Musterlösung **11. Jgst.** **2. Klassenarbeit** **Datum: 09.12.2009**

Klasse: GY GS 09 b **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: **Ganzrationale Funktionen; Hornerschema; Linearfaktorzerlegung; Symmetrie**

1.) Nullstellen und Faktordarstellung ganzrationaler Funktionen

Berechnen Sie die Nullstellen folgender Funktionen.

a) $f(x) = (x-2)(x^2-9)$

Lösung: $x-2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \quad \wedge \quad x^2-9 = 0 \Rightarrow x_{2/3} = \pm 3$

b) $f(x) = x^3+6x^2-7x$

Lösung:

$$f(x) = x^3+6x^2-7x = x\left(x^2+6x-7\right) \Rightarrow x_1 = 0$$

$$r(x) = x^2+6x-7 = 0$$

$$\Rightarrow x_{2/3} = \frac{-6\pm\sqrt{36+28}}{2} = \frac{-6\pm 8}{2} \Rightarrow x_2 = 1 \quad und \quad x_3 = -7$$

c) $f(x) = x^4+5x^2+4$

Lösung:

$$x^4+5x^2+4 = 0 \xrightarrow{x^2=u} u^2+5u+4 = 0$$

$$u_{1/2} = \frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{2} = \frac{-5\pm 3}{2} \Rightarrow u_1 = -4 \quad \wedge \quad u_2 = -1$$

$\Rightarrow$ keine Lösung für x $\quad L = \{\ \}$

d) $f(x) = x^2-10x$

Lösung:

$$f(x) = x^2-10x = x(x-10) \Rightarrow x_1 = 0 \quad \wedge \quad x-10 = 0 \Rightarrow x_2 = 10$$

e) $f(x) = x^7 - 19x^4 - 216x$

Lösung:

$$f(x) = x^7 - 19x^4 - 216x = x\left(x^6 - 19x^3 - 216\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\xrightarrow{x^3=u} u^2 - 19u - 216 = 0$$

$$u_{1/2} = \frac{19 \pm \sqrt{361+864}}{2} = \frac{19 \pm 35}{2} \Rightarrow u_1 = 27 \wedge u_2 = -8$$

$$\Rightarrow x_2 = 3 \wedge x_3 = -2$$

f) $f(x) = x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 4x - 5$

Horner-Schema:

		x4	x3	x2	x1	x0
f(x) =		1,00	4,00	-4,00	4,00	-5,00

x0		a(4)	a(3)	a(2)	a(1)	a(0)
		1,00	4,00	-4,00	4,00	-5,00
1		0,00	1,00	5,00	1,00	5,00
		1,00	5,00	1,00	5,00	0,00
-5		0,00	-5,00	0,00	-5,00	
		1,00	0,00	1,00	0,00	

$$\Rightarrow x_1 = 1 \quad und \quad x_2 = -5$$

keine weiteren Nullstellen:

Restterm: $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \left[nicht\ lösbar\ in\ \Re\right]$

2.) Mathematische Aussageformen

Übersetzen Sie die folgenden Aussagen in mathematisch-formale Schreibweisen:

a) Der Funktionswert an der Stelle x = 2 beträgt 7.

Lösung: $f(2) = 7$

b) Alle Funktionswerte der Funktion f(x) sind positiv.

Lösung: $f(x) > 0 \quad oder \quad W = \Re^+$

c) Die Funktionen f(x) und g(x) besitzen an der Stelle x = 3 den selben Funktionswert.

Lösung: $f(3) = g(3)$

d) An der Stelle x = 3 ist der Funktionswert der Funktion g größer als an der Stelle x = 10.

Lösung: $g(3) > g(10)$

e) Die Zahl 2 ist Element der natürlichen Zahlen.

Lösung: $2 \in N$

3.) Erstellen ganzrationaler Funktionen

Bilden Sie die ganzrationalen Funktionsgleichungen aus den Angaben:

a) Grad: n = 6; Nullstellen: -4; 2; 5

Lösung:

$$f(x) = (x+4)^a (x-2)^b (x-5)^c \quad mit \quad a+b+c=6$$

$$oder \quad f(x) = (x+4)^a (x-2)^b (x-5)^c \left(x^2+d\right) mit\ d>0 \quad und \quad a+b+c=4$$

b) Koeffizienten: a_4 = -1; a_3 = 3; a_2 = 5; a_1 = 0; a_0 = -2

Lösung: $f(x) = -x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 2$

c) Grad: n = 5; Nullstellen: -3; -2; 4; 6; Koeffizient: a_5 = 8

Lösung:

$$f(x) = 8(x+3)^a (x+2)^b (x-4)^c (x-6)^d \quad mit \quad a+b+c+d=5$$

d) Grad: n = 3; Nullstellen: -1; 1; 3; Schnittpunkt y-Achse: $S_y(0 \mid 6)$

Lösung: $f(x) = 2(x+1)(x-1)(x-3) \xrightarrow{a_3=2} f(0) = 6$

4.) Gleichheit ganzrationaler Funktionen

Geben Sie die Werte der Koeffizienten an, damit die beiden jeweiligen Funktionen gleich sind.

a)
$$f(x) = ax^4 - bx^2 + cx - 8$$
$$g(x) = x^4 + 4x^2 - 6x + 4d$$

Lösung: $a = 1 \quad b = -4 \quad c = -6 \quad d = -2$

b)
$$f(x) = (a-6)x^3 + b^2x^2 + (2c+4)x - 6$$
$$g(x) = -b^2x^3 + 2ax^2 + 4cx - 3d$$

Lösung:

$$Ansätze: \quad a - 6 = -b^2 \quad und \quad b^2 = 2a$$

$$\xrightarrow{eingesetzt} \quad a - 6 = -2a \quad \Rightarrow \quad 3a = 6 \quad \Rightarrow \quad a = 2$$

$$\Rightarrow \quad b^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad b_1 = -2 \quad und \quad b_2 = 2$$

$$2c + 4 = 4c \Rightarrow c = 2 \qquad und \qquad 3d = 6 \Rightarrow d = 2$$

5.) Aussagenprüfung

Geben Sie an, ob die Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie Ihre Entscheidung.

a) Jede punktsymmetrische ganzrationale Funktion hat mindestens eine Nullstelle.

Lösung: **richtig**, denn punktsymmetrisch bedeutet, dass der Grad ungerade ist; ungerade Funktionen wiederum haben mindestens eine Nullstelle.

b) Wenn eine ganzrationale Funktion den Grad n = 5 besitzt, ist sie achsensymmetrisch.

Lösung: **falsch**, achsensymmetrische Funktionen sind gerade, daher muss der Grad auch gerade sein

c) Bei einer punktsymmetrischen ganzrationalen Funktion, gilt immer: $a_0 = 0$.

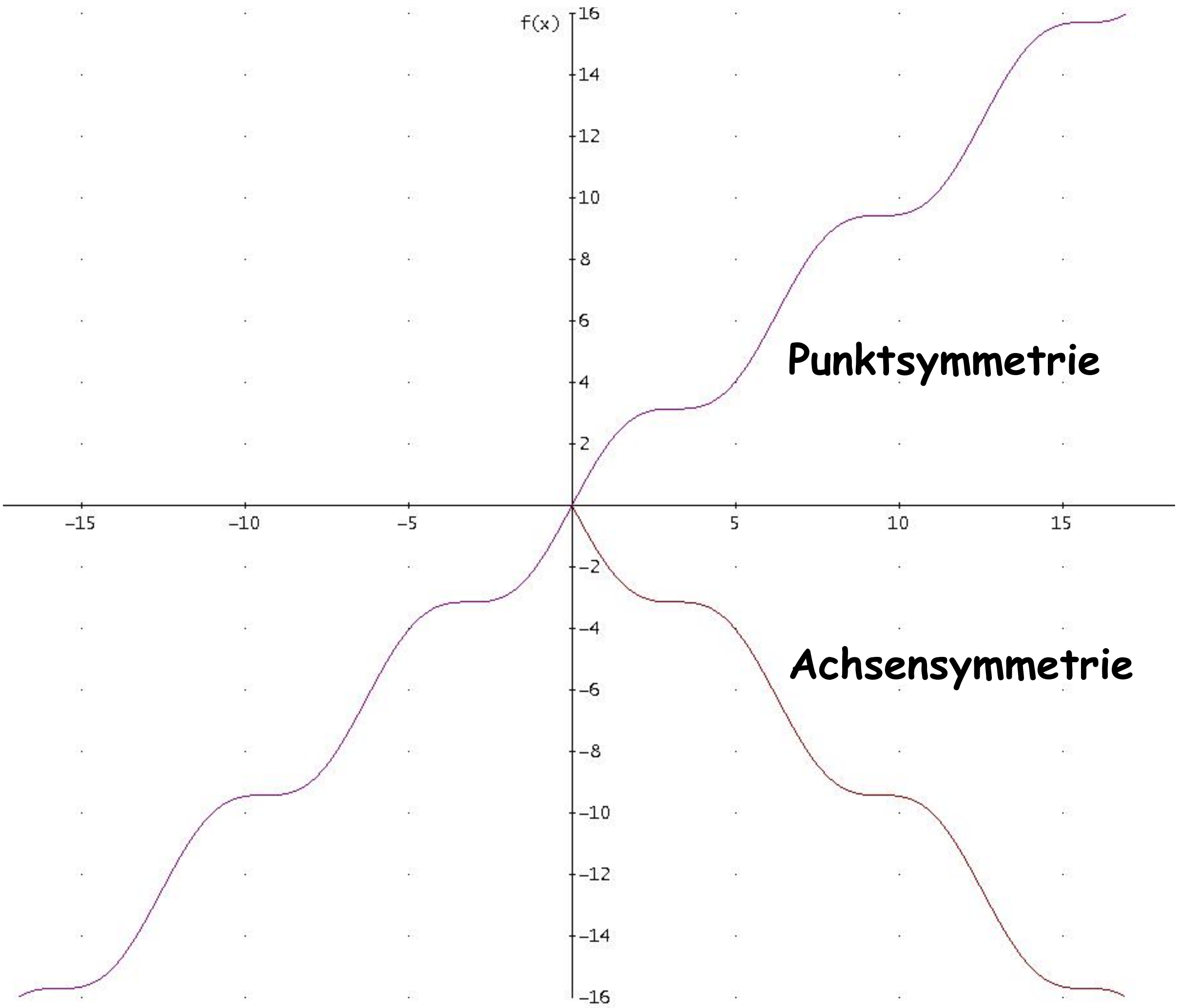
Lösung: **richtig**, denn punktsymmetrisch bedeutet, dass eine ungerade Funktion vorliegt; daher muss der Koeffizient a_0 den Wert 0 annehmen.

d) Wenn eine ganzrationale Funktion eine ungerade Anzahl von Nullstellen besitzt, dann ist die punktsymmetrisch.

Lösung: **falsch**, Gegenbeispiel: $f(x) = x^2$

6.) Symmetrie

a) Vervollständigen Sie den Graphen der Funktion sowohl als Achsen- als auch als Punktsymmetrie.



b) Beweisen Sie die Symmetrie bei folgenden Funktionen:

(i) $$f(x) = \frac{1}{2}x^5 - 2x^3 - 3x$$

Lösung:

$$f(-x) = \frac{1}{2}(-x)^5 - 2(-x)^3 - 3(-x) = -\frac{1}{2}x^5 + 2x^3 + 3x = -f(x)$$

(ii) $$g_k(x) = \frac{1}{4}x^4 + 3x^2 - k \quad mit \quad k \in \Re$$

Lösung:

$$g_k(-x) = \frac{1}{4}(-x)^4 + 3(-x)^2 - k = \frac{1}{4}x^4 + 3x^2 - k = g_k(x)$$

c) Zeigen Sie mit Hilfe der Funktionen f(x) und g(x) aus Teilaufgabe b), dass folgende Aussagen richtig sind und erläutern Sie Ihr Vorgehen ausführlich:

Durch Addition zweier ganzrationaler Funktionen entsteht eine Funktion, deren Grad kleiner oder gleich dem Maximum der Grade der Summanden ist.

Lösung:

$$f(x) + g_k(x) = \frac{1}{2}x^5 - 2x^3 - 3x + \frac{1}{4}x^4 + 3x^2 - k$$

$$f(x) + g_k(x) = \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x - k$$

Der Grad der Summenfunktion kann nicht größer werden als der höchste Exponent einer der Summandenfunktionen; allerdings kleiner wäre möglich, wenn sich die Koeffizienten bei beiden Funktionen bei der größten Hochzahl jeweils durch die Addition zu 0 aufheben.

d) Bilden Sie nun die neue Funktion h(x) mit

$$h(x) = \left[g_k(x) + g_k(-x)\right]^2 \quad mit \quad k = 0$$

Lösung:

$$h(x) = \left[\frac{1}{4}x^4 + 3x^2 + \frac{1}{4}(-x)^4 + 3(-x)^2\right]^2 = \left[\frac{1}{4}x^4 + 3x^2 + \frac{1}{4}x^4 + 3x^2\right]^2$$

$$h(x) = \left[\frac{1}{2}x^4 + 6x^2\right]^2 = \frac{1}{4}x^8 + 6x^6 + 36x^4$$

e) Welche Symmetrieeigenschaft besitzt h(x)?

Nur Begründen – ohne Beweis!

Lösung: h(x) ist achsensymmetrisch, da alle Hochzahlen gerade sind.

f) Begründen Sie die Korrektheit folgender Aussage oder widersprechen der Behauptung, indem Sie ein Gegenbeispiel bilden:

Durch das Quadrieren einer achsen- oder punktsymmetrischen Funktion entsteht immer eine achsensymmetrische Funktion.

Lösung: Durch das Quadrieren werden die Exponenten immer addiert;

Fall 1:

Ausgangsfunktion ist punktsymmetrisch, d.h. alle Exponenten sind ungerade;

=> die Summe von zwei ungeraden Zahlen ist aber immer gerade

Beweis:

$$2n-1 \quad + \quad 2m-1 \quad = \quad 2n+2m-2 \quad = \quad 2(n+m-1) \quad mit \quad n,m \in Z$$

Diese Zahl ist wegen des Faktors 2 vor der Klammer immer gerade.

Fall 2:

Ausgangsfunktion ist achsensymmetrisch, d.h. alle Exponenten sind gerade;

=> die Summe von zwei geraden Zahlen ist aber immer gerade

Beweis:

$$2n \quad + \quad 2m \quad = \quad 2n+2m \quad = \quad 2(n+m) \quad mit \quad n,m \in Z$$

Diese Zahl ist wegen des Faktors 2 vor der Klammer immer gerade.

Daher gilt: Die Exponenten der quadrierten Funktion sind immer gerade und daher ist die Funktion achsensymmetrisch.