Musterlösung **12. Jgst.** **4. Test** **Datum:** **18.02.2010**

Klasse: HBF HE 08 **Fach: Mathematik**

Thema: Integralrechnung: Flächen zwischen Funktionen

1.) Bestimmung Integral

Berechnen Sie das Integral: $\int_1^{2a} ax^3 dx \quad mit\ a > \frac{1}{2}$

Lösung:

$$\int_1^{2a} ax^3 dx = \left[\frac{1}{4}ax^4\right]_1^{2a} = \frac{1}{4}a(2a)^4 - \frac{1}{4}a \cdot 1^4 = 4a^5 - \frac{1}{4}a$$

2.) Lösungsmenge für Parameter bestimmen

Bestimmen Sie die Lösung für den Parameter: $\int_{-1}^{t}\left(\frac{1}{2}x+4\right)dx = 12{,}75$

=> Warum erhalten Sie für **t** zwei Ergebnisse?

=> Welches ist korrekt oder sind beide etwa richtig?

Lösung:

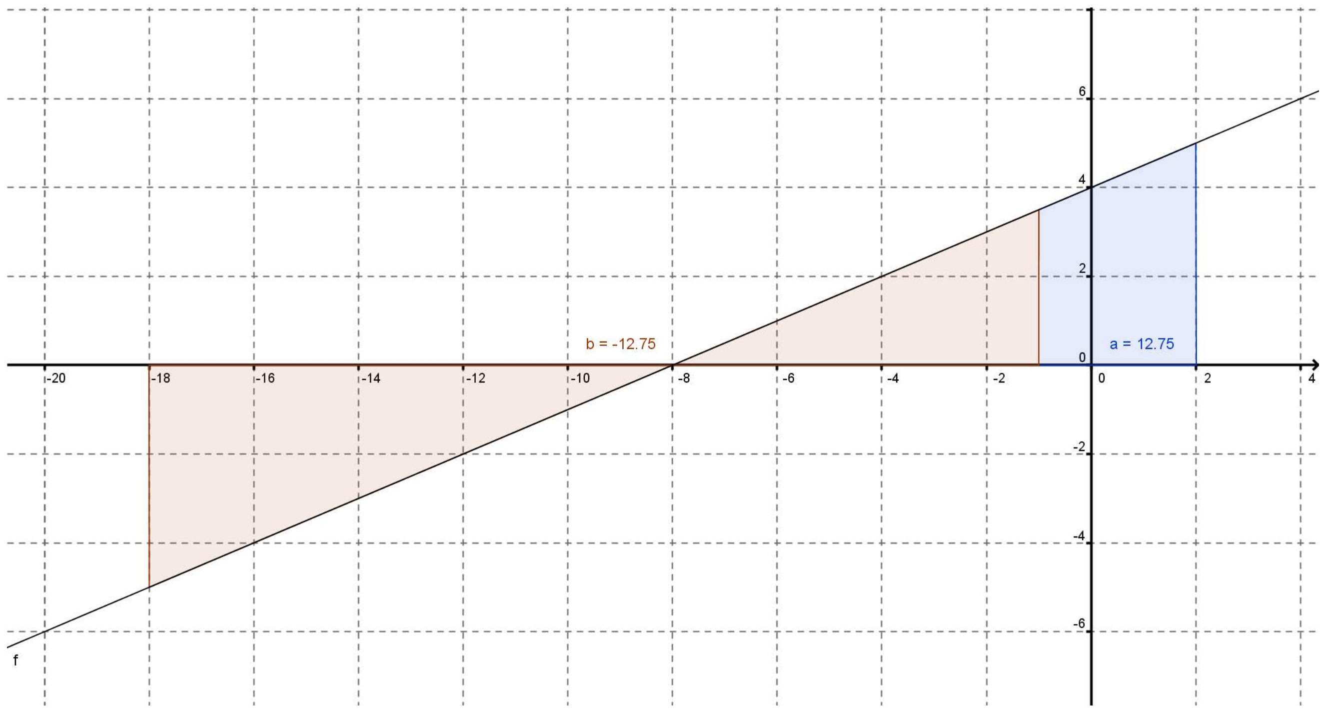
$$\int_{-1}^{t}\left(\frac{1}{2}x+4\right)dx = 12{,}75 \Rightarrow \left[\frac{1}{4}x^2+4x\right]_{-1}^{t} = 12{,}75$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}t^2+4t-\left(\frac{1}{4}-4\right) = 12{,}75 \Rightarrow \frac{1}{4}t^2+4t+\frac{15}{4} = 12{,}75$$

$$\xrightarrow{\cdot 4} t^2+16t+15 = 51 \xrightarrow{-51} t^2+16t-36 = 0$$

$$\xrightarrow{Lösungsformel} t_1 = 2 \quad und \quad t_2 = -18$$

Beide Lösungen für **t** sind korrekt, da einmal der orientierte Flächeninhalt und einmal die Gesamtfläche mit Verrechnung der Teilfläche unterhalb und oberhalb der x-Achse ermittelt wird.



3.) Flächen zwischen Funktionen I

Welche Fläche schließen die beiden Funktionen f(x) und g(x) miteinander ein?

$$f(x) = x^3 - 2x \qquad g(x) = x\left(\frac{1}{4}x - 2\right)$$

__**Lösung:**__

Schnittstellen berechnen:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^3 - 2x = 0,25x^2 - 2x \Rightarrow x^2(x - 0,25) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad und \quad x_2 = 0,25$$

Fläche ermitteln:

$$\left|\int_0^{0,25}\left(x^3 - \frac{1}{4}x^2\right)dx\right| = \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{12}x^3\right]_0^{0,25}\right| = \left|\frac{1}{1.024} - \frac{1}{768} - 0\right| = 0,00032552$$

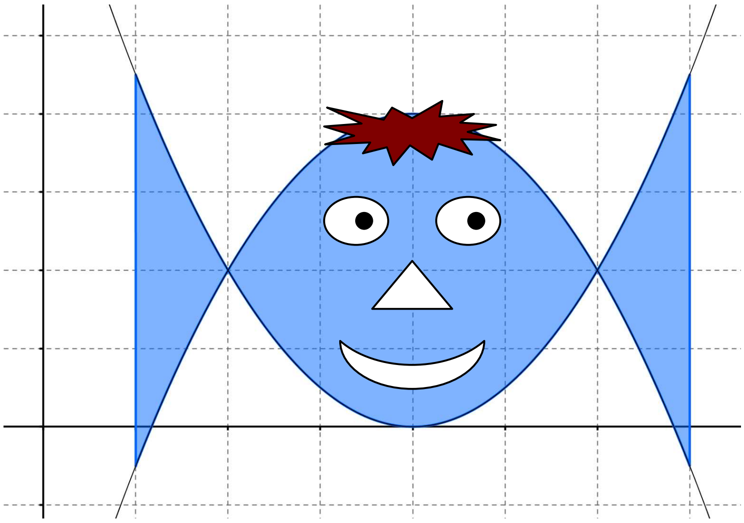
4.) Flächen zwischen Funktionen II

Berechnen Sie die gefärbte (Bonbon-)Fläche:

$$f(x) = x^2 - 4x + 4$$

$$g(x) = -x^2 + 4x - 2$$

$$I = \left[\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right]$$



<u>Lösung:</u>

Schnittstellen berechnen:

$$f(x) = g(x) \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x + 4 = -x^2 + 4x - 2 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - 8x + 6 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{Lösungsformel}} \quad x_1 = 1 \quad und \quad x_2 = 3$$

Fläche ermitteln:

$$2 \cdot \int_{0,5}^{1} \left(2x^2 - 8x + 6\right) dx + 2 \cdot \left| \int_{1}^{2} \left(2x^2 - 8x + 6\right) dx \right|$$

$$= \quad 2 \cdot \left[\frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x\right]_{0,5}^{1} + 2 \cdot \left| \left[\frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x\right]_{1}^{2} \right|$$

$$= \quad 2 \cdot \left[\left(\frac{2}{3} - 4 + 6\right) - \left(\frac{1}{12} - 1 + 3\right)\right] + 2 \cdot \left| \left(\frac{16}{3} - 16 + 12\right) - \left(\frac{2}{3} - 4 + 6\right) \right|$$

$$= \quad 2 \cdot \left(\frac{8}{3} - \frac{25}{12}\right) + 2 \cdot \left|\frac{4}{3} - \frac{8}{3}\right| \quad = \quad 2 \cdot \frac{7}{12} + 2 \cdot \frac{4}{3} \quad = \quad \frac{23}{6}$$