=3\frac{m}{min}$
Zeitintervall $5\le t\le 12$: $\frac{s(12)-s(5)}{12-5}=\frac{60-16,25}{7}=6,25\frac{m}{min}$

c) Momentangeschwindigkeit nach 8 Minuten:
Es ist $s'(t)=\frac{1}{2}t+2$
Es gilt: $s'(8)=\frac{1}{2}\cdot 8+2=6\frac{m}{min}$ Momentangeschwindigkeit

Aufgabe 3:

Es ist $f(x)=2x^4-5x^2$ mit der Ableitungsfunktion $f'(x)=8x^3-10x$

Tangentenformel an der Stelle x = 1: $y=f'(1)\cdot(x-1)+f(1)$
Es ist f(1) = -3 und $f'(1)=-2$
Tangentengleichung: $y=-2(x-1)-3\Rightarrow y=-2x-1$

Normalenformel an der Stelle x = 1: $y=-\frac{1}{f'(1)}\cdot(x-1)+f(1)$

Normalengleichung: $y=-\frac{1}{-2}(x-1)-3\Rightarrow y=0,5x-3,5$

Aufgabe 4:

a) Es ist $f(x)=3x^2+x-2$ mit der Ableitungsfunktion $f'(x)=6x+1$
Gesucht ist die Stelle, bei der die Tangentensteigung m = 7 ist:
Ansatz: $f'(x)=7$: $7=6x+1\Leftrightarrow x=1$
Es ist f(1) = 2. Die Koordinaten des gesuchten Punktes sind B(1/2).

b) Tangentengleichung im Punkt B(1/2): $y=f'(1)(x-1)+f(1)\Rightarrow y=7(x-1)+2\Rightarrow y=7x-5$

Aufgabe 5:

a) $f(x)=3x^4+x^{\frac{1}{3}}-6 \Rightarrow f'(x)=12x^3+\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=12x^3+\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$

b) $f(t)=\frac{6}{5}t^{-3}+2t-7 \Rightarrow f'(t)=-\frac{18}{5}t^{-4}+2=-\frac{18}{5t^4}+2$

c) $g(s)=4s^2-20s+25 \Rightarrow g'(s)=8s-20$

d) $f'(x)=18x^2-5$

e) $g'(r)=1$

f) $f(x)=\frac{3x^3}{x^5}-\frac{2x}{x^5}+\frac{1}{x^5}=3x^{-2}-2x^{-4}+x^{-5} \Rightarrow f'(x)=-6x^{-3}+8x^{-5}-5x^{-6}=\frac{6}{x^3}+\frac{8}{x^5}-\frac{5}{x^6}$

Aufgabe 6:

a) $f'(x)=\frac{10}{7}x^7-\frac{1}{3}x^3+x$

b) $g(x)=\frac{1}{4}x^{-4}-\frac{1}{30}x^{-6} \Rightarrow g'(x)=-x^{-5}+\frac{1}{5}x^{-7}$

c) $h(x)=\frac{3}{5}x^{15}-\sqrt{3}\cdot x+7x^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}x^{-2}+2\sqrt{3} \Rightarrow h'(x)=9x^{14}-\sqrt{3}+3{,}5x^{-\frac{1}{2}}-\frac{4}{3}x^{-3}$

d) $f(a)=a^{\frac{1}{2}}\cdot b \Rightarrow f'(a)=\frac{1}{2}b\cdot a^{-\frac{1}{2}}$

e) $f(b)=b^{\frac{1}{2}}\cdot a \Rightarrow f'(b)=\frac{1}{2}a\cdot b^{-\frac{1}{2}}$

f) $f'(a)=\sqrt{b}$

g) $f'(q)=10q$

h) $f'(x)=4ax+bx^{-2}$

i) $f(x)=\frac{x^2-4}{x}=\frac{x^2}{x}-\frac{4}{x}=x-4x^{-1} \Rightarrow f'(x)=1+4x^{-2}$

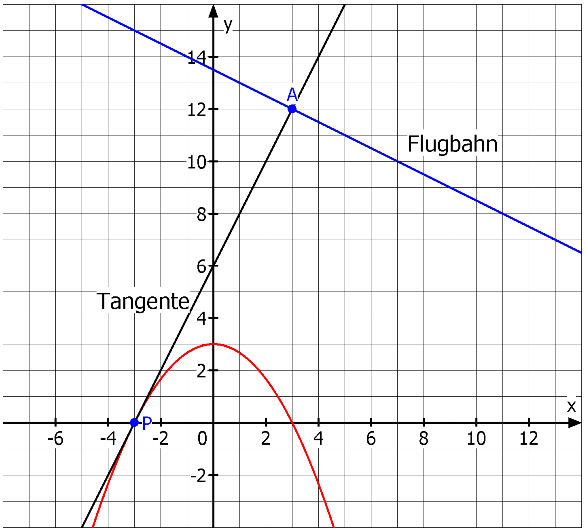
Aufgabe 7:

Es ist $f(x)=-\frac{1}{3}x^2+3$ mit $f'(x)=-\frac{2}{3}x$

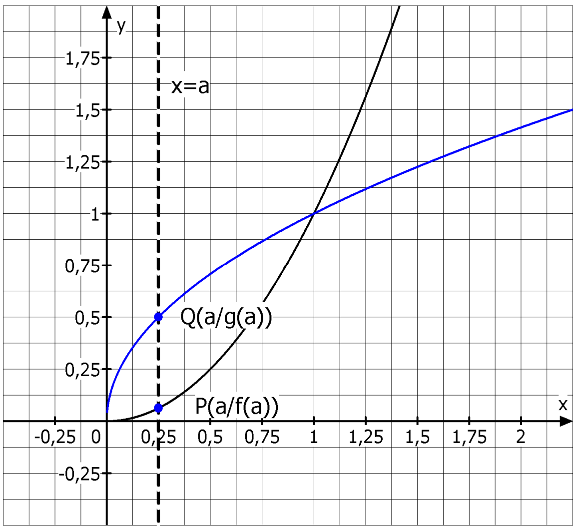
a) An der Stelle x = -3 fährt das Fahrzeug entlang der Tangente im Kurvenpunkt P(-3/f(-3)), Gesucht ist daher die Gleichung der Tangente im Punkt P.
Tangentenformel: $y=f'(-3)\cdot(x+3)+f(-3)$
Mit f(-3) = 0 und $f'(-3)=2$ folgt: $y=2(x+3)+0 \Rightarrow y=2x+6$

b) Der Punkt A(3/12) liegt auf der Tangente aus a).
Das Vorderrad fliegt auf einer Gerade, die orthogonal zur Tangente verläuft und den Punkt A(3/12) enthält.
Für die Steigung m der gesuchten Geraden gilt $m\cdot m_{Tangente}=-1 \Rightarrow m=-\frac{1}{2}$
Die gesuchte Gerade besitzt somit die Steigung m = -0,5 und läuft durch A(3/12).
Ansatz für die Geradengleichung: $y=mx+b$
Einsetzen der Steigung und des Punktes: $12=-0{,}5\cdot 3+b \Rightarrow b=13{,}5$

Die Gerade $y = -\frac{1}{2}x + 13{,}5$ stellt die Flugbahn des Reifens dar.



Aufgabe 8:
Die Tangenten in P(a/f(a)) und Q(a/g(a)) sind parallel, wenn gilt: $f'(a) = g'(a)$.



Es gilt $f'(x) = 2x$ und $g'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$.

Es muss gelten: $2a = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{a}}$ Mit dem GTR folgt $a \approx 0{,}397$

Aufgabe 9:
Es ist $f(x) = -0{,}5x^3 - 3x^2 - 5x$ und $f'(x) = -1{,}5x^2 - 6x - 5$
Tangentenformel im Punkt P(-2/f(-2)): $y = f'(-2)(x+2) + f(-2)$
Es ist $f(-2) = 2$ und $f'(-2) = 1$.
Tangentengleichung: $y = 1 \cdot (x+2) + 2 \Rightarrow y = x + 4$
Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse: $0 = x + 4 \Rightarrow x = -4$, also S(-4/0).

Normalenformel im Punkt P(-2/f(-2)): $y = -\frac{1}{f'(-2)} \cdot (x+2) + f(-2)$

Normalengleichung: $y = -\frac{1}{1}(x+2) + 2 \Rightarrow y = -x$

Schnittpunkt der Normale mit der x-Achse: $0 = -x \Rightarrow x = 0$, also R(0/0).

Aufgabe 10:

Es ist $f(x) = x^3$ mit $f'(x) = 3x^2$

Tangentenformel im Punkt P(-1/f(-1)): $y = f'(-1) \cdot (x+1) + f(-1)$

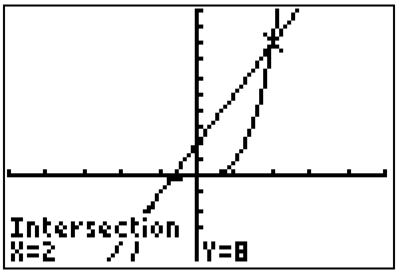
Es ist f(-1) = -1 und $f'(-1) = 3$

Tangentengleichung: $y = 3 \cdot (x+1) - 1 \Rightarrow y = 3x + 2$

Schnittpunkt der Tangente und des Schaubildes von f:

Ansatz: $x^3 = 3x + 2$

Lösung mit dem GTR:



Der weitere Schnittpunkt hat die Koordinaten Q(2/8).

Aufgabe 11:

Es ist $f(x) = x^2 + 2x + 1$ mit $f'(x) = 2x + 2$

Außerdem ist $g_a(x) = ax^2 - \frac{x}{2} + 1$ mit $g_a'(x) = 2ax - \frac{1}{2}$

Zunächst wird geprüft, ob S auf beiden Schaubildern liegt.

Es gilt $f(0) = g_a(0) = 1$ und damit liegt der Punkt S(0/1) auf den Schaubildern von f und von g_a für jeden Wert von a.

Tangentensteigung in S des Schaubildes von f: $f'(0) = 2$

Tangentensteigung in S des Schaubildes von g: $g_a'(0) = -0,5$

Da $f'(0) \cdot g_a'(0) = 2 \cdot (-0,5) = -1$ ergeben, schneiden sich die Tangenten in S senkrecht.

Somit schneiden sich auch die Schaubilder in S senkrecht.