

Analytische Geometrie

Übungsaufgaben Ebenengleichung in Parameterform

Oberstufe

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

November 2015

Aufgabe 1:

Prüfe, ob die Punkte $P(3/3/9)$ und $R(-1/-5/-1)$ in der Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ liegen.

Aufgabe 2:

Bestimme zwei verschiedene Parameterdarstellungen der Ebene E , in der die Punkte $P(2/3/1)$, $Q(-2/0/-2)$ und $R(4/4/0)$ liegen.

Aufgabe 3:

$R(0/3/3)$ ist ein Punkt, der nicht auf der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ liegt.

Bestimme eine Parametergleichung der Ebene E , in der R und die Gerade g liegen.

Aufgabe 4:

a) Weise nach, dass sich die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ im

Punkt $S(4/4/-1)$ schneiden und bestimme eine Parametergleichung der Ebene E , in der g und h verlaufen.

b) Weise nach, dass die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ parallel sind

und bestimme eine Parametergleichung der Ebene E , in der g und h verlaufen.

Aufgabe 5:

Die drei Punkte $A(3/2/2)$, $B(1/2/3)$ und $C(-4/3/3)$ liegen in einer Ebene E . Bestimme den Wert von a so, dass der Punkt $D(5/2/a)$ ebenfalls in E liegt.

Lösungen

Aufgabe 1:

Kontrolle, ob $P(3/3/9)$ auf E liegt:
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aus der 1. Zeile: $3 = 2 + s \Rightarrow s = 1$

Aus der 2. Zeile: $3 = 1 + 2s + 2t \Rightarrow t = 0$

Aus der 3. Zeile: $9 = 4 + 5s + t \Rightarrow 9 = 9$ ist eine wahre Aussage

Da das Gleichungssystem für $s = 1$ und $t = 0$ lösbar ist, liegt P auf E .

Kontrolle, ob $R(-1/-5/-1)$ auf E liegt:
$$\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aus der 1. Zeile: $-1 = 2 + s \Rightarrow s = -3$

Aus der 2. Zeile: $-5 = 1 + 2s + 2t \Rightarrow t = 0$

Aus der 3. Zeile: $-1 = 4 + 5s + t \Rightarrow -1 = -11$ ist eine falsche Aussage

Da das Gleichungssystem nicht lösbar ist, liegt R nicht auf E .

Aufgabe 2:

1. Gleichung: $\vec{x} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \overrightarrow{PQ} + s \cdot \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. Gleichung: $\vec{x} = \overrightarrow{OR} + r \cdot \overrightarrow{RQ} + s \cdot \overrightarrow{RP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3:

Parametergleichung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2-0 \\ 1-3 \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4:

a) Zunächst wird kontrolliert, ob der Punkt $S(4/4/-1)$ auf den Geraden g und h liegt.

Kontrolle, ob S auf g liegt:
$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aus allen 3 Zeilen ergibt sich $r = 1$. Daher liegt $S(4/4/-1)$ auf g .

Aufgrund der Ortsvektorkoordinaten von h liegt $S(4/4/-1)$ auch auf h .

Damit schneiden sich die beiden Geraden in S.

$$\text{Parametergleichung von E: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) Die beiden Geraden haben vielfache Richtungsvektoren, daher sind die Geraden parallel.

Nachweis, dass die Geraden nicht identisch sind:

$$\text{Kontrolle ob der Punkt P(2/1/0), der auf g liegt nicht auch auf h liegt: } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aus der 1.Zeile folgt $s = -1$.

Aus der 2.Zeile folgt $s = \frac{2}{3}$.

Damit liegt P(2/1/0) nicht auf h.

$$\text{Parametergleichung von E: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0-2 \\ 3-1 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5:

$$\text{Aufstellen der Ebene E: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Punktprobe für den Punkt D: } \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aus der 2.Zeile folgt: $2 = 2 + s \Rightarrow s = 0$

Aus der 1.Zeile folgt: $5 = 3 - 2r - 0 \Rightarrow r = -1$

Aus der 3.Zeile folgt: $a = 2 - 1 + 0 \Rightarrow a = 1$