Musterlösung **11. Jgst.** **5. Test** **Datum: 19.04.2010**

Klasse: GY GS 09 c **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: **Stetigkeit und Differenzierbarkeit;**
Extrema bei ganzrationalen Funktionen

1.) Differenzierbarkeit

Geben Sie graphisch ein Beispiel für eine nicht differenzierbare Funktion an und erklären Sie, warum die Funktion nicht differenzierbar ist.

Lösung: Beispiele für nicht differenzierbare Funktionen sind Funktionen, bei denen eine Knickstelle vorliegt, da hier die Steigung von links und rechts an die Stelle x angenähert unterschiedlich ist.

2.) Definition und Erklärung

Was versteht man unter Stetigkeit?

Lösung: Bei Stetigkeit muss gelten:

$$\lim_{h \to 0} f\left(x_0 + h\right) = \lim_{h \to 0} f\left(x_0 - h\right) = f\left(x_0\right)$$

3.) Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Gegeben sei die Funktion $f_{k,t}(x) = \begin{cases} x^2 - kx & \text{für } x \leq 2 \\ -x^3 + t & \text{für } x > 2 \end{cases}$

Für welchen Werte von k und **t** ist die Funktion $f_{k,t}(x)$ differenzierbar?

Lösung:

$$\text{Stetigkeit:}$$

$$f_{k,t;1}(2) = f_{k,t;2}(2) \Rightarrow 4 - 2k = -8 + t \Rightarrow t = 12 - 2k$$

$$\text{Differenzierbarkeit:}$$

$$f_{k,t}'(x) = \begin{cases} 2x - k & \text{für } x \leq 2 \\ -3x^2 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

$$f_{k,t;1}'(2) \; = \; f_{k,t;2}'(2) \;\Rightarrow\; 4-k \; = \; -12 \quad \Rightarrow\; k \; = \; 16$$

$$\xrightarrow{k=16} \; t \; = \; -20$$

$$\Rightarrow \; f(x) \; = \; \begin{cases} x^2 - 16x & \text{für } x \le 2 \\ -x^3 - 20 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

4.) Extremwerte

Bestimmen Sie die Extremwerte der folgenden Funktionen:

a) $f(x) \; = \; -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x$

Lösung:

$$f'(x) \; = \; -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \; = \; 0 \;\Rightarrow\; x \; = \; 1$$

$$f''(x) \; = \; -\frac{1}{4} \; \xrightarrow{x=1} \; f''(4) \; = \; -\frac{1}{4} < 0 \;\Rightarrow\; HP\left(1 \;\middle|\; \frac{1}{8}\right)$$

b) $f(x) \; = \; 2x^3 - 4x^2 + 2x - 6$

Lösung:

$$f'(x) \; = \; 6x^2 - 8x + 2 \; = \; 0 \; \xrightarrow{\text{Lösungsformel}} \; x_1 = \frac{1}{3} \quad und \quad x_2 = 1$$

$$f''(x) \; = \; 12x - 8 \; \xrightarrow{x=\frac{1}{3}} \; f''\left(\frac{1}{3}\right) \; = \; -4 < 0 \;\Rightarrow\; HP\left(\frac{1}{3} \;\middle|\; -\frac{154}{27}\right)$$

$$f''(x) \; = \; 12x - 8 \; \xrightarrow{x=1} \; f''(1) \; = \; 4 > 0 \;\Rightarrow\; TP(1 \mid -6)$$

5.) Nachweis von Extremwerten

Zeigen Sie, dass die Funktion $f_k(x)$ für k > 0 bei x = 1,5k einen Extremwert hat. Welche Art von Extremum liegt vor?

$$f_k(x) \quad = \quad x^2 - 3kx$$

Lösung:

$$f_k'(x) \quad = \quad 2x - 3k \quad = \quad 0 \quad \Rightarrow \quad x \quad = \quad \frac{3}{2}k$$

$$f_k''(x) \quad = \quad 2 \quad \xrightarrow{x=\frac{3}{2}k} \quad f_k''\left(\frac{3}{2}k\right) \quad = \quad 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad TP\left(\frac{3}{2}k \;\middle|\; -\frac{9}{4}k^2\right)$$