Stochastik

Pfadregeln
Erwartungswert einer Zufallsvariablen
Vierfeldertafel

Gymnasium

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Oktober 2015

Aufgabe 1:
In einer Urne befinden sich drei gelbe, eine rote und zwei blaue Kugeln.
Es wird dreimal ohne Zurücklegen gezogen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,...
- "genau eine gelbe Kugel"
- "höchstens zwei gelbe Kugeln"
- "mindestens zwei gelbe oder mindestens 2 blaue Kugeln"
- "mindestens zwei gelbe oder eine rote Kugel"

zu erhalten ?

b) Berechne den Erwartungswert für die Anzahl der gezogenen gelben Kugeln bei obigem Experiment.

Aufgabe 2:
Die zwei Gauner Pete und Jesse spielen in Chicago in den 20er-Jahren folgendes Würfelspiel:
Es werden drei Würfel von Pete geworfen. Er erhält 10$, wenn genau eine Sechs dabei ist, 20$, wenn genau zwei Sechsen dabei sind und 30$, wenn alle Würfel Sechsen zeigen. Würfelt er keine Sechs, so muss er Jesse 10$ zahlen.

a) Bestimme die verschiedenen Wahrscheinlichkeiten für alle relevanten Würfelkombinationen.

b) Zeige, dass die Ereignisse E: "Der erste Würfel zeigt eine Sechs" und F: "Pete würfelt mindestens zwei Sechsen" voneinander abhängig sind.

c) Wie groß ist der durchschnittlich zu erwartende Gewinn bzw. Verlust pro Spiel für Pete ?

Aufgabe 3:
Der Spitz von Frau Walder bellt in 80% der Fälle , wenn jemand an der Haustüre steht.
In 10% aller Fälle ist es der Postbote . In 72% aller Fälle bellt der Spitz und es handelt sich bei der Person vor der Tür nicht um den Postboten. Stolz erzählt Frau Walder, dass der Hund "einen Riecher dafür habe", wenn es sich um den Postboten handelt und dann bellt.

a) Erstelle eine Vierfeldertafel und nimm Stellung zu Frau Walders Aussage.
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Spitz nicht bellt, wenn man weiß, dass der Postbote vor der Türe steht ?

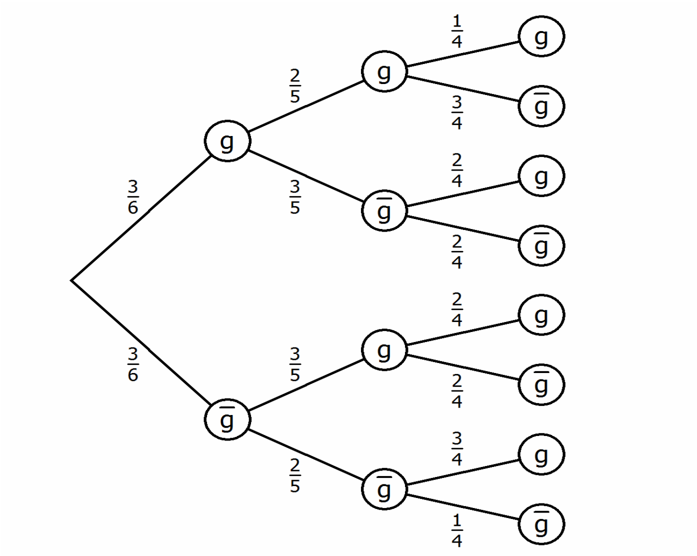
Aufgabe 4:
Ein Beutel enthält 20 Kugeln, von denen jede einzelne entweder rot oder blau ist.
Franz hat ausgerechnet , dass seine Wahrscheinlichkeit , eine rote und eine blaue Kugel (in beliebiger Reihenfolge) zu ziehen, genau 0,48 beträgt, wenn er zweimal mit Zurücklegen zieht.
a) Zeichne ein vollständiges Baumdiagramm zum Experiment von Franz, indem du der Wahrscheinlichkeit, eine blaue Kugel zu ziehen, den allgemeinen Wert p zuordnest.

b) Berechne wie viele blaue Kugeln in dem Beutel sein müssen.

Lösungen

Aufgabe 1:

a)



$P(\text{genau eine gelbe Kugel}) = P(\bar{g}\bar{g}g, \bar{g}g\bar{g}, g\bar{g}\bar{g}) = \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot 3 = 0{,}45$

$P(\text{höchstens zwei gelbe Kugeln}) = 1 - P(ggg) = 1 - \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} = 0{,}95$

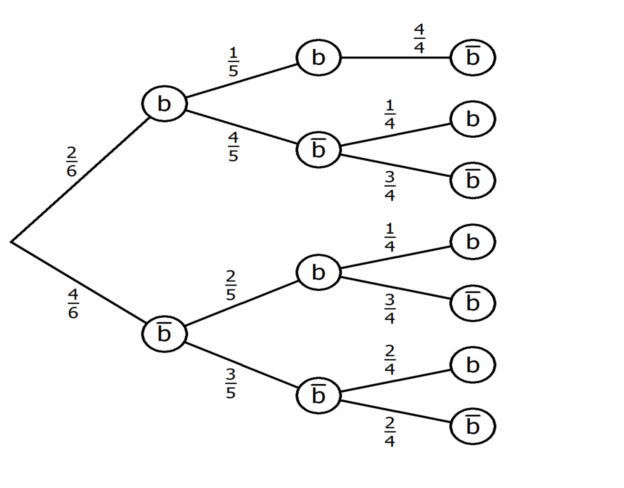
A: mindestens zwei gelbe Kugeln B: mindestens 2 blaue Kugeln

P(mindestens zwei gelbe oder mindestens 2 blaue Kugeln)

$= P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A) = 1 - P(\text{genau eine gelbe Kugel}) - P(\bar{g}\bar{g}\bar{g}) = 1 - 0{,}45 - \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} = 0{,}5$

$P(A \cap B) = 0$, da A und B nicht gleichzeitig eintreten kann



$P(B) = P(bb\bar{b}, b\bar{b}b, \bar{b}bb) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} \cdot 3 = 0{,}2$

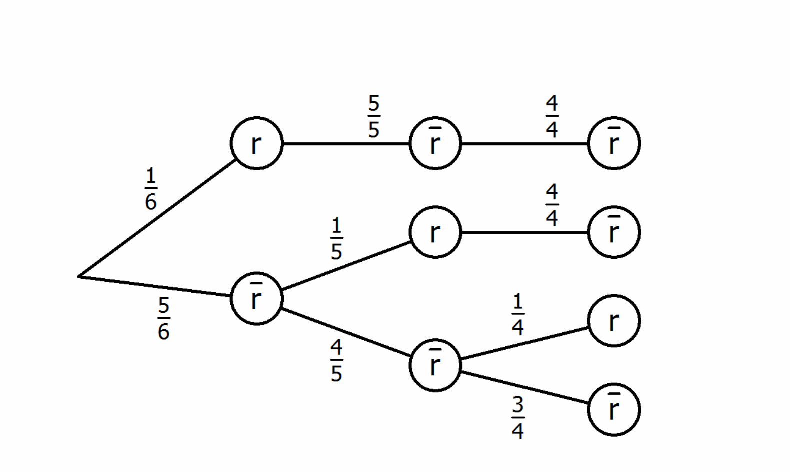
P(mindestens zwei gelbe oder mindestens 2 blaue Kugeln) =
$P(A \cup B) = 0{,}5 + 0{,}2 - 0 = 0{,}7$

A: mindestens zwei gelbe Kugeln C: eine rote Kugel

P(mindestens zwei gelbe oder eine rote Kugel)

$= P(A \cup C) = P(A) + P(B) - P(A \cap C)$

$P(A) = 0{,}5$



$P(C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{5} \cdot \frac{4}{4} \cdot 3 = 0{,}5$

$P(A \cap C) = P(ggr, grg, rgg) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 3 = 0{,}15$

P(mindestens zwei gelbe oder eine rote Kugel) $= P(A \cup C) = 0{,}5 + 0{,}5 - 0{,}15 = 0{,}85$

b) X = Anzahl der gelben Kugeln

$P(X = 0) = P(\bar{g}\bar{g}\bar{g}) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = 0{,}05$

$P(X = 1) = 0{,}45$ (siehe Teilaufgabe a))

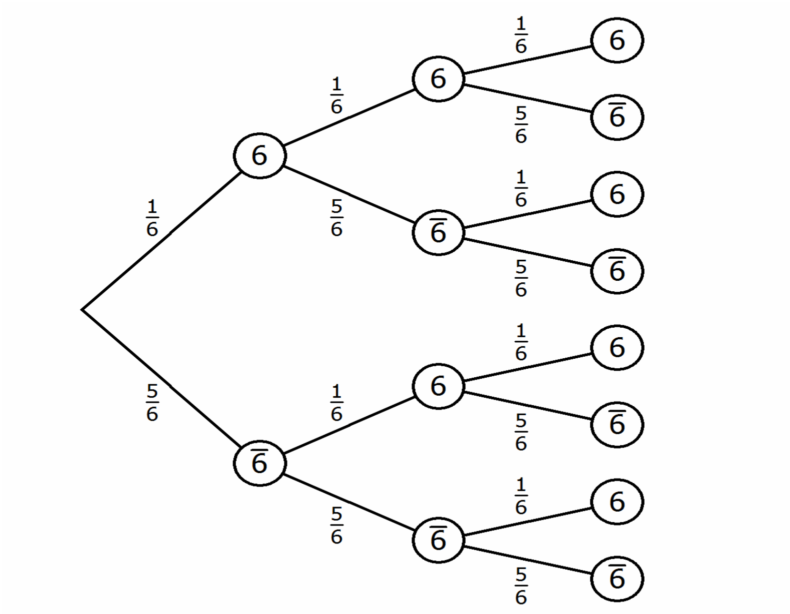
$P(X = 3) = P(ggg) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = 0{,}05$

$P(X = 2) = 1 - 0{,}05 - 0{,}45 - 0{,}05 = 0{,}45$

$E(X) = 0 \cdot 0{,}05 + 1 \cdot 0{,}45 + 3 \cdot 0{,}05 + 2 \cdot 0{,}45 = 1{,}5$

Aufgabe 2:

a)



P(keine Sechs) = $\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{125}{216}$

P(genau eine Sechs) = $P(6\bar{6}\bar{6},\bar{6}6\bar{6},\bar{6}\bar{6}6)=\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot 3=\frac{25}{72}$

P(genau zwei Sechser) = $P(66\bar{6},6\bar{6}6,\bar{6}66)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot 3=\frac{5}{72}$

P(genau 3 Sechser) = P(666) = $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$

b) $P(E)=\frac{1}{6}$ $\qquad P(F)=\frac{5}{72}+\frac{1}{216}=\frac{2}{27}$

$P(E\cap F)=P(666,66\bar{6},6\bar{6}6)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot 2=\frac{11}{216}$

Die Ereignisse E und F sind unabhängig, wenn gilt: $P(E\cap F)=P(E)\cdot P(F)$

Da $\frac{11}{216}\neq\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{27}$ ist, sind die Ereignisse E und F abhängig.

c) Die Zufallsvariable X sei der Gewinn von Pete.

$P(X=-10)=\frac{125}{216}$ $\qquad P(X=10)=\frac{25}{72}$

$P(X=20)=\frac{5}{72}$ $\qquad P(X=30)=\frac{1}{216}$

$E(X)=-10\cdot\frac{125}{216}+10\cdot\frac{25}{72}+20\cdot\frac{5}{72}+30\cdot\frac{1}{216}\approx -0{,}79$ \$

Pete verliert im Durchschnitt pro Spiel 0,79 $.

Aufgabe 3:
a) Vierfeldertafel:

	Hund bellt	Hund bellt nicht	
Postbote	8%	2%	**10%**
Kein Postbote	**72%**	18%	90%
	80%	20%	100%

Die Aussage von Frau Walder ist falsch.

Es sei HB: "Hund bellt" und PB: "Postbote steht vor der Tür".

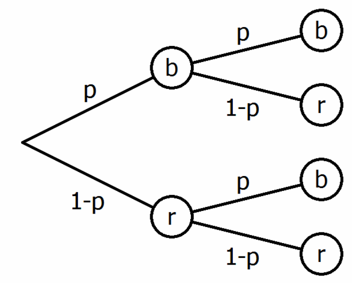
Es gilt $P(PB) = 0{,}1 = 10\%$

$$P_{HB}(PB) = \frac{P(HB \cap PB)}{P(HB)} = \frac{0{,}08}{0{,}8} = 0{,}1 = 10\%$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Postbote klingelt beträgt 10%, auch wenn vorausgesetzt wird, dass der Hund bellt.
Das Bellen des Hundes erhöht also nicht die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es der Postbote ist.

b) $P_{PB}(\overline{HB}) = \frac{P(\overline{HB} \cap PB)}{P(PB)} = \frac{0{,}02}{0{,}1} = 0{,}2 = 20\%$

Aufgabe 4:
a)



b) $P(br, rb) = p \cdot (1-p) + (1-p) \cdot p = 0{,}48$

$\Rightarrow p - p^2 + p - p^2 = 0{,}48 \Rightarrow -2p^2 + 2p - 0{,}48 = 0$

$$p_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-2) \cdot (-0{,}48)}}{-4} = \frac{-2 \pm 0{,}4}{-4}$$

Daraus folgt p = 0,4 oder p = 0,6.
Bei insgesamt 20 Kugeln müssen entweder $0{,}4 \cdot 20 = 8$ blaue Kugeln in dem Beutel sein oder $0{,}6 \cdot 20 = 12$ blaue Kugeln.