Musterlösung **12. Jgst.** **1. Klassenarbeit** **Datum: 29.09.2009**

Klasse: HBF **Fach: Mathematik**

Thema: Kurvendiskussion ganzrat. Funktionen; Rekonstruktion von Fkt.

1.) Ableitungen

Bilden Sie die 1. Ableitung zu folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 4x$ ***Lösung:*** $f'(x) = x^2 - 4x - 4$

b) $f_t(x) = \frac{2}{t}x^3 - tx^2 + t$ ***Lösung:*** $f_t'(x) = \frac{6}{t}x^2 - 2tx$

c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^{2n+1} + x^{2n}$

Lösung: $f'(x) = -\frac{1}{2}(2n+1)x^{2n} + 2nx^{2n-1}$

2.) Untersuchung einer ganzrationalen Funktion

Gegeben sei folgende Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2$$

Untersuchen Sie die Funktion nach folgenden Kriterien:

a) Nullstellen

Lösung: $f(x) = x^2\left(\frac{1}{6}x - \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \; und \; x_2 = 3$

b) Extremwerte

Lösung:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x = x\left(\frac{1}{2}x - 1\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \; und \; x_2 = 2$$

$$f''(x) = x - 1$$

$$\Rightarrow f''(0) = -1 < 0 \Rightarrow Max(0 \mid 0)$$

$$\Rightarrow f''(2) = 1 > 0 \Rightarrow Min\left(2 \,\middle|\, -\frac{2}{3}\right)$$

c) Wendepunkte

Lösung:

$$f''(x) = x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f'''(x) = -1 \Rightarrow f'''(1) = -1 \neq 0 \Rightarrow WP\left(1 \,\middle|\, -\frac{1}{3}\right)$$

d) Tangente in x = -2

Lösung:

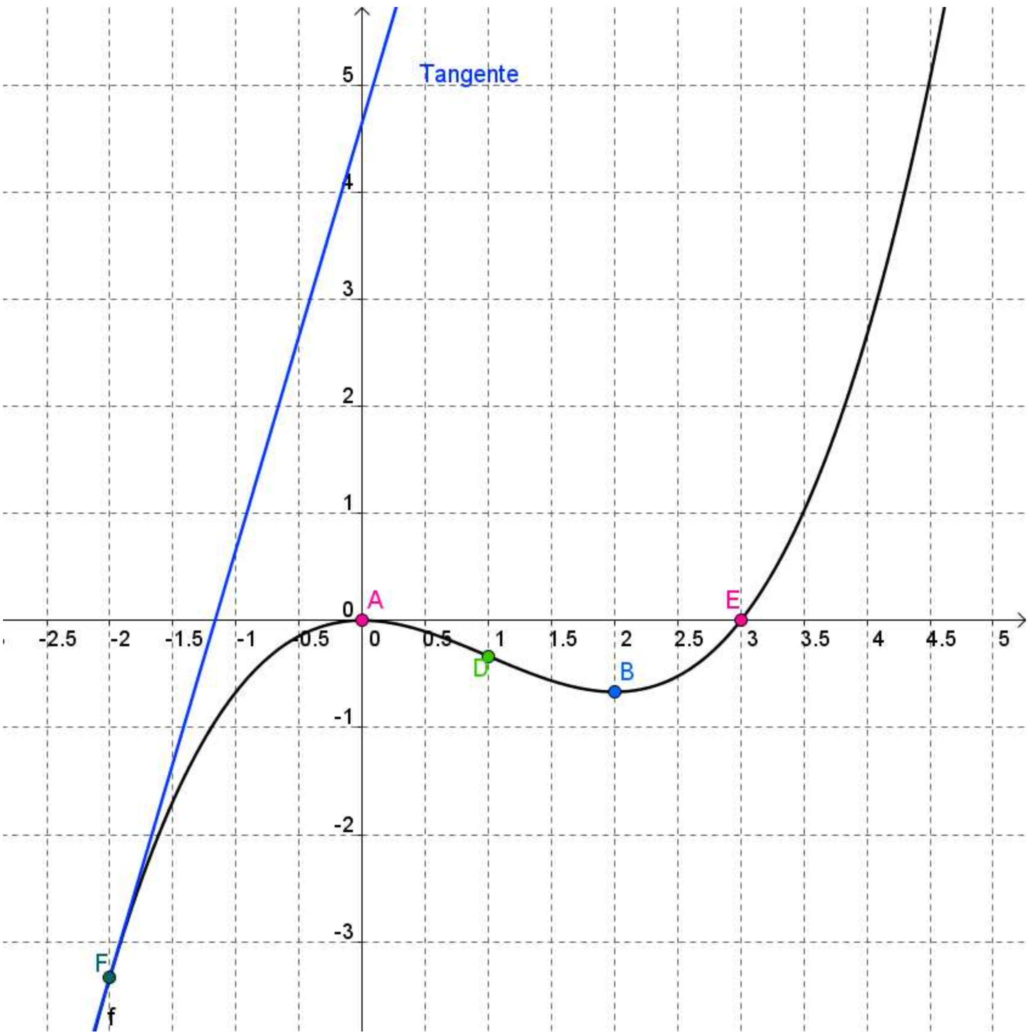
$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \quad und \quad f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$$

$$f(-2) = \frac{1}{6}\cdot(-2)^3 - \frac{1}{2}\cdot(-2)^2 = -\frac{10}{3}$$

$$f'(-2) = \frac{1}{2}\cdot(-2)^2 - (-2) = 4 = m$$

$$\xrightarrow{b\ brechnen} -\frac{10}{3} = 4\cdot(-2)+b \Rightarrow b = 8-\frac{10}{3} \Rightarrow b = \frac{14}{3}$$

$$\xrightarrow{Tangentengleichung} t(x) = 4x+\frac{14}{3}$$



3.) Bestimmung bzw. Rekonstruktion von ganzrationalen Funktionen

a) Die ganzrat. Fkt. $f(x) = ax^2 - bx$ verläuft durch den Punkt **P (-1 / -1)** und hat in **x = 4** die Steigung **m = -2**.

Lösung:

$$f(x) = ax^2 - bx \quad und \quad f'(x) = 2ax - b$$

$$I.) \quad f(-1) = a + b = -1$$

$$\underline{II.) \quad f'(4) = 8a - b = -2}$$

$$I.)+II.) \quad 9a = -3 \Rightarrow a = -\frac{1}{3} \Rightarrow b = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x$$

b) Die ganzrat. Fkt. $f(x) = ax^3 + bx^2$ hat einen Wendepunkt **W (2 / 1)**.

Lösung:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 \quad und \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx \quad und \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

$$I.) \quad f(2) = 8a + 4b = 1$$

$$\underline{II.) \quad f''(2) = 12a + 2b = 0 \xrightarrow{\cdot(-2)} -24a - 4b = 0}$$

$$I.)+II.) \quad -16a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{16} \Rightarrow b = \frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = -\frac{1}{16}x^3 + \frac{3}{8}x^2$$

4.) Rekonstruktion von ganzrationalen Funktionen I

Eine Parabel 3. Ordnung geht durch den **Ursprung** , hat im Punkt $P\left(-1 \,\middle|\, -\frac{16}{3}\right)$ eine waagrechte Tangente und an der Stelle x = 2 einen Wendepunkt.

Lösung:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad und \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

$$I.)\quad f(0) = d = 0$$

$$II.)\quad f(-1) = -a+b-c = -\frac{16}{3}$$

$$III.)\quad f'(-1) = 3a-2b+c = 0$$

$$IV.)\quad f''(2) = 12a+2b = 0 \Rightarrow b = -6a$$

$$IV.)\ in\ II.)\quad -a-6a-c = -\frac{16}{3} \quad \Rightarrow \quad -7a-c = -\frac{16}{3}$$

$$IV.)\ in\ III.)\quad 3a-2\cdot(-6a)+c = 0 \Rightarrow 15a+c = 0$$

$$\xrightarrow{II.)+III.)} 8a = -\frac{16}{3} \Rightarrow a = -\frac{2}{3} \Rightarrow b = 4 \Rightarrow c = 10$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = -\frac{2}{3}x^3+4x^2+10x$$

5.) **Rekonstruktion von ganzrationalen Funktionen II**

Eine Parabel 4. Grades hat den Tiefpunkt **T (-1 / -1)** und im Punkt **P (2 / 1)** einen Sattelpunkt.

Bilden Sie hier nur alle notwendigen Ansätze! Keine Berechnung!

<u>Lösung:</u>

$$f(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$

$$f'(x) = 4ax^3+3bx^2+2cx+d \quad und \quad f''(x) = 12ax^2+6bx+2c$$

$$I.)\quad f(-1) = a-b+c-d+e = -1$$

$$II.)\quad f'(-1) = -4a+3b-2c+d = 0$$

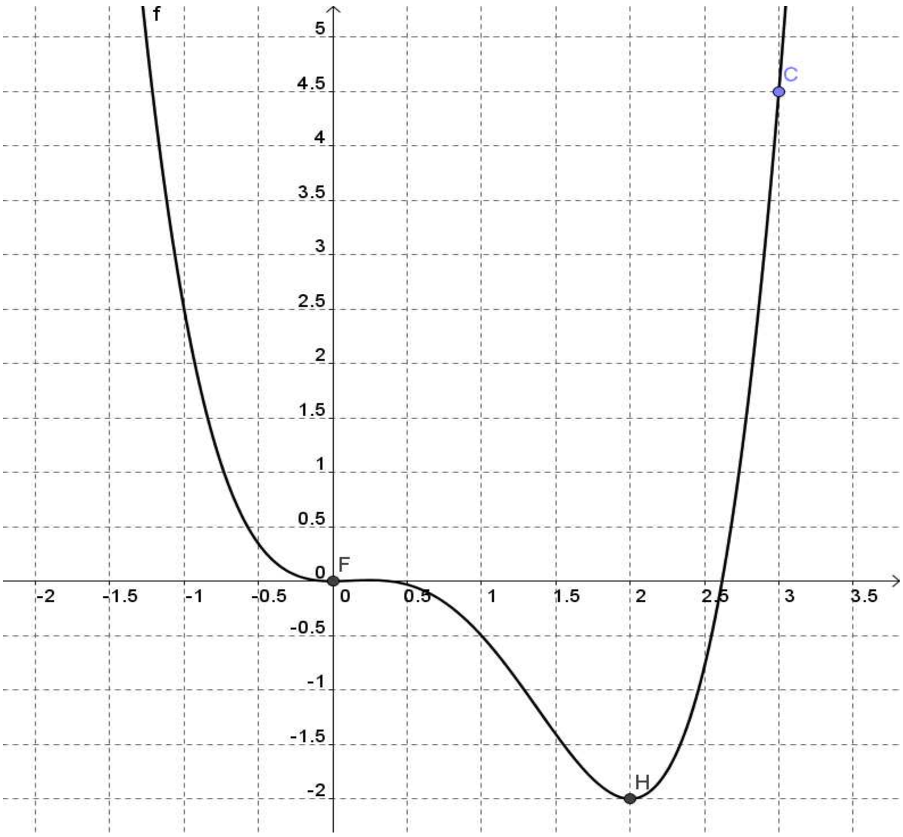
$$III.)\quad f(2) = 16a+8b+4c+2d+e = 1$$

$$IV.)\quad f'(2) = 32a+12b+4c+d = 0$$

$$V.)\quad f''(2) = 48a+12b+2c = 0$$

6.) **Rekonstruktion von ganzrationalen Funktionen III**

Eine Parabel 4. Grades hat folgende Eigenschaften:



Ermitteln Sie notwendige Ansätze und die zugehörige Funktionsvorschrift.

Lösung:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \quad \text{und} \quad f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

$$I.)\quad f(0) = e = 0$$

$$II.)\quad f'(0) = d = 0$$

$$III.)\quad f(2) = 16a + 8b + 4c = -2 \xrightarrow{:4} 4a + 2b + c = -\frac{1}{2}$$

$$IV.)\quad f'(2) = 32a + 12b + 4c = 0 \xrightarrow[\text{nach c auflösen}]{:4} c = -8a - 3b$$

$$V.)\quad f(3) = 81a + 27b + 9c = \frac{9}{2}$$

$$IV.)\ in\ III.)\quad 4a + 2b + (-8a - 3b) = -\frac{1}{2} \Rightarrow -4a - b = -\frac{1}{2}$$

$$IV.)\ in\ V.)\quad 81a + 27b + 9\cdot(-8a - 3b) = \frac{9}{2} \Rightarrow 9a = \frac{9}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow b = -\frac{3}{2} \Rightarrow c = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2$$