11. Jgst. **6. Kursarbeit** **Datum: 23.06.2004**

Klasse: GY 03 b **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Themen: Differentialrechnung und Kurvendiskussion

Name:	
Punkte:	Note:

Die Rechenwege müssen nachvollziehbar sein!

1.) Bilden Sie die erste Ableitung zu den folgenden Funktionen:

Num-mer	Funktion	1. Ableitung
a)	$f(t) = 2x^2t + t^2$	$f'(t) = 2x^2 + 2t$
b)	$f(x) = 3x^6 - 2x^4$	$f(x) = 18x^5 - 8x^3$
c)	$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 1}{x^2}$	$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^3}$
d)	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{2x}$	$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}$
e)	$f(x) = \frac{2}{3}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + 2x$	$f'(x) = \frac{10}{3}x^4 - 6x^3 + 2$
f)	$f(x) = x \cdot (x-1) - x \cdot (x+1)$	$f'(x) = -2$
g)	$f(x) = (ax^2 + b) \cdot (cx + d)$	$f'(x) = 3acx^2 + 2adx + bc$
h)	$f(x) = \sum_{i=0}^{3} ix^{i+1}$	$f'(x) = 2x + 6x^2 + 12x^3$ $f'(x) = \sum_{i=1}^{3} i(i+1)x^i$

2.) Führen Sie bei der Funktion f(x) mit

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2$$

eine Kurvendiskussion durch, indem Sie folgende Bereiche bearbeiten:

a) **Definitionsbereich** $D = \Re$

b) **Symmetrie:** Achsensymmetrie

$$f(-x) = \frac{1}{2}(-x)^4 - 4(-x)^2 = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 = f(x)$$

c) Nullstellen

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 = 0$$

$$x^2\left(\frac{1}{2}x^2 - 4\right) = 0$$

$$x_1 = 0 \ (doppelt)$$

$$|x_2| = \sqrt{8}$$

d) Extremwerte

$$f'(x) = 2x^3 - 8x \overset{!}{=} 0$$

$$x(2x^2 - 8) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$|x_2| = 2$$

$$f''(x) = 6x^2 - 8$$

$$f''(0) = -8 < 0 \Rightarrow Max(0 \mid 0)$$

$$f''(2) = 16 > 0 \Rightarrow Min_1(2 \mid -8)$$

$$f''(-2) = 16 > 0 \Rightarrow Min_2(-2 \mid -8) \ (\rightarrow Achsensymmetrie)$$

e) Wendepunkte

$$f''(x) = 6x^2 - 8 \overset{!}{=} 0$$

$$6x^2 - 8 = 0$$

$$|x| = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$f'''(x) = 12x$$

$$f'''\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) \neq 0 \Rightarrow W_1\left(\frac{2}{3}\sqrt{3} \,\middle|\, -\frac{40}{9}\right)$$

$$f'''\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) \neq 0 \Rightarrow W_2\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3} \,\middle|\, -\frac{40}{9}\right)(\rightarrow \textit{Achsensymmetrie})$$

f) **Grenzwerte für** $x \rightarrow \pm\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{2}x^4 - 4x^2\right) = \infty$$

g) **Tangenten in x_1 = 1 und x_2 = -1**

$$f(1) = -\frac{7}{2} \qquad f(-1) = -\frac{7}{2}$$

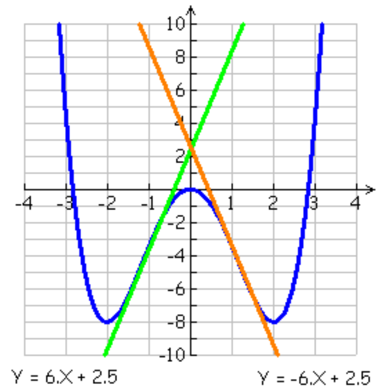
$$f'(1) = -6 \qquad f'(-1) = 6$$

$$-\frac{7}{2} = (-6)\cdot 1 + b \qquad -\frac{7}{2} = 6\cdot(-1) + b$$

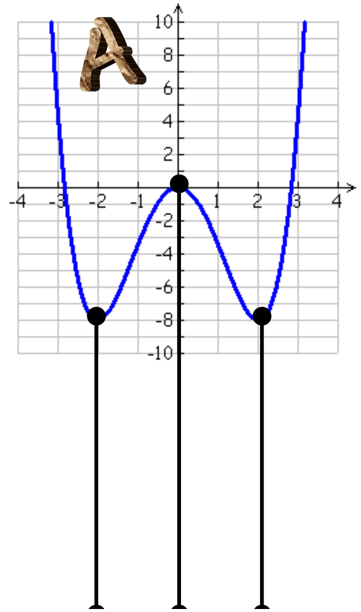
$$b = \frac{5}{2} \qquad b = \frac{5}{2}$$

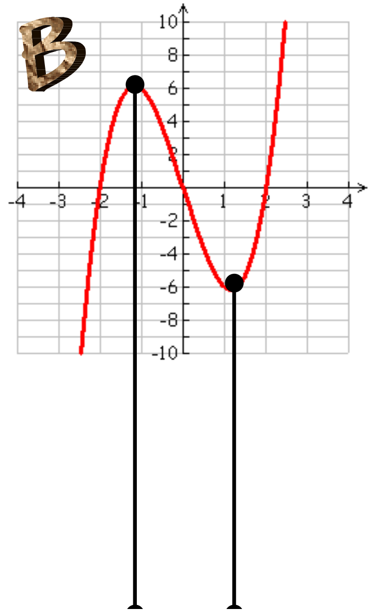
$$t(x) = (-6)x + \frac{5}{2} \qquad t(x) = 6x + \frac{5}{2}$$

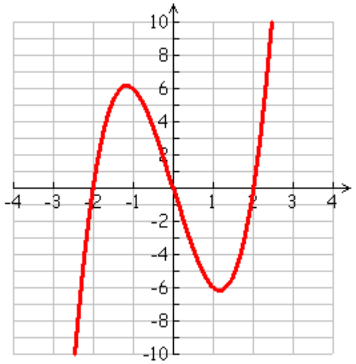
h) **Zeichnung**

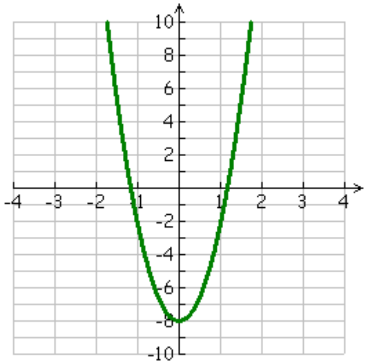


3.) Skizzieren Sie den Graph der ersten Ableitung zu den gegebenen Funktionen durch eine grafische Herleitung mittels geeigneter Punkte:

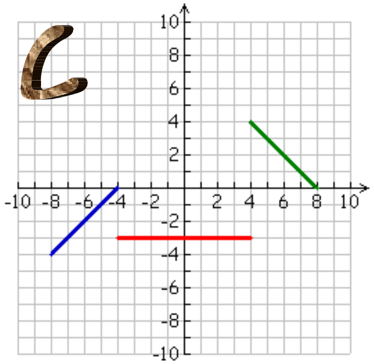




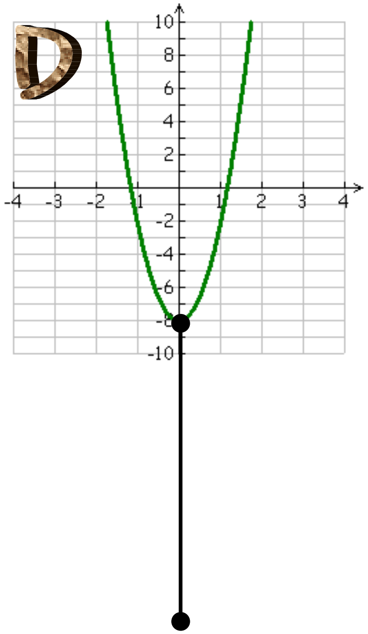


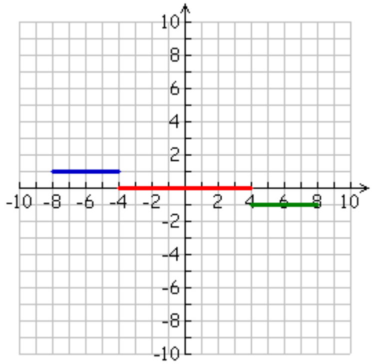


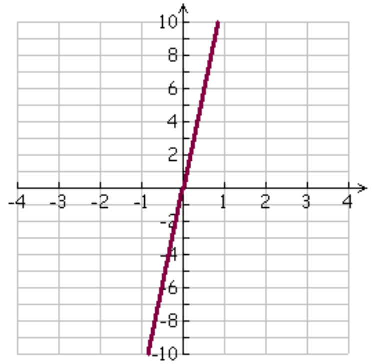
C



D







4.) Ach nein, jetzt sind hier nur Informationen zur Funktion gegeben.

Ermitteln Sie die jeweilige Ursprungsfunktion.

a) $$f'(x) = \frac{2}{5}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{10}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - 2x + c$$

b) f(x) hat bei $x_1 = 2$ ein doppelte und bei $x_2 = -3$ eine einfache Nullstelle.

$$\Rightarrow \quad f(x) = (x-2)^2(x+3)$$

c) Relative Extremstellen bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 4$.

$$\Rightarrow \quad f'(x) = (x+1)(x-4) = x^2 - 3x - 4$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x + c$$

5.) Fragestellungen zu Funktionen mit Parametern:

Beweisen Sie folgende Behauptungen:

a) **Behauptung:** Jede ganzrationale Funktion vom Grad 2

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

hat genau eine innere Extremstelle.

Beweis:

$$f'(x) = 2ax+b \overset{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$$
$$f''(x) = 2a \neq 0 \quad \textit{weil gem. Vor. gilt}: a \neq 0$$
$$\Rightarrow \textit{Behauptung}$$

b) **Behauptung:** Die Graphen aller Funktionen f mit

$$f_k(x) = x^4 + kx^3 \quad \textit{mit} \quad k \neq 0$$

haben an der Stelle x = 0 einen Sattelpunkt.

Beweis:

$$f_k'(x) = 4x^3 + 3kx^2$$
$$f_k''(x) = 12x^2 + 6kx \overset{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad \textit{und} \quad \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2}k$$
$$f_k'''(x) = 24x + 6k$$
$$f_k'''(0) = 6k \quad \textit{wegen Vor.}: k \neq 0 \quad \Rightarrow \quad W(0 \mid 0)$$
$$\textit{Steigung in } W(0 \mid 0)?$$
$$f_k'(0) = 0$$
$$\Rightarrow \textit{in } W(0 \mid 0) \textit{ hat } f(x) \textit{ Steigung } m = 0$$
$$\Rightarrow W(0 \mid 0) \textit{ ist Sattelpunkt}$$
$$\Rightarrow \textit{Behauptung}$$

6.) Welche Bedingung muss für den Parameter a gelten, damit die Funktion f(x) mit $f_a(x) = x^4 + ax^3$

a) genau zwei Wendepunkte besitzt?

$$f_a'(x) = 4x^3 + 3ax^2$$
$$f_a''(x) = 12x^2 + 6ax \overset{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad \textit{und} \quad \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2}a$$
$$f_a'''(x) = 24x + 6a$$
$$\left|\begin{array}{l} f_a'''(0) = 6a \\ f_a'''\left(-\frac{1}{2}a\right) = -6a \end{array}\right\rangle \quad f_a(x) \textit{ hat 2 Wendepunkte} \quad \Leftrightarrow \quad a \neq 0$$

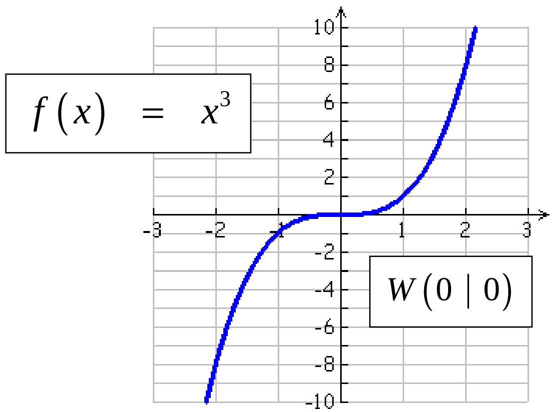
b) keinen Wendepunkt besitzt?

$$\left|\begin{array}{l} f_a'''(0) = 6a \\ f_a'''\left(-\frac{1}{2}a\right) = -6a \end{array}\right\rangle \quad f_a(x) \textit{ hat keine Wendepunkte} \quad \Leftrightarrow \quad a = 0$$

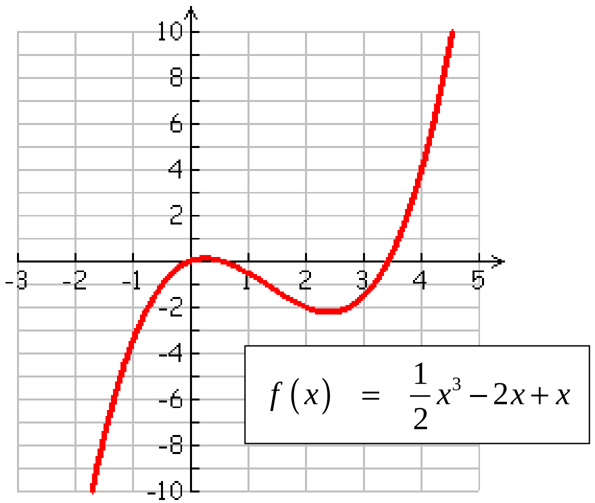
7.) Versuchen Sie den jeweiligen Graphen einer Funktion ***f(x)*** zu zeichnen, der folgenden Bedingungen genügt.

Sollte der Graph nicht existieren, so begründen Sie weshalb.

a) Genau ein Wendepunkt, kein relativer Extrempunkt.



b) Genau ein Wendepunkt, genau ein relativer Hochpunkt und genau ein relativer Tiefpunkt.



c) Genau ein Wendepunkt, genau ein relativer Hochpunkt und kein relativer Tiefpunkt.

Nicht möglich, weil ein relativer Hochpunkt immer einen Tiefpunkt einfordert, sonst wäre es ein absoluter Hochpunkt

– Aufgabe 8 ist eine Zusatzaufgabe!

8.) Harry Kaufmann

a) Harry betreibt eine Weinhandlung. Seine Fixkosten betragen 15000 GE, während die variablen Kosten bei 2 GE pro Einheit liegen.

Wie lautet die Gesamtkostenfunktion K(x)?

$$K(x) \quad = \quad 2x + 15.000$$

b) Er verkauft seine Weinflaschen für 3,5 GE pro Stück.
Wie lautet nun die Erlösfunktion E(x)?

$$E(x) \quad = \quad 3{,}5x$$

c) Ermitteln Sie nun das maximalen Gewinn und den BEP, wenn ein maximales Produktionsvolumen von 20.000 Flaschen pro Jahr vorliegt.

BEP:

$$\begin{aligned} E(x) &= K(x) \\ 3{,}5x &= 2x + 15.000 \\ x &= 10.000 \\ E(10.000) &= 35.000 \\ BEP&(10.000 \mid 35.000) \end{aligned}$$

Gewinnmaximum:

$$\begin{aligned} G(x) &= E(x) - K(x) \\ G(x) &= 3{,}5x - 2x - 15.000 \\ G(x) &= 1{,}5x - 15.000 \\ &\text{Randextremum} : \text{lineare Gewinnfunktion} \\ G(20.000) &= 1{,}5 \cdot 20.000 - 15.000 \\ G(20.000) &= 15.000 \quad \Rightarrow \quad \text{Gewinnmaximum} \end{aligned}$$