

1.) Stellen Sie folgende Mengen als Intervall dar

- | | | |
|----|---|---------------------|
| a) | $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3 \wedge x \geq -5\}$ | $A = [-5; 3[$ |
| b) | $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x\}$ | $B = [2; \infty[$ |
| c) | $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3\}$ | $C =]-\infty; -3[$ |
| d) | $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \wedge x \geq 3\}$ | $D = \{ \}$ |
| e) | $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 6 \wedge x \geq 0\}$ | $E = [0; 6[$ |
| f) | $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \wedge x \leq -4\}$ | $F =]-\infty; -4]$ |
| g) | $G = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 9\}$ | $G = [-3; 3]$ |

2.) Stellen Sie folgende Intervalle als Mengen dar

- | | | |
|----|--------------------|---|
| a) | $A = [2; 7]$ | $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 7\}$ |
| b) | $B =]3; 8]$ | $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leq 8\}$ |
| c) | $C =]-1; 9[$ | $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 9\}$ |
| d) | $D =]-\infty; 7[$ | $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 7\}$ |
| e) | $E = [-4; \infty[$ | $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x\}$ |

3.) Mengen

In Kleindorf mit 1.000 Haushalten gibt es zwei Tageszeitungen. Das Abend- und das Morgenblatt. 600 Haushalte haben das Abendblatt abonniert, 300 Haushalte das Morgenblatt.

Von 200 Haushalten ist bekannt, dass sie keine Zeitung beziehen.

Wie viele Haushalte haben beide Zeitungen?

Lösung:

$$600 + 300 + 200 = 1.100 \quad \Rightarrow \quad 100 \text{ Haushalte haben beide Zeitungen}$$

4.) Lineare (Un-)Gleichungen

$$\text{a)} \quad \frac{4ax-3a}{x} = 2+a$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \frac{4ax-3a}{x} &= 2+a \xrightarrow{\cdot x} 4ax-3a = 2x+ax \xrightarrow{-2x-ax} 3ax-2x = 3a \\ \xrightarrow{\text{Ausklammern}} (3a-2)x &= 3a \xrightarrow{:(3a-2)} x = \frac{3a}{3a-2} \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad 4ax^2+2x-4 = \left(\frac{2}{3}ax+2\right)(6x-4)$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \Rightarrow 4ax^2+2x-4 &= 4ax^2 - \frac{8}{3}ax + 12x - 8 \\ \Rightarrow \frac{8}{3}ax - 10x &= -4 \xrightarrow{\text{Ausklammern}} \left(\frac{8}{3}a - 10\right)x = -4 \\ \xrightarrow{:\left(\frac{8}{3}a-10\right)} x &= -\frac{4}{\frac{8}{3}a-10} \end{aligned}$$

$$\text{c)} \quad \frac{x+2}{x-3} > 5$$

Lösung:

Fall 1:

$$x-3 > 0 \Rightarrow x > 3$$

und:

$$\frac{x+2}{x-3} > 5 \quad \left| \cdot (x-3) \right.$$

$$\Rightarrow x+2 > 5x-15$$

$$\Rightarrow 17 > 4x$$

$$\Rightarrow \frac{17}{4} > x$$

$$L_1 = \left] 3; \frac{17}{4} \right[$$

Fall 2:

$$x-3 < 0 \Rightarrow x < 3$$

und:

$$\frac{x+2}{x-3} > 5 \quad \left| \cdot (x-3) \right.$$

$$\Rightarrow x+2 < 5x-15$$

$$\Rightarrow 17 < 4x$$

$$\Rightarrow \frac{17}{4} < x$$

$$L_2 = \{ \}$$

$$d) \quad \frac{4x-3}{2x+4} > 0$$

Lösung:

Fall 1:

$$2x+4 > 0 \Rightarrow x > -2$$

und:

$$\frac{4x-3}{2x+4} > 0 \quad \left| \cdot (2x+4) \right.$$

$$\Rightarrow 4x-3 > 0$$

$$\Rightarrow 4x > 3$$

$$\Rightarrow x > \frac{3}{4}$$

$$L_1 = \left] \frac{3}{4}; \infty \right[$$

Fall 2:

$$2x+4 < 0 \Rightarrow x < -2$$

und:

$$\frac{4x-3}{2x+4} > 0 \quad \left| \cdot (2x+4) \right.$$

$$\Rightarrow 4x-3 < 0$$

$$\Rightarrow 4x < 3$$

$$\Rightarrow x < \frac{3}{4}$$

$$L_2 =]-\infty; -2[$$

5.) Wurzelterme

Schreiben Sie die Terme **ohne das Wurzelzeichen** und vereinfachen Sie dann den Ausdruck so weit wie möglich:

$$a) \quad \sqrt[4]{a^4 b^{12} c^8}$$

Lösung: $\sqrt[4]{a^4 b^{12} c^8} = (a^4 b^{12} c^8)^{\frac{1}{4}} = ab^3 c^2$

$$b) \quad \sqrt[n]{x^{2n} y^{4n}}$$

Lösung: $\sqrt[n]{x^{2n} y^{4n}} = (x^{2n} y^{4n})^{\frac{1}{n}} = x^2 y^4$

$$c) \quad \sqrt[3]{a^7 b^3} \cdot \sqrt{a^4 b^6 c^{12}}$$

Lösung:

$$\sqrt[3]{a^7 b^3} \cdot \sqrt{a^4 b^6 c^{12}} = (a^7 b^3 \cdot a^2 b^3 c^6)^{\frac{1}{3}} = (a^9 b^6 c^6)^{\frac{1}{3}} = a^3 b^2 c^2$$

d) $\sqrt[5]{1.024}$

Lösung: $\sqrt[5]{1.024} = 1.024^{\frac{1}{5}} = 4$

e) $\sqrt[3]{125}$

Lösung: $\sqrt[3]{125} = 125^{\frac{1}{3}} = 5$

f) $\sqrt[3]{m^2 \cdot \sqrt[5]{m^3 \cdot \sqrt{m^4}}}$

Lösung:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{m^2 \cdot \sqrt[5]{m^3 \cdot \sqrt{m^4}}} &= \sqrt[3]{m^2 \cdot \sqrt[5]{m^3 \cdot m^2}} \\ &= \sqrt[3]{m^2 \cdot \sqrt[5]{m^5}} = \sqrt[3]{m^2 \cdot m} = \sqrt[3]{m^3} = m \end{aligned}$$

6.) Potenzgesetze I

Kreuzen Sie in der Tabelle an, welche Terme übereinstimmen.

	a^n	$\frac{a^k}{a^n}$	$a^k \cdot a^n$	$(a^n)^k$	$\frac{a^n}{a^k}$	Keine Zuordnung
$a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ n-Faktoren	✗					
$(a^k)^n$				✗		
$a^{n \cdot k}$				✗		
a^{n+k}			✗			
a^{n-k}					✗	
$\frac{1}{a^{n-k}}$		✗				
$1: \frac{a^k}{a^n}$					✗	

7.) **Ausmultiplizieren und vereinfachen so weit wie möglich**

a) $\left(\frac{1}{2}x^{-2} - 3x^2\right) \cdot 4x^2$

Lösung: $\left(\frac{1}{2}x^{-2} - 3x^2\right) \cdot 4x^2 = 2 - 12x^4$

b) $(x^4 + x^{-3})(x^3 + x^{-5})$

Lösung:

$$\begin{aligned}(x^4 + x^{-3})(x^3 + x^{-5}) &= x^{4+3} + x^{4-5} + x^{-3+3} + x^{-3-5} \\ &= x^7 + x^{-1} + x^0 + x^{-8} = x^7 + \frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{x^8}\end{aligned}$$

c) $(3x^n + 6x^{n-1} + 2x^{n-2}) \cdot x^{-n}$

Lösung:

$$\begin{aligned}(3x^n + 6x^{n-1} + 2x^{n-2}) \cdot x^{-n} &= 3x^{n-n} + 6x^{n-1-n} + 2x^{n-2-n} \\ &= 3x^0 + 6x^{-1} + 2x^{-2} = 3 + \frac{6}{x} + \frac{2}{x^2}\end{aligned}$$

d) $(x^{n-1} + x^3)^2 \cdot x^{2-n}$

Lösung:

$$\begin{aligned}(x^{n-1} + x^3)^2 \cdot x^{2-n} &= (x^{n-1} + x^3)(x^{n-1} + x^3) \cdot x^{2-n} \\ &= (x^{2n-2} + 2x^{n+2} + x^6) \cdot x^{2-n} = x^{2n-2+2-n} + 2x^{n+2+2-n} + x^{6+2-n} \\ &= x^n + 2x^4 + x^{8-n}\end{aligned}$$

8.) Potenzgesetze II

$$\text{a)} \quad (-a)^{4n} \cdot a^{3n-1} \cdot a^{-2n+4}$$

Lösung:
$$(-a)^{4n} \cdot a^{3n-1} \cdot a^{-2n+4} = (-1)^{4n} a^{4n+3n-1-2n+4} = a^{5n+3}$$

$$\text{b)} \quad \frac{a^{2n-1} \cdot 5}{10 \cdot a^{n+2}}$$

Lösung:
$$\frac{a^{2n-1} \cdot 5}{10 \cdot a^{n+2}} = \frac{1}{2} a^{2n-1-(n+2)} = \frac{1}{2} a^{n-3}$$

$$\text{c)} \quad \left(a^{m^2}\right)^{30} - \left(a^{\frac{3}{2}m}\right)^{20m}$$

Lösung:

$$\left(a^{m^2}\right)^{30} - \left(a^{\frac{3}{2}m}\right)^{20m} = a^{30m^2} - a^{\frac{3}{2}m \cdot 20m} = a^{30m^2} - a^{30m^2} = 0$$

$$\text{d)} \quad \frac{12x^{5n+2} \cdot 5x^{3n-2} \cdot x^{-2n+3}}{180x^{4n-1}}$$

Lösung:
$$= \frac{60}{180} x^{5n+2+3n-2-2n+3-(4n-1)} = \frac{1}{3} x^{2n+4}$$

$$\text{e)} \quad \left[\frac{\left(x^{-2n+1}\right)^2 \cdot x^{5n+3}}{x^{4n-1}} \right]^3$$

Lösung:

$$= \frac{(x^{-2n+1})^6 \cdot x^{15n+9}}{x^{12n-3}} = x^{-12n+6+15n+9-(12n-3)} = x^{-9n+18}$$

- f) Entscheiden Sie, wann der Ausdruck $(x^{2n+1})^n$ für $x < 0$ eine positive bzw. negative Zahl darstellen wird.

Begründen Sie Ihre Entscheidung durch Berechnung und logische Argumentation!

Lösung: $(x^{2n+1})^n = x^{2n^2+n} \text{ mit } x < 0$

Fall 1: n gerade $\Rightarrow 2n^2$ ist wegen Multiplikator 2 gerade
 $\Rightarrow$ Gesamtausdruck $2n^2+n$ ist gerade
 $\Rightarrow$ Wert der Potenz > 0

Fall 2: n ungerade $\Rightarrow 2n^2$ ist wegen Multiplikator 2 gerade
 $\Rightarrow$ Gesamtausdruck $2n^2+n$ ist durch die Addition einer ungeraden Zahl (+ n) nun ungerade
 $\Rightarrow$ Wert der Potenz < 0

9.) Bruchterme

a) $\frac{2m+3n}{4a} - \frac{4m-2n}{5a}$

Lösung:

$$\begin{aligned} & \frac{2m+3n}{4a} - \frac{4m-2n}{5a} \xrightarrow{HN:20a} \frac{10m+15n}{20a} - \frac{16m-8n}{20a} \\ &= \frac{10m+15n-(16m-8n)}{20a} = \frac{-6m+23n}{20a} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{2a^2 - 3ab + b^2}{a^2 - b^2} - \frac{a - b}{a + b}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} & \frac{2a^2 - 3ab + b^2}{a^2 - b^2} - \frac{a - b}{a + b} \xrightarrow{HN: a^2 - b^2} \frac{2a^2 - 3ab + b^2}{a^2 - b^2} - \frac{(a - b)(a - b)}{(a - b)(a + b)} \\ &= \frac{2a^2 - 3ab + b^2}{a^2 - b^2} - \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{2a^2 - 3ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2)}{a^2 - b^2} \\ &= \frac{a^2 - ab}{a^2 - b^2} \end{aligned}$$