

Themen: Ganzrationale Funktionen vom Grad n; Geometrische Folgen; LGS
Anwendungsaufgaben

1.) Welches ist das Merkmal bzw. Erkennungszeichen einer geometrischen Folge?

Lösung: Der Quotient zweier aufeinanderfolgender Folgenglieder ist

$$\text{immer konstant: } q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

2.) Gegeben ist die Zahlenfolge: $\frac{3}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{3}{16}$; ...

a) Zeigen Sie, dass diese Darstellung eine geometrische Folge ist.

Lösung:

$$q = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{16}{3}}{\frac{3}{8}} \Rightarrow q = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{3} = \frac{3}{16} \cdot \frac{8}{3} = \frac{1}{2}$$

b) Geben Sie ein Bildungsgesetz an.

Lösung: $a_n = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{3}{2^n}$

c) Wie lautet das 10. Glied der Folge?

Lösung: $a_{10} = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{3}{2^{10}} = \frac{3}{1.024}$

d) Vom wievielten Folgenglied ab sind die Werte der Folge a_n

kleiner als $10^{-6} = \frac{1}{1.000.000}$?

Lösung:

$$\frac{3}{2^n} < \frac{1}{1.000.000} \Rightarrow 3.000.000 < 2^n \Rightarrow \frac{\ln(3.000.000)}{\ln 2} < n$$
$$n > 21,516 \Rightarrow n \geq 22$$

3.) Der 6. Folgenwert einer geometrischen Folge ist 243, der 4. Wert ist 27.
Wie lautet das Bildungsgesetz der Folge.

Lösung:

$$q^2 = \frac{a_6}{a_4} \Rightarrow q^2 = \frac{243}{27} = 9 \Rightarrow q = 3$$

$$a_4 = a_1 \cdot q^3 \Rightarrow 27 = a_1 \cdot 3^3 \Rightarrow a_1 = 1$$

$$a_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$$

4.) Drei Zahlen bilden eine geometrische Folge mit der Summe 39.

Die mittlere Zahl ist 10. Wie lauten die beiden anderen Zahlen?

Lösung:

$$\text{Ansatz: } \frac{10}{q} + 10 + 10q = 39 \xrightarrow{\cdot q} 10 + 10q + 10q^2 = 39q$$

$$\Rightarrow 10q^2 - 29q + 10 = 0$$

$$\Rightarrow q_{1/2} = \frac{29 \pm \sqrt{841 - 400}}{40} = \frac{29 \pm 21}{40} \Rightarrow q_1 = 2,5 \wedge q_2 = 0,4$$

Folge 1: 4 ; 10 ; 25 Folge 2: 25 ; 10 ; 4

5.) Das Licht verliert beim Durchgang durch eine Glasplatte $\frac{1}{12}$
seiner Intensität.

Welcher Prozentteil der Lichtintensität bleibt nach dem Durchgang durch 8 Glasplatten erhalten?

Lösung:

$$a_n = 100 \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^{n-1} \Rightarrow a_9 = 100 \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^8 = 49,85 [\%]$$

- 6.) Für Bodenuntersuchungen werden Bohrarbeiten an eine Spezialfirma vergeben, die für den ersten Meter 15,00 € und für jeden weiteren Meter 5 % mehr als für den jeweils vorhergehenden Meter verlangt.

Mit welchen Kosten muss der Auftraggeber rechnen, wenn 5 m tief gebohrt werden soll?

Lösung:

$$a_n = 15 \cdot 1,05^{n-1} \quad \text{und} \quad s_n = 15 \cdot \frac{1,05^n - 1}{1,05 - 1}$$

$$\Rightarrow s_5 = 15 \cdot \frac{1,05^5 - 1}{1,05 - 1} = 82,88 [\text{€}]$$

Da die geometrische Reihe hier noch nicht behandelt wurde, müssen die 5 Folgenwerte einzeln ermittelt und danach addiert werden.

- 7.) Die Indische Bevölkerung betrug 1997 ca. 950 Mio. Menschen. Man rechnet mit einem jährlichen Wachstum von ca. 2 %.
- a) Bestimmen Sie das Bildungsgesetz der Bevölkerungsentwicklung.
 - b) Wie hoch ist die voraussichtliche Einwohnerzahl im Jahre 2010?
 - c) Wie viel Einwohner wohnten 1980 in Indien?
 - d) Im Internet habe ich die „aktuelle“ Bevölkerungszahl nachgeschaut: Indien 1.065.721.000 Einwohner (Stand 2004).

Wie hoch ist nach dieser Anzahl das tatsächliche durchschnittliche jährliche Wachstum?

Lösung:

$$a) \quad f(x) = 950 \cdot 1,02^x \quad [\text{Ergebnis in Mio.}]$$

$$b) \quad f(13) = 950 \cdot 1,02^{13} = 1.228,9263 [\text{Mio.}]$$

$$c) \quad f(-17) = 950 \cdot 1,02^{-17} = 678,4544 [\text{Mio.}]$$

$$d) \quad 950.000.000 \cdot q^7 = 1.065.721.000 \xrightarrow{:950[Mio.]} q^7 = \frac{1.065.721.000}{950.000.000}$$

$$\xrightarrow{\sqrt[7]{}} q = \sqrt[7]{\frac{1.065.721.000}{950.000.000}} \approx \sqrt[7]{1,1218} \approx 1,016556$$

Durchschnittliches jährliches Wachstum: 1,6556 %

8.) Gegeben ist folgende Funktion:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

(i) Ermitteln Sie den Achsenschnittpunkt mit der y-Achse.

(ii) Bilden die Linearfaktorzerlegung der Funktion.

Lösung:

$$(i) \quad f(0) = 6 \Rightarrow S_y(0 | 6)$$

(ii) Horner-Schema:

	f(x) =	1,00 x ³	-2,00 x ²	-5,00 x	6,00
x0	a(3)	a(2)	a(1)	a(0)	
	1,00	-2,00	-5,00	6,00	
1		1,00	-1,00	-6,000	
	1,00	-1,00	-6,00	0,000	f(x0)

$$\Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow x_{2/3} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow x_2 = 3 \wedge x_3 = -2$$

$$f(x) = (x-1)(x-3)(x+2)$$

9.) Bestimmen Sie den Funktionsterm der Funktion dritten Grades,
deren Graph durch die angegebenen Punkte geht:

$$A(-3 \mid -33) \quad B(0 \mid 3,75) \quad C(1 \mid 0) \quad D(3 \mid 4,5)$$

Lösung:

$$\left. \begin{array}{l} \text{I.)} \quad -27a + 9b - 3c + d = -33 \\ \text{II.)} \quad \quad \quad d = 3,75 \\ \text{III.)} \quad a + b + c + d = 0 \\ \text{IV.)} \quad 27a + 9b + 3c + d = 4,5 \end{array} \right\} \xrightarrow{d=3,75} \begin{array}{l} \text{I.)} \quad -27a + 9b - 3c = -36,75 \\ \text{III.)} \quad a + b + c = -3,75 \\ \text{IV.)} \quad 27a + 9b + 3c = 0,75 \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{I.)} + \text{IV.)}} 18b = -36 \Rightarrow b = -2$$

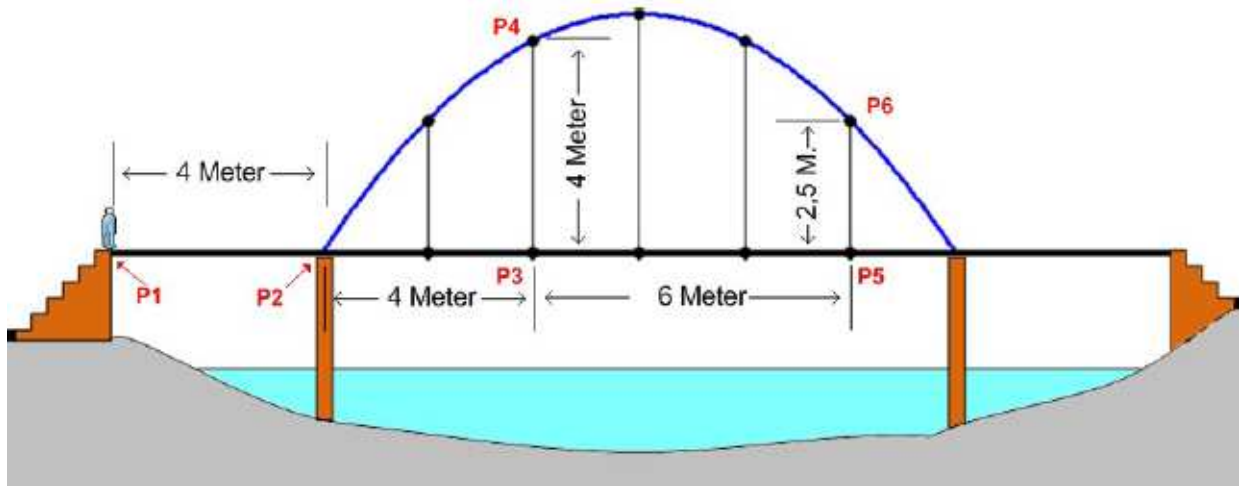
$$\xrightarrow{b=-2} \left. \begin{array}{l} \text{I.)} \quad -27a - 3c = -18,75 \\ \text{III.)} \quad a + c = -1,75 \\ \text{IV.)} \quad 27a + 3c = 18,75 \end{array} \right\}$$

$$\xrightarrow{\text{IV.)} - 3 \cdot \text{III.)}} 24a = 24 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow c = -2,75$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 - 2x^2 - 2,75x + 3,75$$

10.) Parabeln zweiter Ordnung in der Realität

Eine Fußgängerbrücke wird von einem parabelförmigen Brückenbogen getragen.



a) Wie lang ist die gesamte Fußgängerbrücke?

Lösung: Die Teilabschnitte müssen addiert werden: $4 + 4 + 6 + 2 + 4 = 20$

b) Berechnen Sie die Gleichung des Brückenbogens anhand der Punkte **P2**, **P4** und **P6**.

Wählen Sie die Lage des Koordinatensystem geschickt!

Lösung:

$P_2(0 \mid 0)$; $P_4(4 \mid 4)$ und $P_6(10 \mid 2,5)$ mit $f(x) = ax^2 + bx + c$

I.) $c = 0$ II.) $16a + 4b = 4$ III.) $100a + 10b = 2,5$

$$\xrightarrow{5 \cdot II - 2 \cdot III} -120a = 15 \Rightarrow a = -\frac{15}{120} = -\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow b = \frac{3}{2} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{2}x$$