Analytische Geometrie

Übungsaufgaben
Geraden

Oberstufe

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Oktober 2015

Aufgabe 1:

a) Der Punkt R(-1/b/c) liegt auf der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Bestimme b und c.

b) Bestimme a und b so, dass der Punkt R(4/5/b) auf der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix}$ liegt.

Aufgabe 2:
Gegeben ist das Dreieck ABC mit A(2/3/0), B(-1/0/3) und C(0/1/4).
Bestimme die Gleichungen der drei Geraden, die auf der Seite $\overline{AB}$ bzw. auf der Seite $\overline{BC}$ bzw. auf der Seite $\overline{AC}$ liegen.

Aufgabe 3:
Untersuche, wie die Geraden g, h und k zueinander liegen. Sofern sie sich schneiden, gib den Schnittpunkt an.

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ k: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4:
a) Gib Werte für a, b, c, d an, so dass die Geraden g und h parallel, aber nicht identisch sind.

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ b \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ c \\ d \end{pmatrix}$

b) Gib Werte für a, b, c, d an, so dass die Geraden g und h windschief sind.

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix}$

Aufgabe 5:
Um einen Tunnel zu bauen, beginnen zwei Bautrupps von den Enden aus gleichzeitig zu graben. Trupp A gräbt von A(-0,4/1,6/3,6) aus in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, Trupp B gräbt von B(3/-1/2) aus in Richtung $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Zeige, dass sich die beiden Bohrtrupps nicht treffen werden.
b) Als Trupp B am Punkt P(3,4/-0,7/2,1) angekommen ist, bemerken sie ihren Irrtum. In welche Richtung muss Trupp B nun weitergraben, wenn sich die beiden Trupps im Punkt T(3,6/0,6/2,6) treffen sollen ?
c) Muss Trupp A ebenfalls irgendwann eine Richtungsänderung vornehmen ?

Lösungen

Aufgabe 1:

a) Punktprobe von R: $\begin{pmatrix}-1\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$

Aus der 1.Zeile folgt: $-1=2+2r \Rightarrow r=-1{,}5$
Aus der 2.Zeile folgt: $b=1-4{,}5=-3{,}5$
Aus der 3.Zeile folgt: $c=0+1{,}5=1{,}5$

b) Punktprobe von R: $\begin{pmatrix}4\\5\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\c\\2\end{pmatrix}$

Aus der 1.Zeile folgt: $4=3+r \Rightarrow r=1$
Aus der 2.Zeile folgt: $5=1+a \Rightarrow a=4$
Aus der 3.Zeile folgt: $b=-1+2=1$

Aufgabe 2:

Gerade auf $\overline{AB}$: g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-3\\-3\\3\end{pmatrix}$

Gerade auf $\overline{AC}$: g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-2\\-2\\4\end{pmatrix}$

Gerade auf $\overline{BC}$: g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Aufgabe 3:

Lage der Geraden g und k:

Die Richtungsvektoren der beiden Geraden sind Vielfache: $-2\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-6\\-6\end{pmatrix}$.

Die Geraden sind daher entweder identisch oder echt parallel.

Kontrolle, ob der Punkt P(1/2/0), der auf g liegt, auch auf k liegt: $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\\6\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\-6\\-6\end{pmatrix}$

Aus der 1.Zeile folgt r = -1,5 und aus der 2.Zeile $r=\frac{1}{6}$.
Damit liegt P nicht auf der Geraden k. Die Geraden g und k sind echt parallel.

Lage der Geraden g und h:
Die Richtungsvektoren der beiden Geraden sind keine Vielfache.
Daher schneiden sich g und h oder sie sind windschief zueinander.

Prüfung durch Gleichsetzen:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-4\\-6\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{array}{rrcrr} 1 & -r & = & 3 & +3s \\ 2 & +3r & = & -4 & +s \\ 0 & +3r & = & -6 & +2s \end{array}$$

Aus der 1.Zeile folgt: $r=-2-3s$ (*)
Einsetzen in 2.Zeile: $2+3(-2-3s)=-4+s \Rightarrow -4-9s=-4+s \Rightarrow s=0$
Aus (*) folgt dann r = -2
Prüfung mit Zeile 3: $0+3\cdot(-2)=-6+0$ ist eine wahre Aussage
Die Geraden g und h schneiden sich.
Einsetzen von s = 0 in die Gerade h ergibt den Schnittpunkt S(3/-4/-6).

Lage der Geraden h und k:
Die Richtungsvektoren der beiden Geraden sind keine Vielfache.
Daher schneiden sich h und k oder sie sind windschief zueinander.

Prüfung durch Gleichsetzen:

$$\begin{pmatrix}4\\3\\6\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\-6\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-4\\-6\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{array}{rrcrr} 4 & +2r & = & 3 & +3s \\ 3 & -6r & = & -4 & +s \\ 6 & -6r & = & -6 & +2s \end{array}$$

Aus der 1.Zeile folgt: $r=-0,5+1,5s$ (*)
Einsetzen in 2.Zeile: $3-6(-0,5+1,5s)=-4+s \Rightarrow 6-9s=-4+s \Rightarrow s=1$
Aus (*) folgt dann r = 1
Prüfung mit Zeile 3: $6-6\cdot 1=-6+2$ ist eine falsche Aussage
Die Geraden h und k sind windschief zueinander.

Aufgabe 4:

a) g und h sind parallel, wenn die Richtungsvektoren Vielfache zueinander sind:

$$k\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\c\\d\end{pmatrix}$$ Aus Zeile 1: k = 2; aus Zeile 2: c = 6 ; aus Zeile 3: d = 8.

a und b müssen so gewählt werden, dass der Punkt P(2/a/b) nicht auf der Geraden h liegt. Für die Wahl von a und b gibt es viele Lösungsmöglichkeiten:

$$\begin{pmatrix}2\\a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\c\\d\end{pmatrix}$$

Aus Zeile 1 folgt s = 1.
Damit der Punkt nicht auf der Geraden h liegt muss aus Zeile 2 folgen: $a\neq 1+1\cdot 6$.
Damit der Punkt nicht auf der Geraden h liegt, muss aus Zeile 3 folgen: $b\neq -2+1\cdot 8$
Es dürfen für a und b alle Zahlenwerte gewählt werden, nur nicht a = 7 und b = 6.

b) Der Richtungsvektor der Geraden h darf kein Vielfaches vom Richtungsvektor von g sein.
Es gibt unendlich viele Möglichkeiten für die Werte von b, c und d.
Beispielsweise wäre möglich b = 1, c = 0 und d = 0.

Der Wert a muss so gewählt werden, dass beim Gleichsetzen der Geraden keine Lösung existiert.

$$\begin{pmatrix}1\\0\\a\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Aus der 3.Zeile folgt, dass a nicht 2 sein darf. Ansonsten sind alle Zahlenwerte für a möglich.

Aufgabe 5:

a) Tunnelgerade Trupp A: g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-0,4\\1,6\\3,6\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix}$

Tunnelgerade Trupp B: h: $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}$

Kontrolle, ob die Geraden g und h sich schneiden:
Die Geraden haben keine Vielfachen Richtungsvektoren, daher schneiden sich die Geraden oder sie sind zueinander windschief.

Prüfung durch Gleichsetzen:

$$\begin{pmatrix}-0,4\\1,6\\3,6\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{array}{lllll}-0,4 & +4r & = & 3 & +4s\\ 1,6 & -r & = & -1 & +3s\\ 3,6 & -r & = & 2 & +s\end{array}$$

Aus der 2.Zeile folgt: $r=2,6-3s$ (*)
Einsetzen in 1.Zeile: $-0,4+4(2,6-3s)=3+4s\Rightarrow 10-12s=3+4s\Rightarrow s=0,4375$
Aus (*) folgt dann r = 1,2875
Prüfung mit Zeile 3: $3,6-1,2875=2+0,4375$ ist eine falsche Aussage
Die Geraden g und h sind windschief zueinander.

b) Trupp B muss in Richtung $\overrightarrow{PT}=\begin{pmatrix}0,2\\1,3\\0,5\end{pmatrix}$ weiter bohren.

c) Kontrolle, ob der Punkt T(3,6/0,6/2,6) auf der Geraden g liegt:

$$\begin{pmatrix}3,6\\0,6\\2,6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0,4\\1,6\\3,6\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

Alle 3 Zeilen haben die Lösung r = 1.
Da der Punkt T auf der Bohrgeraden des Trupps A liegt, muss Trupp A keine Richtungsänderung vornehmen.