Analysis

Klausur zu e-Funktionen und Integralrechnung
(Ableitung, Stammfunktion, Integrale)
(Bearbeitungszeit: 90 Minuten)

Gymnasium J1

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Januar 2015

Pflichtteil - ohne Hilfsmittel

Aufgabe 1:
Gib die Ableitungsfunktion an.

a) $f(x)=e^{2x}$ b) $f(x)=3{,}5e^{2x+1}$ c) $f(x)=2e^{x}+x+1$ d) $g(x)=x^{2}e^{x}$

Aufgabe 2:
Löse die Gleichung.

a) $x^{3}-3x^{2}+2x=0$ b) $e^{3x}-5e^{x}=0$ c) $e^{x}=3+\frac{10}{e^{x}}$

Aufgabe 3:
Gib zur Funktion f jeweils eine Stammfunktion an.

a) $f(x)=5-6x^{9}$ b) $f(x)=\frac{1}{x^{2}}+1+x^{2}$ c) $f(x)=(2x-3)^{2}$ d) $f(x)=\frac{-2x^{3}+4x^{5}}{x^{2}}$

e) Berechne $\int_{-1}^{1}(4x^{3}+2x)dx$

f) Bestimme die obere Grenze a > 0 für $\int_{1}^{a}(2x^{3})dx=40$

Aufgabe 4:
Gegeben ist die Funktion $f(x)=x^{2}-4$.

a) Skizziere den Graphen.
b) Berechne das Integral für das Intervall [-1 ;3].
c) Berechne den Inhalt der Fläche zwischen dem Schaubild der Funktion f und der x-Achse in dem Intervall [-1 ; 3].

Wahlteil - mit GTR und Formelsammlung

Aufgabe 5:
Gegeben sind die Funktionen $f_t(x)=e^{tx}-1$ (t > 0).

a) Für welchen Wert von t ist $f_t(2)=5$
b) Für welchen Wert von t schneidet der Graph von f_t' die x-Achse im Punkt S(0/3) ?
c) Zeige, das die Graphen von f_t genau einen gemeinsamen Punkt haben.

Aufgabe 6:
Für die Zuwachsrate z einer Pflanzenpopulation für die nächsten 20 Jahre wird folgende Modellannahme zugrunde gelegt:

$z(t)=0{,}01\cdot t\cdot(t-10)\cdot(t-20)$ (t in Jahren, z(t) in $\frac{\text{Pflanzen}}{\text{Jahr}}$)

a) Skizziere den Graphen von z.
b) Bestimme anhand dieses Graphen, in welchen Zeiträumen der Bestand zunimmt bzw. abnimmt. Wann ist der Bestand maximal ?
c) Zur Zeit t = 0 sind 100 Pflanzen vorhanden. Bestimme den Minimal- und den Maximalbestand in den nächsten 20 Jahren.

Lösungen

Aufgabe 1:

a) $f(x) = e^{2x}$ $\quad f'(x) = 2 \cdot e^{2x}$ (Kettenregel)

b) $f(x) = 3{,}5e^{2x+1}$ $\quad f'(x) = 3{,}5 \cdot e^{2x+1} \cdot 2 = 7 \cdot e^{2x+1}$ (Kettenregel)

c) $f(x) = 2e^{x} + x + 1$ $\quad f'(x) = 2e^{x} + 1$

d) $g(x) = x^2 e^x$
$g'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = x \cdot e^x \cdot (2 + x)$ (Produktregel)

Aufgabe 2:

a) $x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \quad \Rightarrow x \cdot \left(x^2 - 3x + 2\right) = 0$
Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt:
Gleichung I): $x = 0$
Gleichung II): $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 2$ und $x_2 = 1$
L = {0 ; 2 ; 1}

b) $e^{3x} - 5e^{x} = 0 \quad \Rightarrow e^x \cdot \left(e^{2x} - 5\right) = 0$
Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt:
Gleichung I): $e^x = 0$ ist nicht lösbar
Gleichung II): $e^{2x} - 5 = 0 \Rightarrow e^{2x} = 5 \Rightarrow x = \frac{\ln(5)}{2}$
L = { $\frac{\ln(5)}{2}$ }

c) $e^x = 3 + \frac{10}{e^x} \quad \overset{\cdot e^x}{\Rightarrow} e^{2x} = 3e^x + 10 \quad \Rightarrow e^{2x} - 3e^x - 10 = 0$
Substitution: $u = e^x \quad \Rightarrow u^2 - 3u - 10 = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} \Rightarrow u_1 = 5,\ u_2 = -2$
Rücksubstitution: $e^x = 5 \Rightarrow x = \ln(5)$
$e^x = -2$ ist nicht lösbar
L = { ln(5) }

Aufgabe 3:

a) $f(x) = 5 - 6x^9 \quad \Rightarrow F(x) = 5x - \frac{6}{10}x^{10} = 5x - \frac{3}{5}x^{10}$

b) $f(x)=\frac{1}{x^2}+1+x^2=x^{-2}+1+x^2$

$\Rightarrow F(x)=-x^{-1}+x+\frac{1}{3}x^3 \int_{-1}^{3}(x^2-4)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-4x\right]_{-1}^{3}=\frac{1}{3}\cdot 3^3-4\cdot 3-(\frac{1}{3}\cdot(-1)^3-4\cdot(-1))=$

c) $f(x)=(2x-3)^2 \quad \Rightarrow F(x)=\frac{1}{3}(2x-3)^3\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}(2x-3)^3$

d) $f(x)=\frac{-2x^3+4x^5}{x^2}=\frac{-2x^3}{x^2}+\frac{4x^5}{x^2}=-2x+4x^3 \quad \Rightarrow F(x)=-x^2+x^4$

e) $\int_{-1}^{1}(4x^3+2x)dx=\left[x^4+x^2\right]_{-1}^{1}=1^4+1^2-((-1)^4+(-1)^2)=0$

Hinweis: Man könnte das Ergebnis 0 auch ohne Berechnung angeben, indem man mit der Ursprungssymmetrie des Schaubildes von f(x) argumentiert.

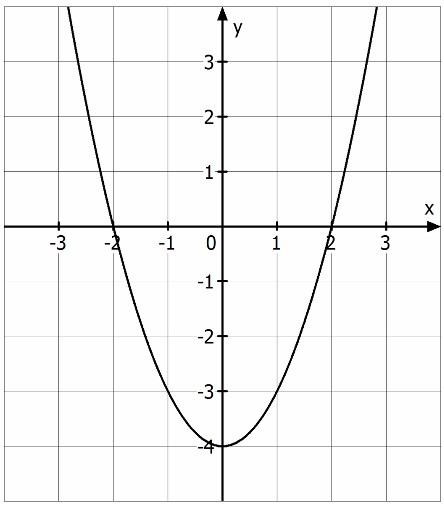
f) $\int_{1}^{a}(2x^3)dx=40 \quad \Rightarrow \left[0{,}5x^4\right]_{1}^{a}=0{,}5a^4-0{,}5=40 \Rightarrow 0{,}5a^4=40{,}5 \Rightarrow a^4=81$

$\Rightarrow a=\pm\sqrt[4]{81}=\pm 3$

Da a > 0 sein soll, kommt nur a = 3 in Frage.

Aufgabe 4:

a) Skizze des Graphen:



b) $\int_{-1}^{3}(x^2-4)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-4x\right]_{-1}^{3}=\frac{1}{3}\cdot 3^3-4\cdot 3-(\frac{1}{3}\cdot(-1)^3-4\cdot(-1))$

$=9-12+\frac{1}{3}-4=-\frac{20}{3}$

c) Für die Flächenberechnung wird zunächst die Fläche unterhalb der x-Achse berechnet:

$$\int_{-1}^{2}(x^2-4)dx = \left[\frac{1}{3}x^3-4x\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{3}\cdot 2^3-4\cdot 2-\left(\frac{1}{3}\cdot(-1)^3-4\cdot(-1)\right)$$

$$= \frac{8}{3}-8+\frac{1}{3}-4=-9$$

Damit beträgt der Flächeninhalt unterhalb der x-Achse $A_1 = 9$

Die Fläche oberhalb der x-Achse beträgt $A_2 = 9-\frac{20}{3}=\frac{7}{3}$

Die Gesamtfläche beträgt $A = 9+\frac{7}{3}=\frac{34}{3}$ Flächeneinheiten

Aufgabe 5:

$f_t(x) = e^{tx} - 1$

a) Bedingung: $f_t(2) = 5 \quad \Rightarrow 5 = e^{2t} - 1 \Rightarrow e^{2t} = 6 \Rightarrow t = \frac{\ln(6)}{2}$

b) Es ist $f_t'(x) = t \cdot e^{tx}$
Bedingung: $f_t'(0) = 3 \quad \Rightarrow 3 = t \cdot e^0 \Rightarrow t = 3$

c) Es werden zwei konkrete Parameter t = 1 und t = 2 ausgewählt und deren Schaubilder geschnitten:

$f_1(x) = f_2(x) \Rightarrow e^x - 1 = e^{2x} - 1 \Rightarrow e^x = e^{2x} \Rightarrow x = 2x \Rightarrow x = 0$

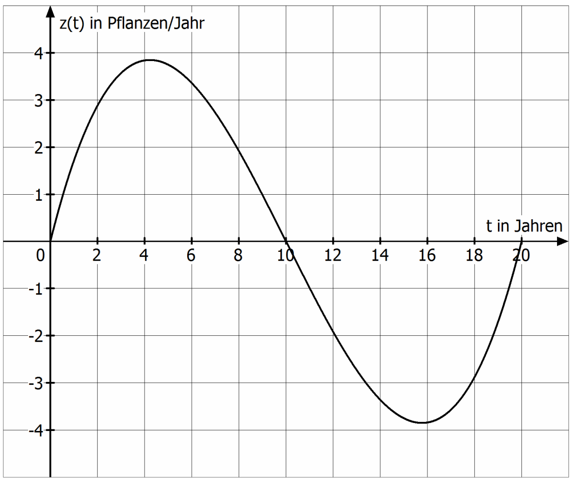
$f_1(0) = -1$
Die beiden Schaubilder schneiden sich im Punkt S(0/-1)

Nachweis, dass S auf allen Scharkurven liegt: $f_t(0) = e^{t \cdot 0} - 1 = -1$ für alle Parameter t.

Aufgabe 6:

$z(t) = 0{,}01 \cdot t \cdot (t - 10) \cdot (t - 20)$

a) Skizze:



b) Der Bestand nimmt zu im Intervall [0 ; 10], da z(t) oberhalb der t-Achse liegt.
Der Bestand nimmt ab im Intervall [10 ; 20], da z(t) unterhalb der t-Achse liegt.
Zum Zeitpunkt t = 10 Jahren ist der Bestand maximal.

c) Maximalbestand: $100 + \int_0^{10} z(t)dt = 100 + 25 = 125$ Pflanzen

Minimalbestand: $100 + \int_0^{20} z(t)dt = 100 + 0 = 100$ Pflanzen.

Der Bestand ist mit 100 Pflanzen minimal zu den Zeitpunkten t = 0 (Anfangsbestand) und t = 20.