

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

# Aufgabensammlung

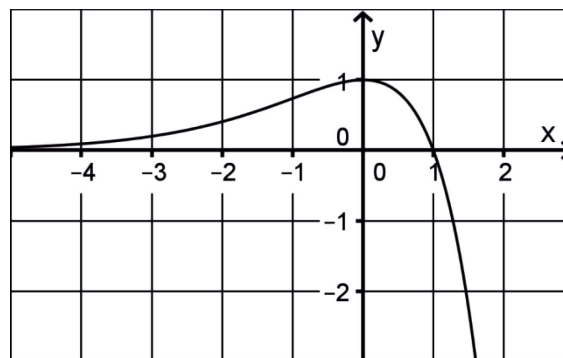
Aufgabe für das Fach Mathematik

## Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet	digitales Hilfsmittel
grundlegend	B	Analysis	WTR

## 1 Aufgabe

Die Abbildung zeigt den Graphen  $G_f$  der Funktion  $f : x \mapsto (1-x) \cdot e^x$  mit Definitionsbereich  $\mathbb{R}$ .



Für die zweite Ableitung von  $f$  gilt  $f''(x) = -(1+x) \cdot e^x$ .

- 1 a** Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von  $G_f$  mit den Koordinatenachsen. 3
- b** Bestimmen Sie rechnerisch Monotonie und Krümmungsverhalten von  $G_f$ . 6
- c** Ermitteln Sie rechnerisch die Gleichung der Tangente an den Graphen von  $f$  in dessen Wendepunkt. 4
- d** Auf der  $y$ -Achse gibt es Punkte, die auf einer Tangente an  $G_f$  liegen. Geben Sie die  $y$ -Koordinaten dieser Punkte an und begründen Sie Ihre Angabe mithilfe des Verlaufs von  $G_f$ . 3

BE

e Betrachtet werden alle Rechtecke ABCD, die folgende Bedingungen erfüllen: 5

- ♦ Die Punkte  $B(1|0)$  und  $D(u|f(u))$  mit  $u \in ]-\infty; 1[$  sind Eckpunkte.
- ♦ Die Seiten sind parallel zu den Koordinatenachsen.

Zeichnen Sie ein solches Rechteck in die Abbildung ein.

Die folgenden Aussagen I, II und III stellen im Zusammenhang mit den beschriebenen Rechtecken die Lösung einer Aufgabe dar:

I  $R(u) = (1-u) \cdot f(u)$

II  $R'(u) = 0 \Leftrightarrow u = -1$  und es gilt  $R''(-1) < 0$

III  $R(-1) \approx 1,5$

Formulieren Sie die zugehörige Aufgabenstellung und beschreiben Sie die Bedeutung jeder Aussage im Zusammenhang mit den beschriebenen Rechtecken.

f Für ein  $a \in \mathbb{R}$  ist die in  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $F: x \mapsto (a-x) \cdot e^x$  eine Stammfunktion von  $f$ . Bestimmen Sie den Wert von  $a$ . 3

(zur Kontrolle:  $a = 2$ )

2 Betrachtet wird ein 150 m langer Abschnitt eines Damms. Die Profillinie des Querschnitts des Damms wird für  $-4 \leq x \leq 1$  modellhaft durch die Funktion  $f$  beschrieben, und zwar für  $-4 \leq x \leq 0$  auf der Seeseite und für  $0 \leq x \leq 1$  auf der Landseite. Das Modell geht von einer horizontalen Grundfläche des Damms aus, die im Querschnitt durch die  $x$ -Achse beschrieben wird. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 10 m in der Realität.

a Berechnen Sie das Volumen dieses Abschnitts des Damms. 5

b Bestimmen Sie für die Seeseite des Damms rechnerisch die mittlere und die größte Steigung der Profillinie jeweils in Prozent. 5

c Ermitteln Sie für die Landseite des Damms rechnerisch die Größe des größten Neigungswinkels der Profillinie gegen die Horizontale. 3

d Durch die Wirkung des Wassers verliert der Damm mit der Zeit an Höhe. Beschreiben Sie die Bedeutung des Terms  $15000 \cdot \int_{-4}^0 (f(x) - 0,95 \cdot f(x)) dx$  im Sachzusammenhang. 3

40

## 2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe dar, in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird; nicht alle Lösungen sind dazu vollständig ausgeführt. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1	<p><b>a</b> <math>f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1</math>, d. h. Schnittpunkt mit der x-Achse: <math>(1 0)</math>  <math>f(0) = 1</math>, d. h. Schnittpunkt mit der y-Achse: <math>(0 1)</math></p>	3
	<p><b>b</b> <math>f'(x) = -x \cdot e^x</math>, <math>f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0</math>, <math>f''(x) = -(1+x) \cdot e^x</math>, <math>f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1</math>          Vorzeichenbetrachtungen von <math>f'(x)</math> und <math>f''(x)</math> liefern:  <math>G_f</math> ist für <math>x &lt; 0</math> streng monoton steigend, für <math>x &gt; 0</math> streng monoton fallend, für <math>x &lt; -1</math> linksgekrümmt und für <math>x &gt; -1</math> rechtsgekrümmt.</p>	6
	<p><b>c</b> <math>f(-1) = \frac{2}{e}</math>, <math>f'(-1) = \frac{1}{e}</math>  <math>\frac{1}{e} \cdot (-1) + t = \frac{2}{e} \Leftrightarrow t = \frac{3}{e}</math>          Damit: <math>y = \frac{1}{e} \cdot x + \frac{3}{e}</math></p>	4
	<p><b>d</b> Dem Graphen lässt sich entnehmen, dass alle Tangenten an <math>G_f</math> in den Punkten <math>(a f(a))</math> die y-Achse oberhalb der x-Achse schneiden. Die y-Koordinaten der Schnittpunkte werden für <math>a \rightarrow -\infty</math> beliebig klein und für <math>a \rightarrow +\infty</math> beliebig groß. Die y-Koordinaten nehmen damit alle positiven reellen Zahlen an.</p>	3
	<p><b>e</b> Aufgabenstellung: Unter den betrachteten Rechtecken gibt es eines mit größtem Flächeninhalt. Berechnen Sie dessen Flächeninhalt.</p> <p>Bedeutungen der Aussagen:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>I <math>R(u)</math> gibt die Flächeninhalte der Rechtecke in Abhängigkeit von <math>u</math> an.</li> <li>II Der Flächeninhalt des Rechtecks mit <math>u = -1</math> ist maximal.</li> <li>III Der maximale Flächeninhalt beträgt etwa 1,5.</li> </ul>	5
	<p><b>f</b> <math>F'(x) = (-1 + a - x) \cdot e^x</math>, <math>F'(x) = f(x) \Leftrightarrow a = 2</math></p>	3
2	<p><b>a</b> <math>150 \cdot 100 \cdot \int_{-4}^1 f(x) dx = 150 \cdot 100 \cdot \left[ (2-x) \cdot e^x \right]_{-4}^1 \approx 39126</math>          Der Abschnitt des Damms hat ein Volumen von etwa 39000 Kubikmetern.</p>	5
	<p><b>b</b> mittlere Steigung: <math>\frac{f(0) - f(-4)}{4} \approx 23\%</math>          größte Steigung: <math>f'(-1) \approx 37\%</math></p>	5

c	Mit $f'(1) = -e$ ergibt sich: $\tan \alpha = -e$ , d. h. $\alpha \approx -70^\circ$ Der größte Neigungswinkel der Profillinie gegen die Horizontale hat eine Größe von etwa $70^\circ$ .	3
d	Der Term beschreibt die Abnahme des Volumens des Damms auf der Seeseite in Kubikmetern, wenn der Damm dort an jeder Stelle 5 % seiner Höhe verloren hat.	3
		40

### 3 Standardbezug

Teilaufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen <sup>1</sup>						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	3	X			X						I		X		
b	6	X			X		I				II			X	
c	4	X	X		X			I			I		X		
d	3	X	X	X	X		II	II		II				X	
e	5	X	X	X	X		II	II				III			X
f	3	X			X			I			II			X	
2 a	5	X	X	X	X				II		II	II		X	
b	5	X	X	X	X				I		I	I	X		
c	3	X	X	X	X				I		II	I		X	
d	3		X	X	X		III		III	III					X

### 4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist passend zur Konzeption der Aufgaben der Aufgabensammlung und des Abituraufgabenpools ein Bewertungsschlüssel<sup>2</sup> vorgesehen, der angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

<sup>1</sup> Für jede Kompetenz, die bei der Bearbeitung der Teilaufgabe eine wesentliche Rolle spielt, ist der Anforderungsbereich (I, II oder III) eingetragen, in dem die Kompetenz benötigt wird.

<sup>2</sup> Der Bewertungsschlüssel ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.