12. Jgst.	1. Kursarbeit	Datum: 06.10.2023
Kurs 12/1	Fach: Mathematik (Leistungsfach)	

Thema: **Ableitungsregeln; Summenzeichen**
Kurvenscharen ganzrat. Fkt.

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Name:	
Punkte:	Note:

Aufgabe 1: **Kurvendiskussion Scharkurve (ganzrational)**

40	

Gegeben sei die Funktion $g_a(x) = \frac{4}{3}x^3 - ax^2 \quad mit\ a > 0$

a) Berechnen Sie die **Nullstellen, Extrema und Wendepunkte** und führen Sie vollständige Nachweise durch.

$Nullstellen:$

$$g_a(x) = \left(\frac{4}{3}x - a\right)x^2 = 0 \rightarrow x_1 = 0[doppelt] \quad und \quad x_2 = \frac{3}{4}a$$

$Extrema:$

$$g_a'(x) = (4x - 2a)x = 0 \rightarrow x_1 = 0 \quad und \quad x_2 = \frac{1}{2}a$$

$$g_a''(x) = 8x - 2a$$

$$g_a''(0) = -2a < 0 \rightarrow HP(0 \mid 0) \rightarrow TP\left(\frac{1}{2}a \;\middle|\; -\frac{1}{12}a^3\right)$$

$Wendepunkt:$

$$g_a''(x) = 8x - 2a = 0 \rightarrow x = \frac{1}{4}a$$

$$g_a'''(x) = 8 \neq 0$$

$$g_a'''\left(\frac{1}{4}a\right) = 8 \neq 0 \rightarrow WP\left(\frac{1}{4}a \;\middle|\; -\frac{1}{24}a^3\right)$$

b) Geben Sie die Monotonieintervalle und das entsprechende Verhalten an.

$I_1 = \left]-\infty\,;0\right]$ monoton steigend $\qquad I_2 = \left]0\,;\frac{1}{2}a\right]$ monoton fallend

$I_3 = \left]\frac{1}{2}a\,;\infty\right]$ monoton steigend

c) Zeigen und begründen Sie, dass die Scharkurven für verschiedene Werte von a immer genau nur einen gemeinsamen Punkt besitzen und bestimmen Sie diesen.

$\textit{Behauptung}:\quad$ Für $a_1 \neq a_2$ $\exists$ ein gemeinsamer Punkt

Beweis: $\quad g_{a_1}(x) = g_{a_2}(x) \rightarrow \frac{4}{3}x^3 - a_1x^2 = \frac{4}{3}x^3 - a_2x^2$

$$\xrightarrow{-\frac{4}{3}x^3} -a_1x^2 = -a_2x^2 \xrightarrow{+a_2x^2} a_2x^2 - a_1x^2 = 0$$

$$\xrightarrow{x^2 \text{ ausklammern}} (a_2 - a_1)x^2 = 0 \xrightarrow[a_1 \neq a_2]{\text{Satz vom Nullprodukt}} x^2 = 0 \rightarrow P(0 \mid 0)$$

d) Wie lautet die Tangentengleichung der Funktion $g_{a=2}(x)$ **an der Stelle x = 3**?

$$g_{a=2}(x) = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 \xrightarrow{x=3} g_{a=2}(3) = 18$$

$$g_{a=2}'(x) = 4x^2 - 4x \xrightarrow{x=3} g_{a=2}'(3) = 24 = m$$

b berechnen mittels Geradengleichung y = mx+b: $\quad 18 = 24 \cdot 3 + b \rightarrow b = -54$

$\textit{Tangente}: \quad t(x) = 24x - 54$

e) Für welchen Wert von a besitzt die Funktion einen Wendepunkt **an der Stelle x = 0,5**?

Wendepunkt:

$$\rightarrow WP\left(\frac{1}{4}a \,\middle|\, -\frac{1}{24}a^3\right) \rightarrow \frac{1}{4}a = x \rightarrow \frac{1}{4}a = \frac{1}{2} \rightarrow a = 2$$

Für die nachfolgenden Fragestellungen seien folgende Werte angegeben, die nicht mit Ihren zuvor ermittelten Werten/Ergebnissen übereinstimmen müssen:

$$HP(0 \mid 0) \qquad TP\left(a \,\middle|\, -\frac{1}{6}a^3\right) \qquad WP(??? \mid ???)$$

f) Ermitteln Sie den Abstand zwischen HP und TP.

$$HP(0 \mid 0) \qquad TP\left(a \,\middle|\, -\frac{1}{6}a^3\right)$$

Abstand: $\quad e = \sqrt{(a-0)^2 + \left(-\frac{1}{6}a^3 - 0\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{1}{36}a^6} = a \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{36}a^4}$

g) Der Wendepunkt soll in der Mitte zwischen HP und TP liegen. Wie lauten die Koordinatenwerte?

$$HP(0 \mid 0) \qquad TP\left(a \;\middle|\; -\frac{1}{6}a^3\right) \qquad WP(??? \mid ???)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_m = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \rightarrow x_m = \frac{1}{2}(0+a) \rightarrow x_m = \frac{1}{2}a \\ y_m = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \rightarrow y_m = \frac{1}{2}\left(0 - \frac{1}{6}a^3\right) \rightarrow y_m = -\frac{1}{12}a^3 \end{array}\right\} WP\left(\frac{1}{2}a \;\middle|\; -\frac{1}{12}a^3\right)$$

Aufgabe 2: **Untersuchung Kurvenscharen**

7	

Gegeben sei die Funktion $f_k(x) = \frac{1}{4}x^2\left(x^2 - 4x + \frac{1}{2}k^2\right) \quad mit\ k > 0$

Für welchen Wertebereich von k besitzt die Funktion nur eine Extremwertstelle?
Wie lauten die Koordinaten des Extremums in diesem Fall?
Gehen Sie in diesem Zusammenhang auch speziell auf den Wert k = 3 als „Sonderfall" ein.
Anmerkung: Es genügt dabei das notwendige Kriterium heranzuziehen.

$$f_k(x) = \frac{1}{4}x^2\left(x^2 - 4x + \frac{1}{2}k^2\right) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{1}{8}k^2x^2$$

$$f_k'(x) = x^3 - 3x^2 + \frac{1}{4}k^2x = \left(x^2 - 3x + \frac{1}{4}k^2\right)x = 0$$

$\rightarrow \quad x_1 = 0 \quad$ Ein Extremum existiert unabhängig vom Parameter immer!

$$\rightarrow \quad x_{2/3} = \frac{3 \pm \sqrt{9-k^2}}{2}$$

$\rightarrow \quad 9 - k^2 > 0 \rightarrow k < 3 \xrightarrow{k>0} k \in \left]0\,;3\right[\rightarrow 2\ Lösungen$

$\rightarrow \quad 9 - k^2 < 0 \rightarrow k > 3 \xrightarrow{k>0} k \in \left]3\,;\infty\right[\rightarrow keine\ Lösung(en)$

$\rightarrow \quad 9 - k^2 = 0 \rightarrow k = 3 \xrightarrow{k>0} k = 3 \rightarrow$ doppelte NS der 1.Ableitung $\rightarrow$ Sattelpunkt

Auswertung:

1 Extremum $\Leftrightarrow \quad k \in \left[3\,;\infty\right[\quad bzw. \quad k \geq 3$

3 Extrema $\Leftrightarrow \quad k \in \left]0\,;3\right[\quad bzw. \quad 0 < k < 3$

Aufgabe 3: **Ortskurve** | 6 | |

Die lokalen Extrempunkte einer Kurvenschar haben die Koordinaten $E\left(1+\sqrt{a} \mid 2+a\right)$

Berechnen Sie die Gleichung der Ortskurve der Extrempunkte.

$$E\left(x=1+\sqrt{a} \mid y=2+a\right)$$

$$x=1+\sqrt{a} \xrightarrow{-1} x-1=\sqrt{a} \xrightarrow{Quadrieren} (x-1)^2=a$$

$$\xrightarrow[y=2+a]{einsetzen\ in} y=2+(x-1)^2 \rightarrow y=2+x^2-2x+1 \rightarrow y=x^2-2x+3$$

Aufgabe 4: **Ableitungen** | 14 | |

Bilden Sie zu den folgenden Funktionen jeweils die erste Ableitung
und vereinfachen Sie den Term dann so weit wie möglich bzw. sinnvoll:

a)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{5}\frac{1}{k^2+1}\cdot x^k = 1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{10}x^3+\frac{1}{17}x^4+\frac{1}{26}x^5$$

$$f'(x) = 0+\frac{1}{2}+\frac{2}{5}x+\frac{3}{10}x^2+\frac{4}{17}x^3+\frac{5}{26}x^4 = \sum_{k=1}^{5}\frac{k}{k^2+1}\cdot x^{k-1}$$

b)

$$f_k(x) = \frac{kx^3+x^5}{x^k} = kx^{3-k}+x^{5-k}$$

$$f_k'(x) = (3-k)kx^{2-k}+(5-k)x^{4-k} = \frac{(3-k)kx^2+(5-k)x^4}{x^k}$$

c) $$f_x(k) = \frac{1}{2}k^4x^{n+1}-k^2x^n \rightarrow f_x'(k) = 2k^3x^{n+1}-2kx^n$$

d) $$f_k(x) = \frac{1}{2}k^4x^{n+1}-k^2x^n \rightarrow f_k'(x) = \frac{1}{2}(n+1)k^4x^n-nk^2x^{n-1}$$

Aufgabe 5: **Summenzeichen** | 16 | |

Bestimmen Sie die ersten drei und den letzten Summanden und ermitteln Sie die Summe.

a)

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2}k^2 - 4k \quad = \quad -3,5-6-7,5-...+10$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10} k^2 - 4\sum_{k=1}^{10} k \quad = \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6} - 4\cdot\frac{10\cdot 11}{2} \quad = \quad 192,5-220 \quad = \quad -27,5$$

b)

$$\sum_{k=21}^{1000} (-1)^{2k+1} \quad = \quad -1-1-1-...-1 \quad = \quad (1000-21+1)\cdot(-1) \quad = \quad 980\cdot(-1) \quad = \quad -980$$

Schreiben Sie die Summe mit Hilfe des Summenzeichens

c) $$2-4+6-8+...+96-98+100 \quad = \quad \sum_{k=1}^{50} (-1)^{k+1}\cdot 2k$$

Aufgabe 6: **Fontänen** | 27 | |

Der Verlauf von Fontänen eines Springbrunnens können annähernd durch die Funktionenschar $f_k(x)$ veranschaulicht werden, wobei k vom Wasserdruck abhängt:

$$f_k(x) \quad = \quad -\frac{3}{4}kx^2 + 6x \quad mit\ k > 0$$

a) Oh je – auf der Achse fehlen die Einheiten. Ermitteln Sie aufgrund der gegebenen Graphen die Lage der Einheiten auf der x-Achse und tragen Sie diese ein.

$$Ermittlung\ anhand\ Extremum\ bei\ y = 12:$$

$$f_k'(x) \quad = \quad -\frac{3}{2}kx + 6 \quad = \quad 0 \quad \rightarrow \quad k = \frac{4}{x}$$

$$f_k(x) \quad = \quad -\frac{3}{4}kx^2 + 6x \quad = \quad 12 \quad \xrightarrow[einsetzen]{k=\frac{4}{x}} \quad -\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{x}\cdot x^2 + 6x \quad = \quad 12$$

$$\rightarrow \quad -3x+6x \quad = \quad 12 \quad \rightarrow \quad 3x \quad = \quad 12 \quad \rightarrow \quad x \quad = \quad 4$$

$$\rightarrow \quad k = \frac{4}{x} \quad \rightarrow \quad k = 1 \quad \rightarrow \quad 3x \quad = \quad 12 \quad \rightarrow \quad P(4 \mid 12)$$

b) Für welchen Wasserdruck (= k-Werte) sind die Fontänen dargestellt?

$$Es\ gilt: \quad \rightarrow \quad 3x \quad = \quad 12 \rightarrow \quad P(4 \mid 12) \quad \rightarrow \quad k = \frac{4}{x} \quad \rightarrow \quad k = 1$$

$$\rightarrow \quad 3x \quad = \quad 6 \rightarrow \quad P(2 \mid 6) \quad \rightarrow \quad k = \frac{4}{x} \quad \rightarrow \quad k = \frac{4}{2} = 2$$

$$\rightarrow \quad 3x \quad = \quad 4 \rightarrow \quad P\left(\frac{4}{3} \,\middle|\, 4\right) \quad \rightarrow \quad k = \frac{4}{x} \quad \rightarrow \quad k = \frac{4}{\frac{4}{3}} = 3$$

$$\rightarrow \quad 3x \quad = \quad 3 \rightarrow \quad P(1 \mid 3) \quad \rightarrow \quad k = \frac{4}{x} \quad \rightarrow \quad k = \frac{4}{1} = 4$$

c) In welchem Winkel wird das Wasser der Fontänen ausgestoßen?

$$f_k'(x) \quad = \quad -\frac{3}{2}kx + 6 \quad \rightarrow \quad f_k'(0) = 6 = m = \tan(\alpha) \quad \rightarrow \quad \alpha = 80{,}54$$

d) Entlang welcher Kurve bewegen sich die Scheitelpunkte der Fontäne, wenn der Druck allmählich erhöht wird?

$$f_k'(x) \quad = \quad -\frac{3}{2}kx + 6 \quad = \quad 0 \quad \rightarrow \quad k = \frac{4}{x}$$

$$y \quad = \quad -\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{x} \cdot x^2 + 6x \quad = \quad 3x$$

e) In welchem Intervall liegen die Werte des Parameters k, wenn sich die Höhen der Fontänen zwischen 2 m und 8 m befinden sollen?

Weg 1: Ermittlung anhand der Extrema bei y = 2 und y = 8

$$f_k'(x) \quad = \quad -\frac{3}{2}kx + 6 \quad = \quad 0 \quad \rightarrow \quad k = \frac{4}{x} \quad \rightarrow \quad x = \frac{4}{k}$$

$$f_{k_1}(x) = -\frac{3}{4}kx^2 + 6x = 2 \quad \rightarrow \quad f_{k_1}\left(\frac{4}{k}\right) = -\frac{3}{4}k \cdot \left(\frac{4}{k}\right)^2 + 6 \cdot \frac{4}{k} \quad = \quad 2 \quad \rightarrow \quad k = 6$$

$$f_{k_2}(x) = -\frac{3}{4}kx^2 + 6x = 8 \quad \rightarrow \quad f_{k_2}\left(\frac{4}{k}\right) = -\frac{3}{4}k \cdot \left(\frac{4}{k}\right)^2 + 6 \cdot \frac{4}{k} \quad = \quad 8 \quad \rightarrow \quad k = \frac{3}{2}$$

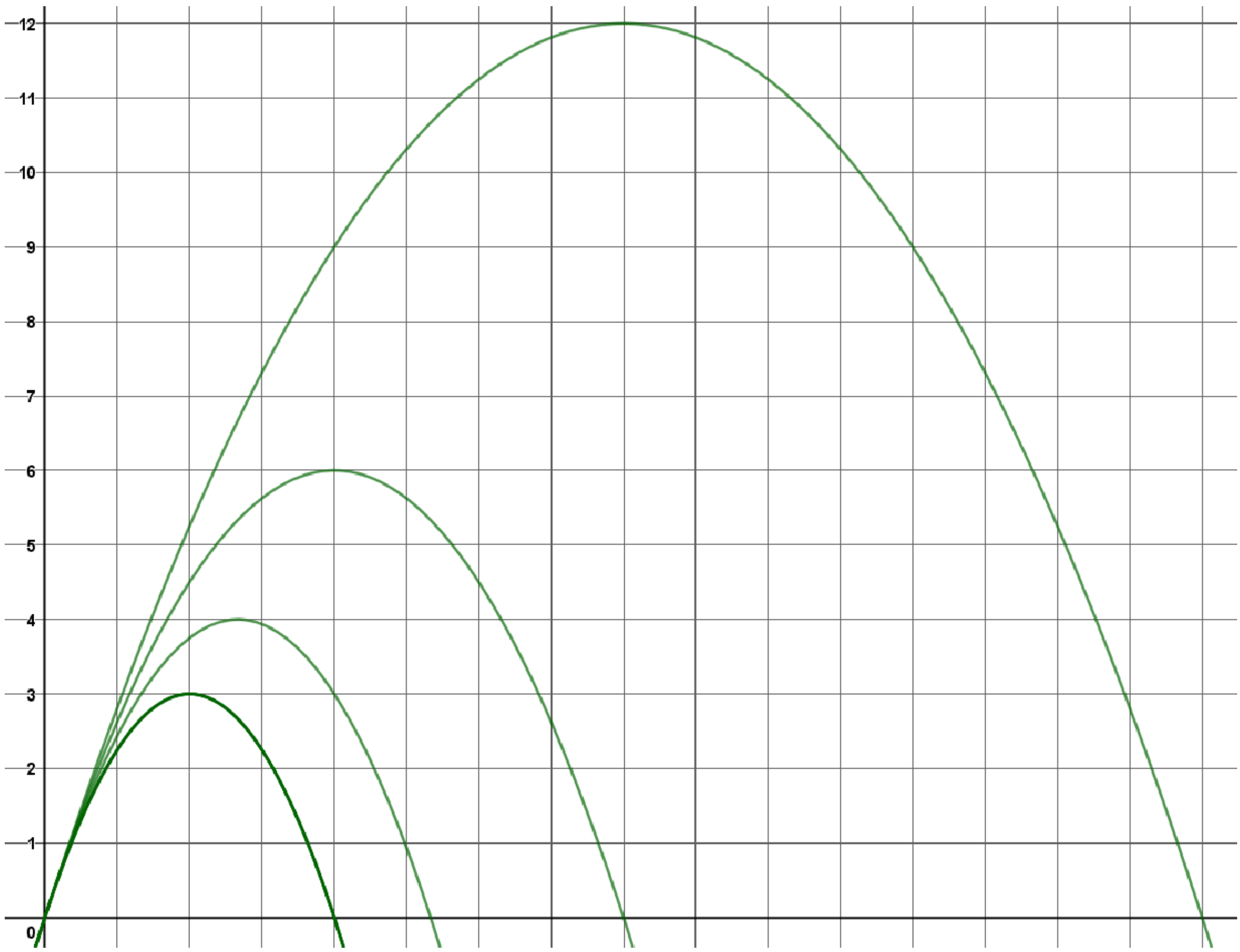
Weg 2: Ermittlung anhand der Ortskurve für y = 2 und y = 8

$$y = 3x \xrightarrow{y=2} 2 = 3x \rightarrow x = \frac{2}{3} \rightarrow k = \frac{4}{x} \rightarrow k = \frac{4}{\frac{2}{3}} = 6$$

$$y = 3x \xrightarrow{y=8} 8 = 3x \rightarrow x = \frac{8}{3} \rightarrow k = \frac{4}{x} \rightarrow k = \frac{4}{\frac{8}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$Ergebnis: \quad k \in \left[\frac{3}{2}; 6\right]$$

Anlage: **Graph zu Aufgabe 6**



Zusatzaufgabe:

Die Bearbeitung dieser Aufgabe ist freiwillig;
Punkte gehen dann zusätzlich als Bonuspunkte in die Bewertung ein.

6	

Gegeben sei die Funktion

$$h(x) = x^3 + bx^2 + cx + d \quad mit\ b,c,d \in \Re$$

Welche Beziehung muss zwischen b und c bestehen, damit die Funktion h(x) genau einen Sattelpunkt besitzt.

$$h(x) = x^3 + bx^2 + cx + d \quad mit\ b,c,d \in \Re$$

$$h'(x) = 3x^2 + 2bx + c = 0$$

$$h''(x) = 6x + 2b = 0 \quad \rightarrow \quad x = -\frac{1}{3}b$$

$$h'''(x) = 6 \neq 0$$

$$\xrightarrow[einsetzen]{x=-\frac{1}{3}b} \quad h'\left(-\frac{1}{3}b\right) = 3\cdot\left(-\frac{1}{3}b\right)^2 + 2b\cdot\left(-\frac{1}{3}b\right) + c = 0$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{3}b^2 - \frac{2}{3}b^2 + c = 0 \quad \rightarrow \quad c = \frac{1}{3}b^2$$

Anlage:

1.) Summe der ersten n Zahlen: $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

2.) Summe der ersten n Quadratzahlen: $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

3.) Summe der ersten n^3 Zahlen $$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$$