

Thema: Wurzelfunktionen; Stetigkeit; Diff.-barkeit & Diff.-Quotient;
Ableitungen

❶ Wurzelfunktionen

Ermitteln Sie zu den gegebenen Wurzelfunktionen den Definitionsbereich, die Nullstellen **und** die Schnittstelle mit der y-Achse

$$\text{a) } f(x) = \sqrt{16-x^2} \qquad \text{b) } g(x) = \sqrt{x-3}$$

Lösung:

$$f(x) = \sqrt{16-x^2}$$

$$\text{Definitionsbereich: } 16-x^2 \geq 0 \Rightarrow 16 \geq x^2 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4$$

$$\text{Nullstellen: } 16-x^2 = 0 \Rightarrow 16 = x^2 \Rightarrow x_1 = -4 \vee x_2 = 4$$

$$\text{Schnittpunkt mit y-Achse: } f(0) = \sqrt{16} = 4 \Rightarrow S_y(0 | 4)$$

$$g(x) = \sqrt{x-3}$$

$$\text{Definitionsbereich: } x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \Rightarrow x \in [3; \infty[$$

$$\text{Nullstellen: } x-3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$\text{Schnittpunkt mit y-Achse: } g(0) = \sqrt{-3} \Rightarrow \text{keine Lösung}$$

❷ Schnittpunkte bei Wurzelfunktionen

Gegeben seien die beiden Funktionen $f(x) = \sqrt{16-x^2}$ und

$$g_t(x) = \sqrt{x+t}.$$

- Für welchen Wert des Parameters t haben die beiden Funktionen bei $x = 2$ einen Schnittpunkt?
- Berechnen Sie für diesen t -Wert die zweite Schnittstelle.
- Ermitteln Sie auch noch die beiden y-Werte.

Lösung:

$$a) \quad f(x) = g_t(x)$$

$$\Rightarrow \sqrt{16-x^2} = \sqrt{x+t} \xrightarrow{\text{Quadrieren}} 16-x^2 = x+t$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 16 + t = 0$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4t+64}}{2} \Rightarrow x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{65-4t}}{2} \stackrel{!}{=} 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{65-4t} = 5 \xrightarrow{\text{Quadrieren}} 65-4t = 25 \Rightarrow t=10$$

$$b) \quad t=10$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{65-40}}{2} \Rightarrow x_{1/2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = 2 \vee x_2 = -3$$

$$c) \quad f(2) = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} \Rightarrow S_y(2 \mid \sqrt{12})$$

$$f(-3) = \sqrt{16-9} = \sqrt{7} \Rightarrow S_y(-3 \mid \sqrt{7})$$

3 Stetigkeit

a) Prüfen Sie die Funktion auf Stetigkeit:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & x \leq 2 \\ x^3 - x + 1 & x > 2 \end{cases}$$

Lösung:

$$\text{linke Seite: } \lim_{\substack{x \rightarrow 2-h \\ h \rightarrow 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2-h \\ h \rightarrow 0}} (2x^2 - 1) = \lim_{h \rightarrow 0} [2(2-h)^2 - 1] = 7$$

$$\text{rechte Seite: } \lim_{\substack{x \rightarrow 2+h \\ h \rightarrow 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2+h \\ h \rightarrow 0}} (x^3 - x + 1) = \lim_{h \rightarrow 0} [(2+h)^3 - (2+h) + 1] = 7$$

$f(x)$ ist stetig.

b) Für welchen Wert des Parameters $t > 0$ ist die Funktion stetig?

$$g_t(x) = \begin{cases} tx + 2 & x < t \\ 4x^2 - t & x \geq t \end{cases}$$

Lösung:

$$\text{linke Seite: } \lim_{\substack{x \rightarrow t-h \\ h \rightarrow 0}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow t-h \\ h \rightarrow 0}} (tx + 2) = \lim_{h \rightarrow 0} [t(t-h) + 2] = t^2 + 2$$

$$\text{rechte Seite: } \lim_{\substack{x \rightarrow t+h \\ h \rightarrow 0}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow t+h \\ h \rightarrow 0}} (4x^2 - t) = \lim_{h \rightarrow 0} [4(t+h)^2 - t] = 4t^2 - t$$

$$\Rightarrow t^2 + 2 = 4t^2 - t \Rightarrow 3t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow t_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{6}$$

$$\Rightarrow t_{1/2} = \frac{1 \pm 5}{6} \Rightarrow t_1 = 1 \quad \vee \quad t_2 = -\frac{2}{3} \Rightarrow t_1 = 1 \text{ nur als Lösung gültig}$$

$g(x)$ ist für $t=1$ stetig.

④ Differenzierbarkeit

a) Beweisen Sie die Ableitung folgender Funktionen mit Hilfe der h-Methode:

$$f(x) = 3x^2$$

Lösung:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)^2 - 3x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6hx + 3h^2 - 3x^2}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(6x + 3h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6x + 3h) = 6x$$

b) Bilden Sie die erste Ableitung folgender Funktionen:

$$(i) \quad f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \qquad (ii) \quad g(x) = \frac{3}{x^{3k+1}}$$

$$(iii) \quad h(x) = 3x^{k-1} \qquad (iv) \quad t(x) = \sqrt{x^3}$$

$$(v) \quad k(x) = 4x^6 - 3x^5 + 2x - 7$$

Lösung:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \xrightarrow{\text{Ableitung}} f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - x$$

$$g(x) = \frac{3}{x^{3k+1}} = 3x^{-3k-1} \xrightarrow{\text{Ableitung}} g'(x) = 3(-3k-1)x^{-3k-2} = -\frac{9k+3}{x^{3k+2}}$$

$$h(x) = 3x^{k-1} \xrightarrow{\text{Ableitung}} h'(x) = 3(k-1)x^{k-2} = (3k-3)x^{k-2}$$

$$t(x) = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}} \xrightarrow{\text{Ableitung}} t'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$$k(x) = 4x^6 - 3x^5 + 2x - 7 \xrightarrow{\text{Ableitung}} k'(x) = 24x^5 - 15x^4 + 2$$

c) Welche Steigungen besitzt die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \text{ in } x_1 = 1 \text{ und } x_2 = -2?$$

Lösung:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \xrightarrow{\text{Ableitung}} f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - x$$

$$x=1: f'(1) = \frac{3}{4} \cdot 1 - 1 = -\frac{1}{4}$$

$$x=-2: f'(-2) = \frac{3}{4} \cdot (-2)^2 - (-2) = 5$$

d) An welcher Stelle hat die Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2$
die Steigung $m_1 = 0$ und $m_2 = 5$?

Lösung:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \xrightarrow{\text{Ableitung}} f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - x$$

$$m=0: f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - x \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x\left(\frac{3}{4}x - 1\right) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad \vee \quad x_2 = \frac{4}{3}$$

$$m=5: f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - x \stackrel{!}{=} 5 \Rightarrow \frac{3}{4}x^2 - x - 5 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+15}}{\frac{3}{2}} \Rightarrow x_1 = \frac{10}{3} \quad \vee \quad x_2 = -2$$