12. Jgst.	2. Kursarbeit	Datum: 15.12.2023
Kurs 12/1	Fach: Mathematik (Leistungsfach)	

Thema: **Ableitungsregeln; Rekonstruktion; Kurvenuntersuchung gebr.-rat. Fkt.**

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Anmerkung: ***Wählen Sie aus den Aufgaben 1 und 2 bitte nur eine zur Bearbeitung aus!***

Aufgabe 1: **Kurvendiskussion Scharkurve (ganzrational)** **30**

Gegeben sei folgende Kurvenschar: $f_k(x) = \frac{1}{k^2}x^3 - \frac{3}{k}x^2 \quad mit\ x \in \Re \quad und\ k > 0$

a) Untersuchen Sie $f_k(x)$ auf Symmetrie.

$$f_k(-x) = \frac{1}{k^2}(-x)^3 - \frac{3}{k}(-x)^2 = -\frac{1}{k^2}x^3 - \frac{3}{k}x^2 \neq f_k(x) \quad und \quad \neq -f_k(x)$$

$\rightarrow$ *keine Symmetrie*

b) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktionenschar $f_k(x)$

$$f_k(x) = \frac{1}{k^2}x^3 - \frac{3}{k}x^2 = 0 \rightarrow \left(\frac{1}{k^2}x - \frac{3}{k}\right)x^2 = 0$$

$$\rightarrow \quad x = 0\,[doppelt] \quad und \quad \frac{1}{k^2}x - \frac{3}{k} = 0 \rightarrow x = 3k$$

c) Zeigen Sie, dass die 2. Ableitung folgende Form haben kann: $f_k''(x) = \frac{6}{k^2}(x-k)$

$$f_k'(x) = \frac{3}{k^2}x^2 - \frac{6}{k}x \rightarrow f_k''(x) = \frac{6}{k^2}x - \frac{6}{k} = \frac{6}{k^2}(x-k)$$

d) Bestimmen Sie Lage und Art der Extrempunkte der Funktionenschar.

$$f_k'(x) = \frac{3}{k^2}x^2 - \frac{6}{k}x = 0 \rightarrow \left(\frac{3}{k^2}x - \frac{6}{k}\right)x = 0$$

$$\rightarrow \quad x = 0 \quad und \quad \frac{3}{k^2}x - \frac{6}{k} = 0 \rightarrow x = 2k$$

$$\xrightarrow[eingesetzt]{x=0} f_k''(0) = \frac{6}{k^2}(0-k) = -\frac{6}{k} < 0 \rightarrow HP(0 \mid 0)$$

$$\xrightarrow[eingesetzt]{x=2k} f_k''(2k) = \frac{6}{k^2}(2k-k) = \frac{6}{k} > 0 \rightarrow TP(2k \mid f_k(2k)) = TP(2k \mid -4k)$$

$NR:$

$$f_k(2k) = \left(\frac{1}{k^2}\cdot 2k - \frac{3}{k}\right)(2k)^2 = \left(\frac{2}{k} - \frac{3}{k}\right)\cdot 4k^2 = -\frac{1}{k}\cdot 4k^2 = -4k$$

e) Ermitteln Sie die Ortskurve der Wendepunkte.

$$f_k''(x) \quad = \quad \frac{6}{k^2}(x-k) \quad = \quad 0 \quad \rightarrow \quad x = k$$

$$\xrightarrow[in\ f_k(x)]{k=x} \quad y \quad = \quad \frac{1}{x^2}x^3 - \frac{3}{x}x^2 \quad = \quad x - 3x \quad = \quad -2x$$

f) Für welche Werte des Parameters k verläuft der Graph der Funktion durch den Punkt $P(5 \mid -10)$?

$$f_k(x) = \frac{1}{k^2}x^3 - \frac{3}{k}x^2 \qquad und \qquad P(5 \mid -10)$$

$$f_k(5) \quad = \quad \frac{1}{k^2}\cdot 5^3 - \frac{3}{k}\cdot 5^2 \quad = \quad -10$$

$$\rightarrow \quad \frac{125}{k^2} - \frac{75}{k} \quad = \quad -10 \quad \xrightarrow{\cdot k^2} \quad 125 - 75k \quad = \quad -10k^2 \quad \rightarrow \quad 10k^2 - 75k + 125 \quad = \quad 0$$

$$\rightarrow \quad k_{1/2} \quad = \quad \frac{75 \pm \sqrt{5.625 - 5.000}}{20} \quad = \quad \frac{75 \pm \sqrt{625}}{20} \quad = \quad \frac{75 \pm 25}{20}$$

$$\rightarrow \quad k_1 \quad = \quad \frac{75+25}{20} \quad = \quad \frac{100}{20} \quad = \quad 5 \quad und \quad k_2 \quad = \quad \frac{75-25}{20} \quad = \quad \frac{50}{20} \quad = \quad 2{,}5$$

Aufgabe 2: **Gebrochen-rationale Funktionen**

30	

Gegeben sei die Funktion $f(x) \quad = \quad \frac{x(x^2-9)}{(x+3)(x+2)}$

a) Bestimmen Sie Nullstellen, Polstellen und Lücken.

b) Wie lautet die vereinfachte Funktion $f^*(x)$?

$$f(x) \quad = \quad \frac{x(x^2-9)}{(x+3)(x+2)} \quad \rightarrow \quad f^*(x) \quad = \quad \frac{x(x-3)}{x+2} \quad = \quad \frac{x^2-3x}{x+2}$$

Zähler	*Nenner*
$x = 0$	
$x = 3$	$x = -3$
$x = -3$	$x = -2$

Nullstellen: $x = 0$ *und* $x = 3$

Polstelle m VZW: $x = -2$

Lücke: $x = -3 \quad \rightarrow \quad L(-3 \mid -18) \quad \leftrightarrow \quad f^*(-3) = \frac{18}{-1} = -18$

c) Wie lautet die Gleichung der Asymptote a(x) der Funktion $f^*(x)$?

$$f^*(x) = \frac{x(x-3)}{x+2} = \frac{x^2-3x}{x+2}$$

Polynomdivision:

$$\left(x^2-3x\right):(x+2) = x-5+\frac{10}{x+2} \qquad Asymptote: \quad a(x)=x-5$$

$$\begin{array}{l} -\left(x^2+2x\right) \\ \hline \quad -5x \\ \quad -(-5x-10) \\ \hline \quad \mathrm{Rest}:10 \end{array}$$

d) Zeigen Sie, dass die ersten beiden Ableitungen der Funktion wie folgt lauten können:

$$f'(x) = \frac{x^2+4x-6}{(x+2)^2} \qquad und \qquad f''(x) = \frac{20}{(x+2)^3}$$

$$Ausgangsfunktion: \quad f^*(x) = \frac{x^2-3x}{x+2}$$

$$\frac{df^*(x)}{dx} = \frac{(2x-3)(x+2)-\left(x^2-3x\right)\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+4x-3x-6-x^2+3x}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x-6}{(x+2)^2}$$

$$\frac{d^2f^*(x)}{dxdx} = \frac{(2x+4)(x+2)^2-\left(x^2+4x-6\right)\cdot 2\cdot(x+2)\cdot 1}{(x+2)^4} = \frac{(x+2)\left[(2x+4)(x+2)-\left(2x^2+8x-12\right)\right]}{(x+2)^4}$$

$$\frac{d^2f^*(x)}{dxdx} = \frac{2x^2+4x+4x+8-2x^2-8x+12}{(x+2)^3} = \frac{20}{(x+2)^3}$$

e) Ermitteln Sie die Extrema der Funktion.

$$Ausgangsfunktion: \quad f^*(x) = \frac{x^2-3x}{x+2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+4x-6}{(x+2)^2} = 0 \xrightarrow{\cdot(x+2)^2} x^2+4x-6 = 0 \rightarrow x_{1/2} = \frac{-4\pm\sqrt{16+24}}{2} = -2\pm\sqrt{10}$$

$$\rightarrow \quad x_1 = -2+\sqrt{10} \approx 1{,}16 \qquad \rightarrow \quad x_2 = -2-\sqrt{10} \approx -5{,}16$$

$$f''(1{,}16) = \frac{20}{(1{,}16+2)^3} > 0 \rightarrow TP(1{,}16 \mid -0{,}675)$$

$$f''(-5{,}16) = \frac{20}{(-5{,}16+2)^3} < 0 \rightarrow HP(-5{,}16 \mid -13{,}32)$$

f) Was können Sie aus den Ableitungen bezüglich der Wendepunkte folgern?

$$f''(x) = \frac{20}{(x+2)^3} = 0 \xrightarrow{\cdot(x+2)^3} 20 = 0$$

Die notwendige Bedingung ist nicht erfüllt; daher gibt es keinen Wendepunkt.
Dies konnte man schon anhand des konstanten Zählers der 2. Ableitung erkennen.

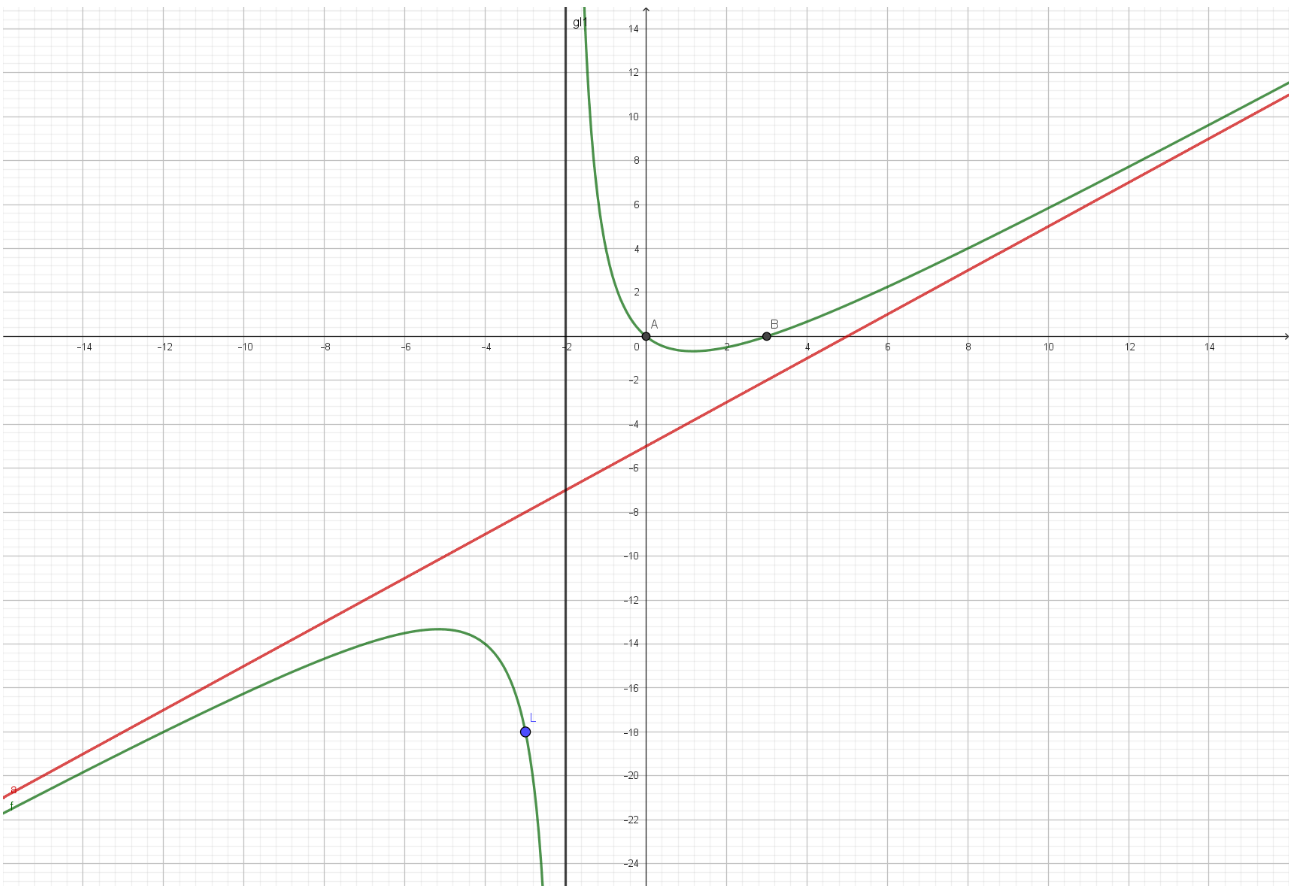
g) Welches Verhalten besitzt die Funktion für $x \to \pm\infty$

$$a(x) = x - 5$$

Ausgehend von der Asymptote verhält sich die Funktion
für x $\to \pm\infty$ analog demVerhalten der Asymptote:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a(x) \to \pm\infty$$

h) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.

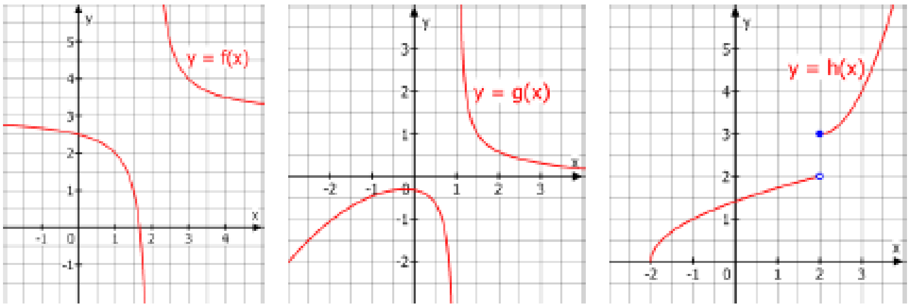


Aufgabe 3: **Gebrochen-rationale Funktionen in der Auswahl**

20	

(i)

Ordnen Sie den Funktionen ihre Polstelle zu:



Polstelle von

	f	g	h
x = 3	☐	☐	☐
y = 2	☐	☐	☐
x = 2	☒	☐	☐
x = 1	☐	☒	☐
y = 0	☐	☐	☐
x = -2	☐	☐	☐
keine	☐	☐	☒

(ii)

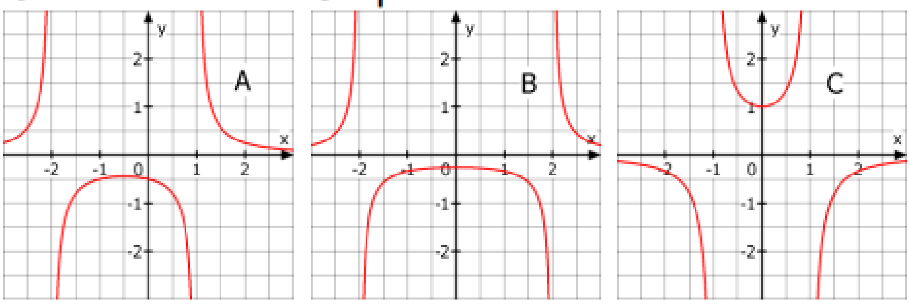
f ist eine Funktion und für $x \to \infty$ gelte $f(x) \to 2$ aber $f(x) \neq 2$. Entscheiden Sie.		Wahr	Falsch
a) Der Graph von f hat die waagrechte Asymptote mit der Gleichung y = 2.	a)	☒	☐
b) Der Graph von f hat die senkrechte Asymptote mit der Gleichung y = 2.	b)	☐	☒
c) Geht man auf der x-Achse immer weiter nach rechts, so nähern sich die Funktionswerte immer mehr der 2 an.	c)	☒	☐
d) Es gilt dann $f(100) = 2$.	d)	☐	☒

(iii)

Welche Aussagen zur Funktion f sind wahr, welche falsch?		Wahr	Falsch
a) Hat f eine Polstelle an der Stelle 3, so hat der Graph von f eine senkrechte Asymptote mit der Gleichung $x = 3$.	a)	☒	☐
b) Hat f eine Polstelle bei x_0, so gilt $f(x_0) = \infty$.	b)	☐	☒
c) Hat f eine Polstelle bei x_0, so ist f an der Stelle x_0 nicht definiert.	c)	☒	☐
d) Hat f die Definitionslücke x_0, so hat f an dieser Stelle eine Polstelle.	d)	☐	☒

(iv)

Ordnen Sie den Graphen die Funktionsterme zu:



C	$\frac{1}{1-x^2}$
A	$\frac{1}{(x-1)(x+2)}$
—	$\frac{1}{x^2-1}$
B	$\frac{1}{x^2-4}$

Aufgabe 4: **Rekonstruktion ganzrationaler Funktionen** **30** | |

Anmerkung: Wählen Sie bitte nur ***drei der vier*** *Aufgaben zur Bearbeitung aus!*

(i)

Eine Parabel 3. Ordnung hat den Wendepunkt $W(-1 \mid 0)$ **und im Punkt** $P\left(0 \middle| -\frac{8}{3}\right)$ **eine Normale mit der Steigung 0,5. Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel.**

Aus: Abitur Baden-Württemberg 1994

$$\begin{aligned} Punkt: \quad f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d = y \\ Steigung: \quad f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c = m \\ Wendestelle: \quad f''(x) &= 6ax + 2b = 0 \end{aligned}$$

$(i) \quad P\left(0 \middle| -\frac{8}{3}\right):$	$f(0) = d = -\frac{8}{3}$
$(ii) \quad W(-1 \mid 0):$	$f(-1) = -a+b-c+d = 0 \xrightarrow[c=-2]{d=-\frac{8}{3}} -a+b+2-\frac{8}{3} = 0$
$(iii) \quad Wendestelle\ in\ x=-1:$	$f''(-1) = -6a+2b = 0$
$(iv) \quad m=-2\ in\ P\ mit\ x=0:$	$f'(0) = c = -2$

$$\xrightarrow{(iii)\, b=3a} -a+3a = \frac{2}{3} \rightarrow 2a = \frac{2}{3} \rightarrow a = \frac{1}{3} \xrightarrow{b=3a} b = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$$

$$Gesuchte\ Funktionsvorschrift: \quad f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x - \frac{8}{3}$$

(ii)

Der Graph des Polynoms 5.Grades ist symmetrisch zum Koordinatenursprung, er geht durch die Punkte A (2 / 36) und B (-3 / -384) und hat an der Stelle x = 3 die Steigung m = 704.
Wie lautet die Gleichung dieser Funktion?

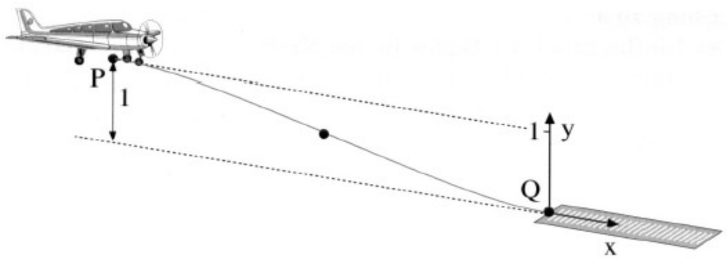
$$\begin{aligned} Punkt: \quad f(x) &= ax^5 + bx^3 + cx = y \\ Steigung: \quad f'(x) &= 5ax^4 + 3bx^2 + c = m \\ Wendestelle: \quad f''(x) &= 20ax^3 + 6bx = 0 \end{aligned}$$

$(i) \quad A(2 \mid 36):$	$f(x) = 32a + 8b + 2c = 36$
$(ii) \quad B(-3 \mid -384):$	$f(x) = -243a - 27b - 3c = -384$
$(iii) \quad m = 704\ in\ x=3:$	$f'(x) = 405a + 27b + c = 704$

$$a = 2 \rightarrow b = -4 \rightarrow c = 2$$

$$Gesuchte\ Funktionsvorschrift: \quad f(x) = 2x^5 - 4x^3 + 2x$$

(iii)
Ein Flugzeug nähert sich im horizontalen Gleitflug dem Punkt P(-4 / 1).
Dort beginnt der Pilot mit dem Sinkflug, der im Punkt Q(0 / 0) endet.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung (3. Grades) der Flugbahn.



$$\begin{aligned} &Punkt: & f(x) &= ax^3+bx^2+cx+d=y \\ &Steigung: & f'(x) &= 3ax^2+2bx+c=m \\ &Wendestelle: & f''(x) &= 6ax+2b=0 \end{aligned}$$

$(i)\quad P(-4 \mid 1):$	$f(-4) = -64a+16b-4c+d=1 \xrightarrow[c=0]{d=0} -64a+16b=1$
$(ii)\quad Q(0 \mid 0):$	$f(0) = d=0$
$(iii)\quad m=0 \; in \; Q \; mit \; x=0:$	$f'(0) = c=0$
$(iv)\quad m=0 \; in \; P \; mit \; x=-4:$	$f'(-4) = 48a-8b+c=0 \xrightarrow{c=0} 48a-8b=0$

$$\xrightarrow{(i)+2\cdot(iv)} 32a=1 \;\rightarrow\; a=\frac{1}{32} \xrightarrow{b=6a} b=6\cdot\frac{1}{32}=\frac{3}{16}$$

$$Gesuchte\ Funktionsvorschrift: \quad f(x) = \frac{1}{32}x^3+\frac{3}{16}x^2$$

(iv)

Die Molkerei Meier hat die Rezeptur eines Joghurts mit der neuen Geschmacksrichtung „Apfelbeere" entwickelt. Für die Produktion dieses Joghurts geht die Molkerei von einem s-förmigen Kurvenverlauf der Kostenfunktion aus, die der Produktionsmenge x die Gesamtkosten y zuordnet.

Die Fixkosten betragen 400 Geldeinheiten (GE). Außerdem ist bekannt, dass der Graph der Kostenfunktion einen Wendepunkt in (10 | 700) aufweist und die Wendetangente die Gleichung $t_w(x)=20x+500$ hat. Die Kapazitätsgrenze für dieses Produkt liegt bei 50 Mengeneinheiten (ME).

Eine Marktanalyse hat ergeben, dass das Produkt in dieser Menge vollständig verkauft werden kann.

Bestimmen Sie die Gleichung einer ganzrationalen Funktion möglichst niedrigen Grades, die die Entwicklung der Kosten K nach den oben gemachten Angaben beschreibt. Geben Sie den ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich an.

$(i)\quad Q(0 \mid 400):$	$f(0) = d=400$
$(ii)\quad W(10 \mid 700):$	$f(10) = 1.000a+100b+10c+d=700 \xrightarrow[(ii):10]{d=400} 100a+10b+c=30$
$(iii)\quad m=20 \; in \; W \; mit \; x=10:$	$f'(10) = 300a+20b+c=20$
$(iv)\quad Wendestelle \; x=10:$	$f''(10) = 60a+2b=0 \;\rightarrow\; b=-30a$

$$\xrightarrow{(iii)-(ii)} 200a+10b=-10 \xrightarrow{b=-30a} 200a-300a=-10 \;\rightarrow\; a=\frac{1}{10} \xrightarrow{b=-30a} b=-3$$

$$\xrightarrow{100a+10b+c=30} 10-30+c=30 \;\rightarrow\; c=50$$

$$Gesuchte\ Funktionsvorschrift: \quad f(x) = \frac{1}{10}x^3-3x^2+50x+400$$

Aufgabe 6: **Grenzwertverhalten und weiteres**

12	

Gegeben sei die Grenzwertbetrachtung von $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2 - x - 6}{x \cdot (x+2)}$

mit $g(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x \cdot (x+2)}$

a) Bestimmen Sie das links- und rechtsseitige Grenzwertverhalten.

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - x - 6}{x \cdot (x+2)} = \lim_{x \to -2} \frac{(x-3) \cdot (x+2)}{x \cdot (x+2)} = \lim_{x \to -2} \frac{x-3}{x} \overset{\text{Grenzwertübergang}}{=} \frac{-2-3}{-2} \to 2{,}5$$

⇨ **x = -2 ist eine Lücke.**

b) Wie lautet die Asymptote?

⇨ **a(x) = 1**

c) Ab welchem Wert für x > 0 ist der Abstand **der Funktion g*(x)** zu ihrer waagrechten Asymptote kleiner als $\varepsilon = 0{,}001$?

$$g^*(x) = \frac{x-3}{x}$$

$$Ansatz: \quad \varepsilon = |g^*(x) - a(x)| \to 0{,}001 = \left| \frac{x-3}{x} - 1 \right|$$

$$\xrightarrow{Fall\,1} 0{,}001 \le \frac{x-3}{x} - 1 \xrightarrow{+1} 1{,}001 \le \frac{x-3}{x}$$

$$\xrightarrow[-x]{\cdot x} 0{,}001x \le -3 \xrightarrow{\cdot 1.000} x \le -3.000$$

$$\xrightarrow{Fall\,2} -0{,}001 \le \frac{x-3}{x} - 1 \xrightarrow{+1} 0{,}999 \le \frac{x-3}{x}$$

$$\xrightarrow[-x]{\cdot x} -0{,}001x \le -3 \xrightarrow{\cdot(-1.000)} x \ge 3.000$$

$$Ergebnis: \quad x \ge 3.000$$

Aufgabe 5: Aussagenprüfung zur Rekonstruktion ganzrat. Funktionen | 8 | |

Beurteilen Sie die Bedingungsaussagen und kreuzen Sie richtig oder falsch an:

Eine ganzrationale Funktion dritten Grades
hat im Punkt P(2/1) eine Tangente, die parallel zur Winkelhalbierende des I. Quadranten verläuft,
und schneidet diese Winkelhalbierende an der Stelle x = -4 orthogonal.

richtig	falsch	
	X	$f'(-4) = 1$
X		$f'(2) = 1$
X		$f(-4) = -4$
	X	$f(-4) = 0$

richtig	falsch	
X		$f(2) = 1$
	X	$f(2) = -4$
	X	$f'(2) = 2$
X		$f'(-4) = -1$

Aufgabe 7: Rekonstruktion gebr.-rat. Funktionen II | 20 | |

Bilden Sie eine gebr.-rat. Funktion mit folgenden Eigenschaften:

a) Pol mVZW bei x = 3; doppelte Nullstelle bei x = 2; Lücke bei x = 5

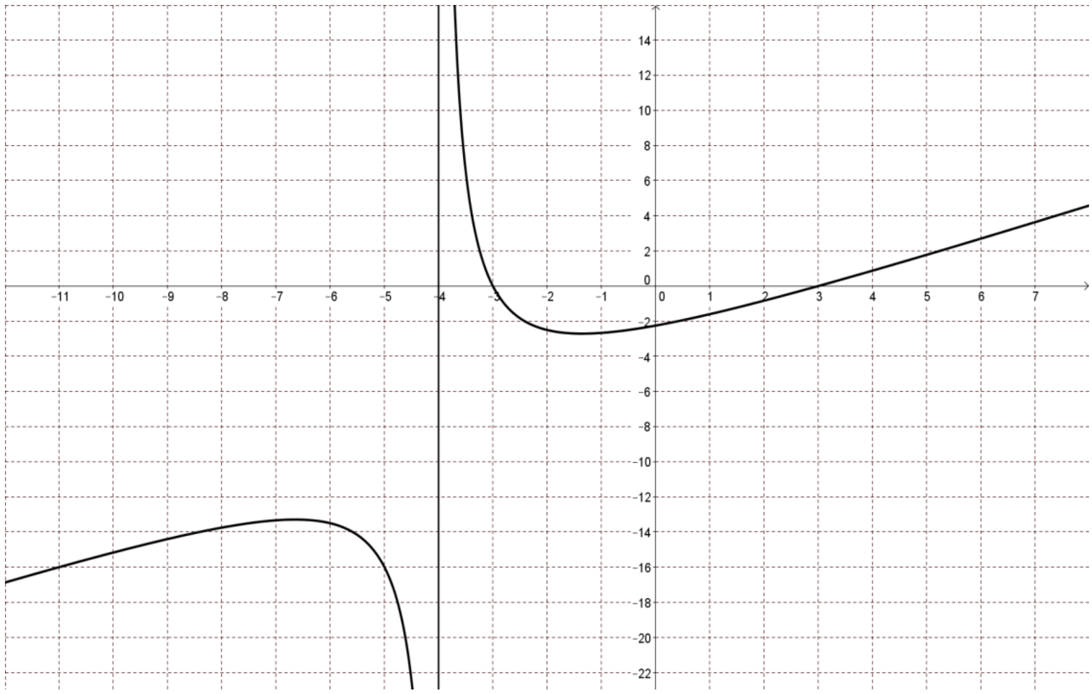
$$f(x) = \frac{(x-2)^2(x-5)^k}{(x-3)(x-5)^d} \quad mit \quad k \geq d$$

b) Pol oVZW bei x = - 4; einfache Nullstelle bei x = - 1; Lücke bei x = 8

Der links- und rechtseitige Grenzwert der Lücke soll auf der x-Achse liegen.

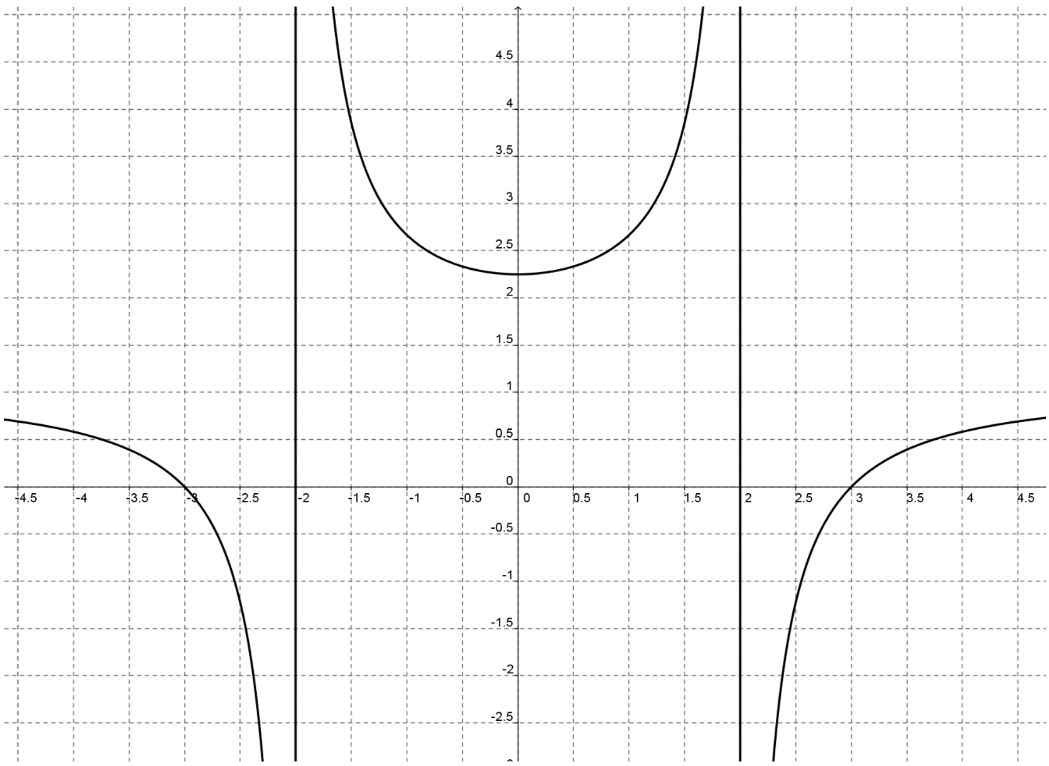
$$f(x) = \frac{(x+1)(x-8)^k}{(x+4)^2(x-8)^d} \quad mit \quad k-1 \geq d$$

c)



$$f(x) = \frac{(x+3)(x-3)}{(x+4)}$$

d)



$$f(x) = \frac{(x+3)(x-3)}{(x+2)(x-2)}$$