

# **Analytische Geometrie**

## **Übungsaufgaben Abstand Punkt Gerade**

### **Oberstufe**

Alexander Schwarz

[www.mathe-aufgaben.com](http://www.mathe-aufgaben.com)

November 2015

**Aufgabe 1:**

Bestimme den Abstand des Punktes  $R(-4/9/-1)$  von der Geraden  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 2:**

a) Berechne den Abstand des Punktes  $R(10/-4/-9)$  von der Geraden  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

b) Berechne den Abstand des Punktes  $R(-8/-5/6)$  von der Geraden  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 3:**

Bestimme den Abstand der parallelen Geraden  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 4:**

Gegeben ist das Dreieck ABC mit  $A(-2/-4/-4)$ ,  $B(2/9/3)$  und  $C(-2/11/-1)$ .  
Bestimme den Inhalt der Fläche des Dreiecks.

## Lösungen

### Aufgabe 1:

Im ersten Schritt muss der Lotfußpunkt F auf der Geraden g bestimmt werden.  
Ein allgemeiner Punkt auf g hat die Koordinaten  $F(1+3t/-1+4t/1-2t)$ .

$$\text{Es ist } \overrightarrow{RF} = \begin{pmatrix} 5+3t \\ -10+4t \\ 2-2t \end{pmatrix}$$

Der Lotfußpunkt ergibt sich mit der Bedingung  $\overrightarrow{RF} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$ .

$$\begin{pmatrix} 5+3t \\ -10+4t \\ 2-2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 15+9t-40+16t-4+4t=0 \Rightarrow 29t-29=0 \Rightarrow t=1$$

Der Lotfußpunkt hat die Koordinaten  $F(4/3/-1)$ .

$$\text{Der Abstand beträgt } |\overrightarrow{RF}| = \left| \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{64+36} = 10$$

### Aufgabe 2:

a) Im ersten Schritt muss der Lotfußpunkt F auf der Geraden g bestimmt werden.  
Ein allgemeiner Punkt auf g hat die Koordinaten  $F(-7+12t/5-9t/-2+5t)$ .

$$\text{Es ist } \overrightarrow{RF} = \begin{pmatrix} -17+12t \\ 9-9t \\ 7+5t \end{pmatrix}$$

Der Lotfußpunkt ergibt sich mit der Bedingung  $\overrightarrow{RF} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$ .

$$\begin{pmatrix} -17+12t \\ 9-9t \\ 7+5t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix} = -204+144t-81+81t+35+25t=0 \Rightarrow 250t-250=0 \Rightarrow t=1$$

Der Lotfußpunkt hat die Koordinaten  $F(5/-4/3)$ .

$$\text{Der Abstand beträgt } |\overrightarrow{RF}| = \left| \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{25+144} = 13$$

- b) Im ersten Schritt muss der Lotfußpunkt F auf der Geraden g bestimmt werden.  
Ein allgemeiner Punkt auf g hat die Koordinaten  $F(7+2t/4t/-9-6t)$ .

$$\text{Es ist } \overrightarrow{RF} = \begin{pmatrix} 15+2t \\ 5+4t \\ -15-6t \end{pmatrix}$$

$$\text{Der Lotfußpunkt ergibt sich mit der Bedingung } \overrightarrow{RF} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} = 0.$$

$$\begin{pmatrix} 15+2t \\ 5+4t \\ -15-6t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} = 30 + 4t + 20 + 16t + 90 + 36t = 0 \Rightarrow 56t + 140 = 0 \Rightarrow t = -2,5$$

Der Lotfußpunkt hat die Koordinaten  $F(2/-10/6)$ .

$$\text{Der Abstand beträgt } |\overrightarrow{RF}| = \left| \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{100 + 25} = \sqrt{125}$$

### Aufgabe 3:

Die Geraden g und h sind parallel, da ihre Richtungsvektoren Vielfache zueinander sind.

Wir wählen auf der Gerade h einen beliebigen Punkt  $R(-1/5/-3)$ .

Der Abstand der beiden Geraden entspricht dem Abstand des Punktes R von der Geraden g.

Im ersten Schritt muss der Lotfußpunkt F auf der Geraden g bestimmt werden.

Ein allgemeiner Punkt auf g hat die Koordinaten  $F(-5+4t/3t/2+t)$ .

$$\text{Es ist } \overrightarrow{RF} = \begin{pmatrix} -4+4t \\ -5+3t \\ 5+t \end{pmatrix}$$

$$\text{Der Lotfußpunkt ergibt sich mit der Bedingung } \overrightarrow{RF} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

$$\begin{pmatrix} -4+4t \\ -5+3t \\ 5+t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -16 + 16t - 15 + 9t + 5 + t = 0 \Rightarrow 26t - 26 = 0 \Rightarrow t = 1$$

Der Lotfußpunkt hat die Koordinaten  $F(-1/3/3)$ .

$$\text{Der Abstand beträgt } |\overrightarrow{RF}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40}$$

#### Aufgabe 4:

Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks:  $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$ .

Die Grundseite  $g$  entspricht der Länge des Vektors  $\overrightarrow{AB}$ .

$$|\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{16 + 169 + 49} = \sqrt{234}$$

Die Höhe  $h$  des Dreiecks entspricht dem Abstand des Punktes  $C(-2/11/-1)$  von der Geraden durch  $A$  und  $B$ .

$$\text{Geradengleichung durch } A \text{ und } B: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Nun muss der Lotfußpunkt  $F$  auf der Geraden bestimmt werden.

Ein allgemeiner Punkt auf der Gerade hat die Koordinaten  $F(-2+4t/-4+13t/-4+7t)$ .

$$\text{Es ist } \overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} 4t \\ -15+13t \\ -3+7t \end{pmatrix}$$

$$\text{Der Lotfußpunkt ergibt sich mit der Bedingung } \overrightarrow{CF} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix} = 0.$$

$$\begin{pmatrix} 4t \\ -15+13t \\ -3+7t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix} = 16t - 195 + 169t - 21 + 49t = 0 \Rightarrow 234t - 216 = 0 \Rightarrow t = \frac{12}{13}$$

Der Lotfußpunkt hat die Koordinaten  $F(\frac{22}{13} / 8 / \frac{32}{13})$

$$\text{Der Abstand beträgt } |\overrightarrow{CF}| = \left| \begin{pmatrix} 48/13 \\ -3 \\ 45/13 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\frac{450}{13}}$$

$$\text{Fläche des Dreiecks: } A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{234} \cdot \sqrt{\frac{450}{13}} = 45$$