Musterlösung **12. Jgst.** **2. Test** **Datum:** **19.11.2009**

Klasse: HBF **Fach: Mathematik**

Thema: Newton-Iteration; Extremwertaufgaben; Kapitalwertmethode

1.) Newton-Iteration

Bestimmen Sie die Nullstelle bei folgender Funktion $f(x) = x^3 - 10$

indem Sie zwei Iterationsschritte mit einem geeigneten Startwert durchführen.

Lösung: $f(x) = x^3 - 10$ $f'(x) = 3x^2$

Startwert: x = 2

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	**2**	-2	12	2.166666
1	2.16666	0.17129629	14.083333	2.1545036
2	2.1545036	0.00095980	13.925657	2.1544346

Startwert: x = 3

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	**3**	17	27	2.370370
1	2.370370	3.318294975	16.8559670	2.1735086
2	2.1735086	0.267958580	14.17241932	2.1546015

2.) Kapitalwertmethode und interner Zinsfuß

Gegeben sei folgende Zahlungsreihe:

Jahr 0	Jahr 1	Jahr 2	Jahr 3	Jahr 4
- 20.000,00	5.000,00	6.000,00	7.000,00	6.000,00

a) Bestimmen Sie den Kapitalwert dieser Zahlungsreihe bei einem Zinssatz von 8 %.

Lösung:

$$C_0 = -20.000 + \frac{5.000}{1,08} + \frac{6.000}{1,08^2} + \frac{7.000}{1,08^3} + \frac{6.000}{1,08^4}$$

$$C_0 = -20.000 + 4.629,63 + 5.144,03 + 5.556,83 + 4.410,18$$

$$C_0 = -259,33$$

b) Was bedeutet ein positiver Kapitalwert?

Lösung: Ein positiver Kapitalwert bedeutet, dass das Investitionsprojekt gegenüber einer Alternativanlage zu einem Vergleichszinssatz vorteilhafter ist und daher durchgeführt werden sollte.

c) Berechnen Sie den internen Zinsfuß dieser Investition mittels einer Näherung und dem Startzinssatz 10 %.

Lösung:

$$0 = -20.000 + \frac{5.000}{q} + \frac{6.000}{q^2} + \frac{7.000}{q^3} + \frac{6.000}{q^4}$$

$$0 = -20.000 \cdot q^4 + 5.000 \cdot q^3 + 6.000 \cdot q^2 + 7.000 \cdot q + 6.000$$

$$Newton-Iteration:$$

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	**1.1**	-1667	-68130	1.0755320710
1	1.0755320	-72.2493275	-62273.4695	1.0743718766
2	1.0743718	-0.156929790	-62003.0553	1.0743693456

3.) Extremwertaufgabe I

Die Summe zweier Zahlen beträgt 120.

Bestimmen Sie die beiden Zahlen, so dass deren Produkt maximal wird.

Lösung:

$$Zielfunktion: \quad f(a,b) = a \cdot b$$

$$Nebenbedingung: \quad 120 = a+b \Rightarrow b = 120-a$$

$$\xrightarrow{b\ =\ 120-a} f(a) = a\cdot(120-a) = -a^2+120a$$

$$\Rightarrow f'(a) = -2a+120 = 0 \Rightarrow a = 60$$

$$\Rightarrow f''(a) = -2<0 \Rightarrow Max \Rightarrow b = 60$$

$$\Rightarrow f(a,b) = 3.600$$

4.) Extremwertaufgabe II

Auf einer Wiese soll ein rechteckiges Feld für Weidetiere eingezäunt werden.
Das Feld liegt an einem geraden Bach und soll eine Fläche von 20.000 m^2 haben.
Die Seite zum Bach soll nicht eingezäunt werden.
Welche Maße muss das Feld haben, damit möglichst wenig Zaun benötigt wird?

Lösung:

$$Zielfunktion: \quad U(a,b) = 2a+b$$

$$Nebenbedingung: \quad 20.000 = a\cdot b \Rightarrow b = \frac{20.000}{a}$$

$$\xrightarrow{b\ =\ \frac{20.000}{a}} U(a) = 2a+\frac{20.000}{a}$$

$$\Rightarrow U'(a) = 2-\frac{20.000}{a^2} = 0 \Rightarrow a = 100$$

$$\Rightarrow U''(a) = \frac{40.000}{a^3} \Rightarrow \frac{40.000}{100^3}>0 \Rightarrow Min$$

$$\Rightarrow b = 200 \Rightarrow U(a,b) = 400\,[m]$$