12. Jgst.	3. Test	Datum: 08.12.2023
Kurs M LK 1	Fach: Mathematik (Leistungsfach)	

Thema: Rekonstruktion gebr.-rat./ganzrat. Fkt.; Ableitungen (Produkt-, Quotienten- & Kettenregel)

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Name:	
Punkte:	Note:

Aufgabe 1: Ableitungen **16**

Bilden Sie die 1. Ableitung zu folgenden Funktionen.

a) $$f(x) = \left(4x^2-6x+1\right)^5$$

1. Ableitung:

$$f'(x) = 5\cdot\left(4x^2-6x+1\right)^4\cdot(8x-6) = \left(4x^2-6x+1\right)^4\cdot(40x-30)$$

b) $$f(x) = \frac{x^n-4x^{n-2}}{x^2-3}$$

1. Ableitung:

$$f'(x) = \frac{\left[n\cdot x^{n-1}-4\cdot(n-2)\cdot x^{n-3}\right]\cdot\left(x^2-3\right)-\left(x^n-4x^{n-2}\right)\cdot 2x}{\left(x^2-3\right)^2}$$

c) $$f(x) = \left(x^3-4\right)^n\cdot\left(x^{2n}-2x\right)$$

1. Ableitung:

$$f'(x) = 3x^2\cdot n\cdot\left(x^3-4\right)^{n-1}\cdot\left(x^{2n}-2x\right)+\left(x^3-4\right)^n\cdot\left(2n\cdot x^{2n-1}-2\right)$$

d) $$f(x) = \sqrt[3]{x^4-3x}$$

Umschreiben: $$f(x) = \sqrt[3]{x^4-3x} = \left(x^4-3x\right)^{\frac{1}{3}}$$

1. Ableitung: $$f'(x) = \frac{1}{3}\cdot\left(x^4-3x\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(4x^3-3\right) = \frac{4x^3-3}{3\cdot\sqrt[3]{\left(x^4-3x\right)^2}}$$

Aufgabe 2: **Bedingungen zur Rekonstruktion ganzrat. Funktionen**

14	

Gesucht sind die Bedingungen bezüglich der Funktion f für:

a) W(2; 4) ist Wendepunkt.
b) x = 4 ist Extremstelle.
c) x = 3 ist Wendestelle und die Steigung der Wendetangente ist –2.
d) Der Graf berührt bei x = 5 die x-Achse.

Erstellen Sie die Bedingungen und begründen Sie kurz Ihren Ansatz.

Bedingungen:

a) Punkt: f(2) = 4 und Wendestelle: f''(2) = 0

b) Extremwertstelle mit Steigung m = 0: f'(4) = 0

c) Wendestelle: f''(3) = 0 und
Steigung an der Wendestelle x = 3 ist m = -2: f'(3) = (-2)

d) Nullstelle x = 5/Punkt N(5/0): f(5) = 0
Berühren der x-Achse => doppelte Nullstelle => Hoch-/Tiefpunkt
=> Steigung m = 0 in x = 5: f'(5) = 0

Aufgabe 3: **Rekonstruktion ganzrat. Funktionen**

22	

Bitte bearbeiten Sie 2 von 3 Aufgaben.

Teil 1:
Der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades verläuft durch den Koordinatenursprung. Er hat bei x = 2 eine waagrechte Tangente und bei x = 4 eine Wendestelle.
Die Wendetangente in x = 4 hat die Steigung m = - 4.
Bestimmen Sie den Funktionsterm.

Lösung:

$$\begin{aligned} Punkt: \quad f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d = y \\ Steigung: \quad f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c = m \\ Wendestelle: \quad f''(x) &= 6ax + 2b = 0 \end{aligned}$$

$(i)\quad P(0 \mid 0):$	$f(0) \;=\; d=0$
$(ii)\quad m=0 \; in \; x=2:$	$f'(2) \;=\; 12a+4b+c=0$
$(iii)\quad Wendestelle \; in \; x=4:$	$f''(4) \;=\; 24a+2b=0$
$(iv)\quad m=-4 \; in \; Wendestelle \; x=4:$	$f'(4) \;=\; 48a+8b+c=-4$

$$\xrightarrow[(iii)\quad b=-12a]{(iv)-(ii)\quad 36a+4b=-4} 36a+4(-12a)=-4 \;\rightarrow\; -12a=-4 \;\rightarrow\; a=\frac{1}{3}$$

$$\xrightarrow{b=-12a} b=-12\cdot\frac{1}{3}=-4 \;\xrightarrow{(ii)}\; 12\cdot\frac{1}{3}+4\cdot(-4)+c=0 \;\xrightarrow{(ii)}\; c=12$$

$$Gesuchte\ Funktionsvorschrift: \quad f(x) \;=\; \frac{1}{3}x^3-4x^2+12x$$

Teil 2:
Der Graph einer ganzrationalen Funktion vierten Grades hat im Koordinatenursprung einen Sattelpunkt und in W(1 / 1) einen Wendepunkt. Bestimmen Sie den Funktionsterm.

Lösung:

$$Punkt: \quad f(x) \;=\; ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=y$$

$$Steigung: \quad f'(x) \;=\; 4ax^3+3bx^2+2cx+d=m$$

$$Wendestelle: \quad f''(x) \;=\; 12ax^2+6bx+2c=0$$

$(i)\quad P(0 \mid 0):$	$f(0) \;=\; e=0$
$(ii)\quad m=0 \; in \; x=0:$	$f'(0) \;=\; d=0$
$(iii)\quad Wendestelle \; in \; x=0:$	$f''(0) \;=\; c=0$
$(iv)\quad W(1 \mid 1):$	$f(1) \;=\; a+b=1$
$(v)\quad Wendestelle \; in \; x=1:$	$f''(1) \;=\; 12a+6b=0$

$$\xrightarrow{(v)-6(iv)} 6a=-6 \;\rightarrow\; a=-1 \;\xrightarrow{(iv)\quad b=1-a}\; b=1-(-1)=2$$

$$Gesuchte\ Funktionsvorschrift: \quad f(x) \;=\; -x^4+2x^3$$

Teil 3:
Eine achsensymmetrische ganzrationale Funktion vierten Grades hat bei x = 2 eine Nullstelle und im Punkt P(1 / - 6) die Steigung m = - 2.
Ermitteln Sie die Funktionsgleichung.

Lösung:

$$Punkt: \quad f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = y$$
$$Steigung: \quad f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d = m$$
$$Wendestelle: \quad f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c = 0$$

$$Punkt: \quad f(x) = ax^4 + cx^2 + e = y$$
$$Steigung: \quad f'(x) = 4ax^3 + 2cx = m$$

(i) Achsensymmetrie:	$b = d = 0$
(ii) Nullstelle in $x = 2 \rightarrow N(2 \mid 0)$:	$f(2) = 16a + 4c + e = 0$
(iii) $P(1 \mid -6)$:	$f(1) = a + c + e = -6$
(iv) $m = -2$ in $x = 1$:	$f'(1) = 4a + 2c = -2$

$$\xrightarrow[(iv)\quad c=(-1-2a)]{(ii)-(iii)\quad 15a+3c=6} 15a + 3(-1-2a) = 6 \rightarrow 5a - 1 - 2a = 2 \rightarrow a = 1$$
$$\xrightarrow{(iv)\quad c=(-1-2a)} c = -1 - 2\cdot 1 = -3 \xrightarrow{(iii)\quad a+c+e=-6} e = -6 - 1 - (-3) = -4$$
$$Gesuchte\ Funktionsvorschrift: \quad f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$$

Aufgabe 4: Aussagenprüfung zur Rekonstruktion ganzrat. Funktionen | 8 | |

Beurteilen Sie die Bedingungsaussagen und kreuzen Sie richtig oder falsch an:

Eine ganzrationale Funktion dritten Grades hat
bei $x = 2$ eine Nullstelle,
bei $x = 1$ ein Minimum,
bei $x = 4$ ein Maximum
und bei $x = 2{,}5$ einen Wendepunkt.

richtig	falsch	
X	○	$f'(4) = 0$
○	X	$f(2{,}5) = 0$
○	X	$f''(1) = 0$
X	○	$f(2) = 0$
X	○	$f''(2{,}5) = 0$
○	X	$f'(2) = 0$
X	○	$f'(1) = 0$
○	X	$f''(3) = 0$