

Thema: Ableitungsregeln; Rekonstruktion;
Kurvenuntersuchung gebr.-rat. Fkt.

Name:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Punkte:

Note:

Anmerkung: Wählen Sie aus den Aufgaben 1 und 2 bitte nur eine zur Bearbeitung aus!

Aufgabe 1: Kurvendiskussion Scharcurve (ganzrational)

30

Gegeben sei folgende Kurvenschar: $f_k(x) = \frac{1}{k^2}x^3 - \frac{3}{k}x^2$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $k > 0$

- Untersuchen Sie $f_k(x)$ auf Symmetrie.
- Berechnen Sie die Nullstellen der Funktionenschar $f_k(x)$
- Zeigen Sie, dass die 2. Ableitung folgende Form haben kann: $f_k''(x) = \frac{6}{k^2}(x - k)$
- Bestimmen Sie Lage und Art der Extrempunkte der Funktionenschar.
- Ermitteln Sie die Ortskurve der Wendepunkte.
- Für welche Werte des Parameters k verläuft der Graph der Funktion durch den Punkt $P(5 | -10)$?

Aufgabe 2: Gebrochen-rationale Funktionen

30

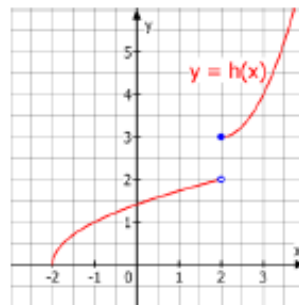
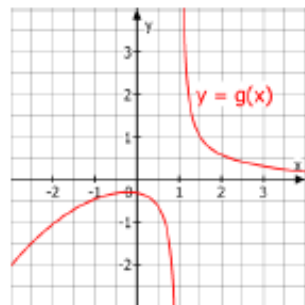
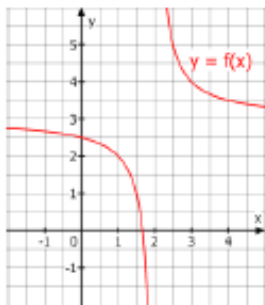
Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{x(x^2 - 9)}{(x+3)(x+2)}$

- Bestimmen Sie Nullstellen, Polstellen und Lücken.
- Wie lautet die vereinfachte Funktion $f^*(x)$?
- Wie lautet die Gleichung der Asymptote $a(x)$ der Funktion $f^*(x)$?
- Zeigen Sie, dass die ersten beiden Ableitungen der Funktion wie folgt lauten können:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 4x - 6}{(x+2)^2} \quad \text{und} \quad f''(x) = \frac{20}{(x+2)^3}$$
- Ermitteln Sie die Extrema der Funktion.
- Was können Sie aus den Ableitungen bezüglich der Wendepunkte folgern?
- Welches Verhalten besitzt die Funktion für $x \rightarrow \pm \infty$
- Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.

(i)

Ordnen Sie den Funktionen ihre Polstelle zu:



Polstelle von

	f	g	h
$x = 3$	☐	☐	☐
$y = 2$	☐	☐	☐
$x = 2$	☐	☐	☐
$x = 1$	☐	☐	☐
$y = 0$	☐	☐	☐
$x = -2$	☐	☐	☐
keine	☐	☐	☐

(ii)

f ist eine Funktion und für $x \rightarrow \infty$ gelte $f(x) \rightarrow 2$ aber $f(x) \neq 2$. Entscheiden Sie.

- a) Der Graph von f hat die waagrechte Asymptote mit der Gleichung $y = 2$.
 b) Der Graph von f hat die senkrechte Asymptote mit der Gleichung $y = 2$.
 c) Geht man auf der x -Achse immer weiter nach rechts, so nähern sich die Funktionswerte immer mehr der 2 an.
 d) Es gilt dann $f(100) = 2$.

Wahr Falsch

- a) ☐ ☐
 b) ☐ ☐
 c) ☐ ☐
 d) ☐ ☐

(iii)

Welche Aussagen zur Funktion f sind wahr, welche falsch?

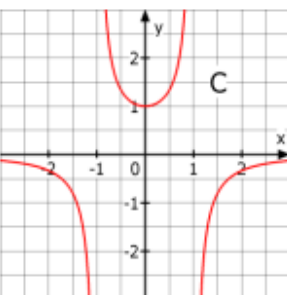
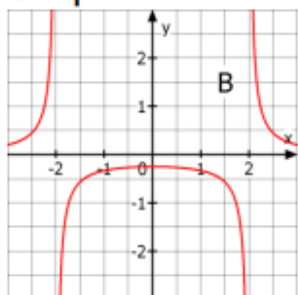
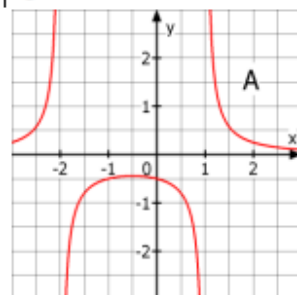
- a) Hat f eine Polstelle an der Stelle 3, so hat der Graph von f eine senkrechte Asymptote mit der Gleichung $x = 3$.
 b) Hat f eine Polstelle bei x_0 , so gilt $f(x_0) = \infty$.
 c) Hat f eine Polstelle bei x_0 , so ist f an der Stelle x_0 nicht definiert.
 d) Hat f die Definitionslücke x_0 , so hat f an dieser Stelle eine Polstelle.

Wahr Falsch

- a) ☐ ☐
 b) ☐ ☐
 c) ☐ ☐
 d) ☐ ☐

(iv)

Ordnen Sie den Graphen die Funktionsterme zu:



- $\frac{1}{1-x^2}$
 — $\frac{1}{(x-1)(x+2)}$
 — $\frac{1}{x^2-1}$
 — $\frac{1}{x^2-4}$

Aufgabe 4: Rekonstruktion ganzrationaler Funktionen

30	
----	--

Anmerkung: Wählen Sie bitte nur drei der vier Aufgaben zur Bearbeitung aus!

(i)

Eine Parabel 3. Ordnung hat den Wendepunkt $W(-1 \mid 0)$ und im Punkt $P\left(0 \mid -\frac{8}{3}\right)$ eine

Normale mit der Steigung 0,5.

Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel.

Aus: Abitur Baden-Württemberg 1994

(ii)

Der Graph des Polynoms 5. Grades ist symmetrisch zum Koordinatenursprung, er geht durch die Punkte A (2; 36) und B (-3; -384) und hat an der Stelle $x = 3$ die Steigung 704.

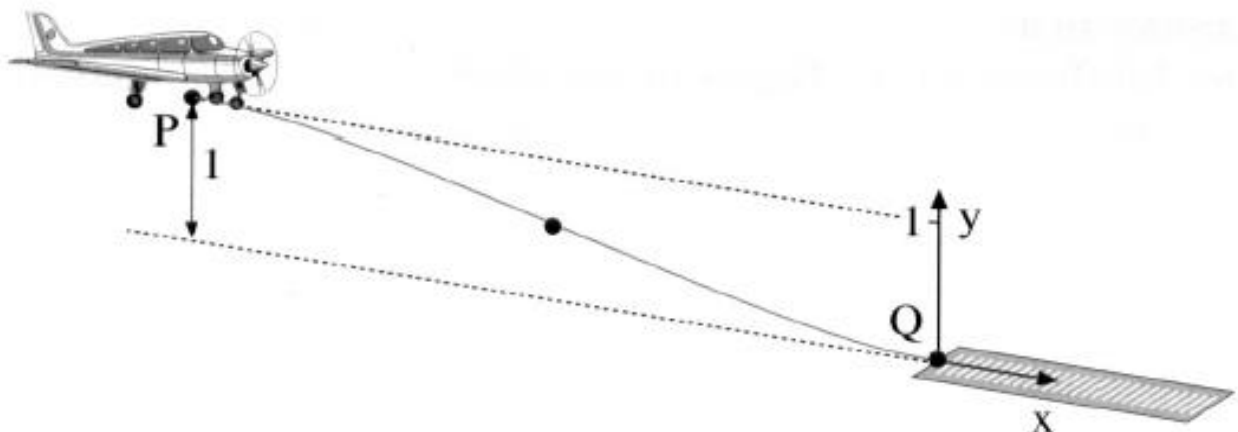
Wie lautet die Gleichung dieser Funktion?

(iii)

Ein Flugzeug nähert sich im horizontalen Gleitflug dem Punkt $P(-4 \mid 1)$.

Dort beginnt der Pilot mit dem Sinkflug, der im Punkt $Q(0 \mid 0)$ endet.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung (3. Grades) der Flugbahn.



(iv)

Die Molkerei Meier hat die Rezeptur eines Joghurts mit der neuen Geschmacksrichtung „Apfelbeere“ entwickelt. Für die Produktion dieses Joghurts geht die Molkerei von einem s-förmigen Kurvenverlauf der Kostenfunktion aus, die der Produktionsmenge x die Gesamtkosten y zuordnet.

Die Fixkosten betragen 400 Geldeinheiten (GE). Außerdem ist bekannt, dass der Graph der Kostenfunktion einen Wendepunkt in $(10 \mid 700)$ aufweist und die Wendetangente die Gleichung $t_w(x) = 20x + 500$ hat. Die Kapazitätsgrenze für dieses Produkt liegt bei 50 Mengeneinheiten (ME).

Eine Marktanalyse hat ergeben, dass das Produkt in dieser Menge vollständig verkauft werden kann.

Bestimmen Sie die Gleichung einer ganzrationalen Funktion möglichst niedrigen Grades, die die Entwicklung der Kosten K nach den oben gemachten Angaben beschreibt. Geben Sie den ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich an.

Aufgabe 5: Aussagenprüfung zur Rekonstruktion ganzrat. Funktionen

8	
---	--

Beurteilen Sie die Bedingungsaussagen und kreuzen Sie richtig oder falsch an:

Eine ganzrationale Funktion dritten Grades

hat im Punkt $P(2/1)$ eine Tangente, die parallel zur Winkelhalbierende des I. Quadranten verläuft,

und schneidet diese Winkelhalbierende an der Stelle $x = -4$ orthogonal.

richtig falsch

☐ ☐ $f'(-4) = 1$

☐ ☐ $f'(2) = 1$

☐ ☐ $f(-4) = -4$

☐ ☐ $f(-4) = 0$

richtig falsch

☐ ☐ $f(2) = 1$

☐ ☐ $f(2) = -4$

☐ ☐ $f'(2) = 2$

☐ ☐ $f'(-4) = -1$

Aufgabe 6: Grenzwertverhalten und weiteres

12	
----	--

Gegeben sei die Grenzwertbetrachtung von $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x \cdot (x + 2)}$ mit $g(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x \cdot (x + 2)}$

- Bestimmen Sie das links- und rechtsseitige Grenzwertverhalten.
- Wie lautet die Asymptote?
- Ab welchem Wert für $x > 0$ ist der Abstand **der Funktion $g^*(x)$** zu ihrer waagrechten Asymptote kleiner als $\varepsilon = 0,001$?

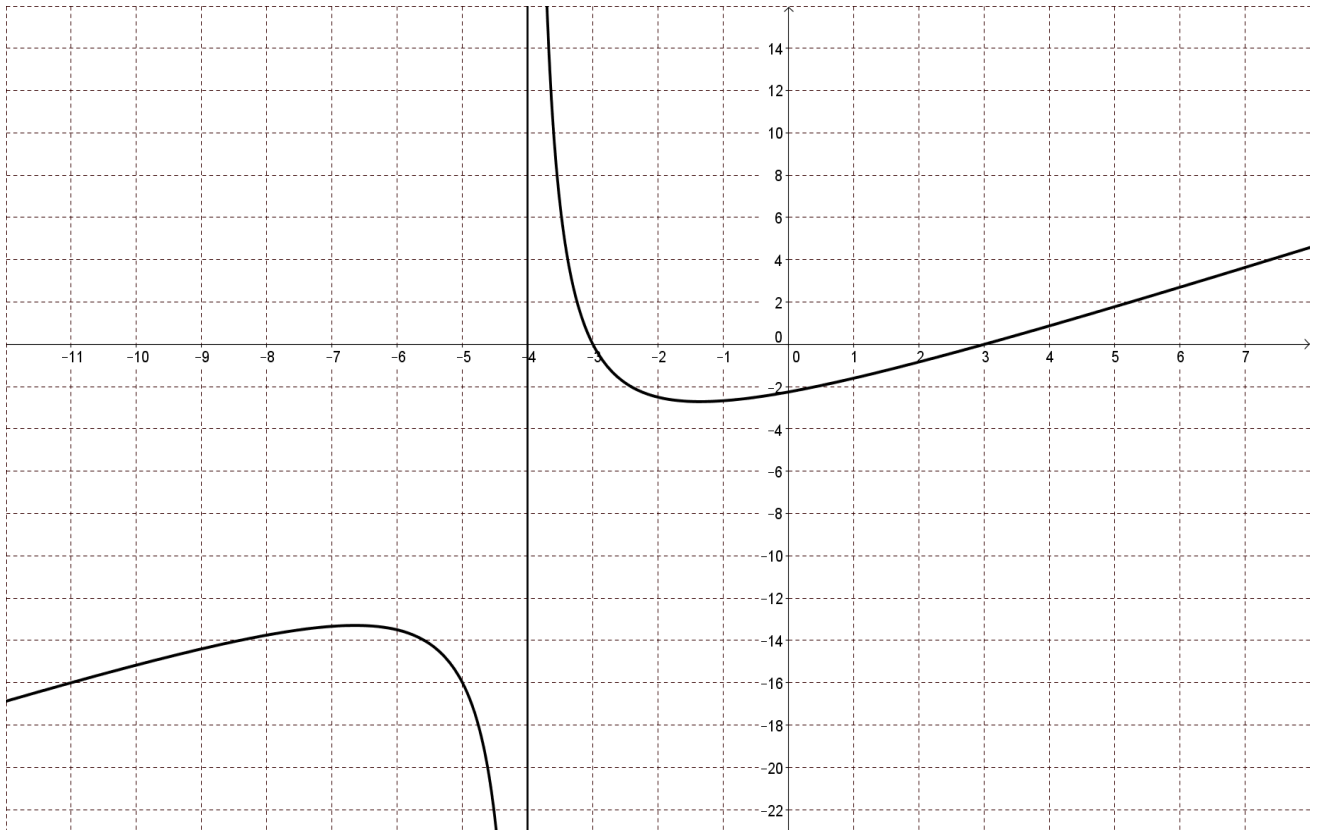
Aufgabe 7: Rekonstruktion gebr.-rat. Funktionen II

20	
----	--

Bilden Sie eine gebr.-rat. Funktion mit folgenden Eigenschaften:

- Pol mVZW bei $x = 3$; doppelte Nullstelle bei $x = 2$; Lücke bei $x = 5$
- Pol oVZW bei $x = -4$; einfache Nullstelle bei $x = -1$; Lücke bei $x = 8$
Der links- und rechtsseitige Grenzwert der Lücke soll auf der x-Achse liegen.

c)



d)

