

Thema: Übergangsprozesse und Stat. GG;
LGS und Lösungsverhalten;
Populationsmodelle; Materialverflechtung

Name:

Punkte:

Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Aufgabe 1: Keksherstellung

26

Aus den Zutaten (T)eig, (M)armelade und (S)chokolade werden drei verschiedene Kekssorten K1, K2 und K3 hergestellt. Diese werden in drei verschiedenen Packungen P1, P2 und P3 verkauft. Die benötigten Mengeneinheiten in kg (ME in kg) sind in den Tabellen dargestellt:

	K_1	K_2	K_3		P_1	P_2	P_3
T	a	1	b	K_1	6	2	2
M	3	2	6	K_2	3	3	1
S	0	c	2	K_3	2	0	2

- a) Bestimmen Sie die Werte für a, b und c, wenn die Matrix folgende Werte besitzen soll:

$$M_{TMS_P} = \begin{pmatrix} 19 & 7 & 9 \\ 36 & 12 & 20 \\ 16 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Gleichungen:

$$2a + 3 = 7 \rightarrow a = 2 \Rightarrow 6a + 3 + 2b = 19 \rightarrow b = 2$$

$$3c + 4 = 16 \rightarrow c = 4$$

Im Lager sind folgende Vorräte vorhanden:

Teig: 950 kg; Marmelade: 1.880 kg und Schokolade: 1.000 kg

- b) Welche Anzahl der jeweiligen Paketsorte kann produziert werden, wenn danach das Lager vollständig leer sein soll.

Lösung:

$$M_{TMS_P} \cdot \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \\ M \\ S \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 19 & 7 & 9 \\ 36 & 12 & 20 \\ 16 & 12 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 950 \\ 1.880 \\ 1.000 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix}$$

c) Wir erhalten einen Auftrag von je 40 Paketen jeder Packungsart.

Welche Mengen an Zutaten müssen auf Lager sein?

Lösung:

$$M_{TMS_P} \cdot \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \\ M \\ S \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 19 & 7 & 9 \\ 36 & 12 & 20 \\ 16 & 12 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \\ M \\ S \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} T \\ M \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.400 \\ 2.720 \\ 1.440 \end{pmatrix}$$

d) Die drei Paketsorten sollen im Mengen-Verhältnis 1 : 3 : 2 hergestellt werden.

Welche Anzahl an Paketen jeder Sorte kann produziert werden, wenn 2.800 kg Marmelade vorrätig ist und diese komplett aufgebraucht werden soll.

Welche Menge an Teig und Schokolade muss zudem bereitgestellt werden?

Lösung:

$$M_{TMS_P} \cdot \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \\ M \\ S \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 19 & 7 & 9 \\ 36 & 12 & 20 \\ 16 & 12 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \cdot P_1 \\ 3 \cdot P_1 \\ 2 \cdot P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \\ 2.800 \\ S \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 58 \cdot P_1 \\ 112 \cdot P_1 \\ 68 \cdot P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \\ 2.800 \\ S \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow 112 \cdot P_1 = 2.800 \rightarrow P_1 = 25 \rightarrow P_2 = 75 \rightarrow P_3 = 50$$

$$\rightarrow 58 \cdot P_1 = T \rightarrow T = 1.450 \rightarrow 68 \cdot P_1 = S \rightarrow S = 1.700$$

Aufgabe 2: Schulkantine

24	
----	--

In einer Schulkantine essen täglich 360 Schüler und Lehrkräfte.

Es gibt drei verschiedene Mittagsmenüs:

Menü 1 mit (F)leisch

Menü 2 mit (G)eflügel

Menü 3 (V)egetarisch

Das **Menü 1 (F)** würden 80 % am nächsten Tag wiederwählen, wobei 10 % zum vegetarischen Essen wechseln.

Menü 2 (G) würde von 60 % wiedergewählt, während 30 % zu Fleischliebhabern werden.

Bei **Menü 3 (V)** würden 70 % verbleiben; 30 % wechseln zum Geflügel-Menü.

Am **Montag** war die Aufteilung auf die Menüs wie folgt:

F => 140 Personen G => 120 Personen V => Rest

a) Erstellen Sie die Übergangsmatrix.

Lösung:

$$U = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 & 0 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}$$

b) Welche Verteilung ist am Dienstag zu erwarten?

Lösung:

$$U \cdot \vec{p}_0 = \vec{p}_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 & 0 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 140 \\ 120 \\ 100 \end{pmatrix} = \vec{p}_1 \rightarrow \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 148 \\ 116 \\ 96 \end{pmatrix}$$

c) Wie viele Menüs wurden am Freitag jeweils bestellt?

Lösung:

$$U \cdot \vec{p}_{-1} = \vec{p}_0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 & 0 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \vec{p}_{-1} = \begin{pmatrix} 140 \\ 120 \\ 100 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{p}_{-1} = \begin{pmatrix} 128 \\ 125\frac{1}{3} \\ 106\frac{2}{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 128 \\ 125 \\ 107 \end{pmatrix}$$

d) Die Kantine kann nur rentabel arbeiten, wenn langfristig ein Anteil von ca. 30 % bei den vegetarischen Menüs erreicht werden kann.

Untersuchen Sie, ob dies bei gleichbleibendem Wechselverhalten zu erwarten ist.

Lösung:

$$U \cdot \vec{x} = \vec{x} \rightarrow (U - E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \rightarrow \begin{pmatrix} -0,2 & 0,3 & 0 \\ 0,1 & -0,4 & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & -0,3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

$$\xrightarrow[\text{Zeile streichen}]{x+y+z=1} \begin{pmatrix} -0,2 & 0,3 & 0 \\ 0,1 & -0,4 & 0,3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{x} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,30 \\ 0,25 \end{pmatrix}$$

e) Leider ist die Geflügelpest ausgebrochen, was auch Auswirkungen auf das Wechselverhalten in der Spalte Menü 2 der Übergangsmatrix hat.

Ermitteln Sie die neuen Werte der Spalte (Menü 2), wenn langfristig der Verteilungsvektor wie folgt aussehen würde:

F => 50 % G => 30 % V => 20 %

Anmerkung: Es sind die Werte der Spalte 2 der Übergangsmatrix zu berechnen.

Lösung:

$$U \cdot \vec{y} = \vec{y} \rightarrow \begin{pmatrix} 0,8 & a & 0 \\ 0,1 & b & 0,3 \\ 0,1 & c & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \\ 0,2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} 0,4 + 0,3a + 0 &= 0,5 \rightarrow a = \frac{1}{3} \approx 0,333 \\ 0,05 + 0,3b + 0,06 &= 0,3 \rightarrow b = \frac{19}{30} \approx 0,633 \\ 0,05 + 0,3c + 0,14 &= 0,2 \rightarrow c = \frac{1}{30} \approx 0,033 \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Lösungsverhalten LGS**22**

Gegeben ist für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Matrix $A_t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & t-3 & t+2 \\ t & 1 & t+4 \end{pmatrix}$ und der Vektor $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

a) Zeigen Sie, dass für die Determinante von A_t gilt: $\det(A_t) = t^2 + 7t - 30$

Lösung:

$$\det(A_t) = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & t-3 & t+2 \\ t & 1 & t+4 \end{pmatrix} \stackrel{\text{Laplace}}{=} 2 \cdot \begin{vmatrix} t-3 & t+2 \\ 1 & t+4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & t+2 \\ t & t+4 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & t-3 \\ t & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(A_t) = 2 \cdot (t^2 + t - 12 - t - 2) - 1 \cdot (t + 4 - t^2 - 2t) + 2 \cdot (1 - t^2 + 3t)$$

$$\det(A_t) = 2 \cdot (t^2 - 14) + t^2 + t - 4 - 2t^2 + 6t + 2 = t^2 + 7t - 30$$

b) Für welche Werte von t ist das LGS $A_t \cdot \vec{x} = \vec{d}$ eindeutig lösbar?

Lösung:

$$\det(A_t) = t^2 + 7t - 30 = 0 \rightarrow t_1 = -10 \text{ und } t_2 = 3$$

$$\Rightarrow t \in \mathbb{R} \setminus \{-10; 3\}$$

c) Wie lauten die Lösungen für $t = -10$ und $t = 3$?

Lösung: $t = -10$:

$$A_{-10} | \vec{d} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -13 & -8 & 1 \\ -10 & 1 & -6 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{i} \leftrightarrow \text{ii}]{\text{Zeilentausch}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -13 & -8 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ -10 & 1 & -6 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{iii} + 10\text{i}]{\text{ii} - 2\text{i}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -13 & -8 & 1 \\ 0 & 27 & 18 & -1 \\ 0 & -129 & -86 & 12 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{iii} + 129\text{ii}]{\text{i} + 13\text{ii}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{14}{27} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{27} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{65}{9} \end{array} \right)$$

Widerspruch
keine
Lösung

Lösung: $t = 3$:

$$A_3 | \vec{d} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 7 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{i} \leftrightarrow \text{ii}]{\text{Zeilentausch}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 7 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{iii} - 3\text{i}]{\text{ii} - 2\text{i}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -8 & -1 \\ 0 & 1 & -8 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{iii} - \text{ii}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Lösung}} L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 5z \\ -1 + 8y \\ z \end{pmatrix} \text{ mit } z \in \mathbb{R} \right\}$$

Abh'keit von z

d) Berechnen Sie folgenden Ausdruck: $\det[(A_1 - A_2)^2]$

Lösung:

$$\det[(A_1 - A_2)^2] = \det\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}\right]^2$$

$$\det[(A_1 - A_2)^2] = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

30	
----	--

Aufgabe 4: Käferpopulation

Die Entwicklung eines Käfers beschreibt das folgende Modell:

Aus den Eiern schlüpfen nach einem Monat Larven, nach einem weiteren Monat werden diese zu Käfern, die nach einem Monat Eier legen und dann sterben.

- Aber nur aus einem Viertel der Eier werden Larven, die anderen Eier werden von Tieren gefressen oder verenden.
- Von den Larven wird die Hälfte zu Käfern, die andere Hälfte stirbt.

Jeder Käfer legt 8 Eier.

- a) Stellen Sie das beschriebene Modell mit einem Graphen dar und geben Sie die Populationsmatrix P an.

Berechnen Sie mit P , wie eine Population von 40 Eiern, 40 Larven und 40 Käfern nach einem Monat aussieht.

- b) Die in a) angegebene Population soll über einen längeren Zeitraum beobachtet werden. Dazu benötigt man ein kleines Terrarium, wenn die Anzahl der Käfer im Laufe der Zeit nicht über 60 ansteigt, andernfalls ein großes.

Ermitteln Sie, welches Terrarium nach dem Populationsmodell gekauft werden muss.

- c) Bestimmen Sie für das Populationsmodell einen Anfangsbestand, der nach einem Monat unverändert ist.

Beschreiben Sie die Langzeitentwicklung dieses Bestandes.

Anmerkung zum notwendigen Ansatz: $P \cdot \vec{x} = \vec{x}$

- d) Bestimmen Sie für die Populationsmatrix P die Potenzen P^2 und P^3
Interpretieren Sie diesen Sachverhalt im Kontext der Population.

Lösung: a)

Graph:

Populationsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 320 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Die Population besteht also aus 320 Eiern, 10 Larven und 20 Käfern nach einem Monat.

Lösung: b)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 320 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 160 \\ 80 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ nach 2 Monaten 160 Eier, 80 Larven, 5 Käfer;}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 160 \\ 80 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix}, \text{ nach 3 Monaten ist wieder der Anfangsbestand erreicht.}$$

Die Anzahl der Käfer ist stets kleiner als 60, daher reicht das kleine Terrarium.

Lösung: c)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8z \\ 0,25x \\ 0,5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Gleichung I in II eingesetzt ergibt $2z = y$. Damit sind x und y Vielfache von z und der Lösungsvektor lautet $(8 \mid 2 \mid 1)$.

Damit bleibt z.B. die Anfangspopulation von 80 Eiern, 20 Larven und 10 Käfern unverändert. Andere Beispiele ergeben sich für andere Werte von z .

Lösung: d)

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0,125 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0,125 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hier zeigt sich auf andere Weise das Ergebnis von b), nämlich dass nach drei Monaten die Anfangspopulation wieder erreicht ist, weil gilt:

$$P^3 \cdot X_0 = X_0 = P^2 \cdot (P \cdot X_0) = P^2 \cdot X_1 = P \cdot (P \cdot X_1) = P \cdot X_2 = X_3.$$

Dabei ist X_0 der Anfangsbestand, X_1 der Bestand nach 1 Monat, X_2 nach 2 und X_3 nach 3 Monaten.

AUSWAHL: BEARBEITEN SIE ENTWEDER Aufgabe 5 oder Aufgabe 6!!!

18

Aufgabe 5: Populationsberechnung

Betrachtet wird die Entwicklung einer Population weiblicher Tiere eines Wildtierbestands in einem großen, abgeschlossenen Gebiet.

Die Entwicklung dieser weiblichen Tiere lässt sich in drei Lebensphasen einteilen:

Nachkommen werden im Frühjahr geboren und im ersten Lebensjahr als Kitze (K) sowie im Alter von einem Jahr als Jungtiere (J) bezeichnet.

Tiere ab einem Alter von zwei Jahren gelten als erwachsen (E).

Zu Beginn der Beobachtung der Population $(K, J, E)^T$ wird deren Zusammensetzung durch den Vektor

$$\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 115 \\ 65 \\ 320 \end{pmatrix} \text{ dargestellt. Die Übergangsmatrix lautet: } U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,65 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Welche Bedeutung haben die von 0 verschiedenen Werte der Übergangsmatrix im Sachzusammenhang?

Lösung:

0,8 => 80 % der überleben und werden zu Jungtieren

0,65 => 65 % der Jungtiere überleben und werden zu erwachsenen Tieren

5 => Im Durchschnitt entfallen auf jedes erwachsene Tier 5 Kitze, die geboren werden

- b) Zeigen Sie, dass nach 3 Jahren ein zyklischer Zusammenhang entsteht?
Wie ist das Wachstumsverhalten der Population?

Lösung:

$$U^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,65 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0,8 \cdot 0,65 \cdot 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 \cdot 0,65 \cdot 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 \cdot 0,65 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,6 & 0 & 0 \\ 0 & 2,6 & 0 \\ 0 & 0 & 2,6 \end{pmatrix}$$

Die Population wächst sehr stark.

c) Wie ist die Entwicklung der Tiere in den kommenden 3 Jahren?

Lösung:

$$U \cdot \vec{p}_0 = \vec{p}_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,65 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 115 \\ 65 \\ 320 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.600 \\ 92 \\ 42,25 \end{pmatrix} = \vec{p}_1 \xrightarrow{\text{Rundung}} \begin{pmatrix} 1.600 \\ 92 \\ 42 \end{pmatrix} = \vec{p}_1$$

$$U \cdot \vec{p}_1 = \vec{p}_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,65 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.600 \\ 92 \\ 42,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 211,25 \\ 1.280 \\ 59,8 \end{pmatrix} = \vec{p}_2$$

$$U \cdot \vec{p}_2 = \vec{p}_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,65 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 211,25 \\ 1.280 \\ 59,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 299 \\ 169 \\ 832 \end{pmatrix} = \vec{p}_3$$

$$\xrightarrow{\text{Rundung}} U \cdot \vec{p}_1 = \vec{p}_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,65 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.600 \\ 92 \\ 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 210 \\ 1.280 \\ 60 \end{pmatrix} = \vec{p}_2$$

$$\xrightarrow{\text{Rundung}} U \cdot \vec{p}_2 = \vec{p}_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,65 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 210 \\ 1.280 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 168 \\ 832 \end{pmatrix} = \vec{p}_3$$

Nachweis erfolgt, denn: $320 \cdot 2,6 = 832$

d) Nach drei Jahren halbiert eine Krankheit die Überlebensrate der Kitze.

Wie muss daher die Übergangsmatrix geändert werden und was bedeutet dies für die zyklische Entwicklung bzw. die Wachstumsrate?

Lösung:

$$U_{\text{neu}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0,65 & 0 \end{pmatrix}$$

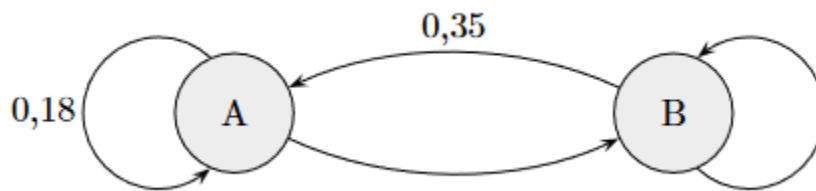
$$(U_{\text{neu}})^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0,65 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0,4 \cdot 0,65 \cdot 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 \cdot 0,65 \cdot 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 \cdot 0,65 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,3 & 0 & 0 \\ 0 & 1,3 & 0 \\ 0 & 0 & 1,3 \end{pmatrix}$$

Die Population wächst immer noch, aber in wesentlich geringerem Maße (Reduzierung um 50 %);
denn für 3 Jahre gilt: $320 \cdot 1,3 = 416$

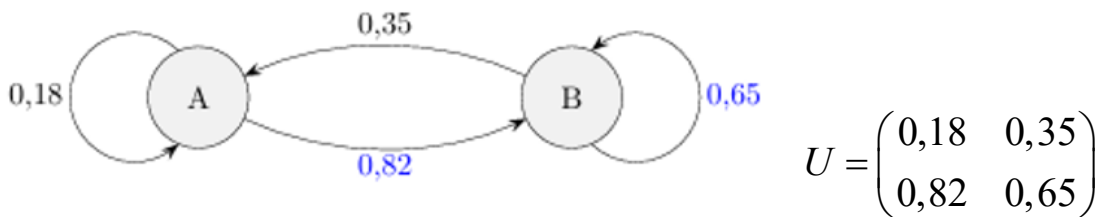
Aufgabe 6: Berechnungen von/mit Populationsmodellen & Stochastischen Matrizen

18

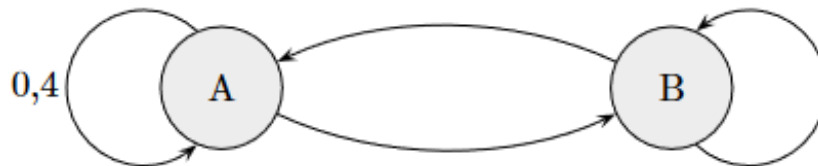
- a) Ergänzen Sie die fehlenden Einträge des Übergangsgraphen und geben Sie die zugehörige stochastische Übergangsmatrix an.



Lösung:



- b) Gegeben ist der Grenzvektor $\overrightarrow{p}_{fix} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,8 \end{pmatrix}$ (statisches Gleichgewicht) sowie das unvollständige Übergangsdiagramm. Bestimmen Sie die zugehörige stochastische Übergangsmatrix.



Lösung:

$$\begin{aligned} \text{Bedingung: } U \cdot \overrightarrow{p}_0 &= \overrightarrow{p}_0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0,4 & a \\ c & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,8 \end{pmatrix} \xrightarrow[c=0,6]{\text{stochastisch}} \begin{pmatrix} 0,8a + 0,08 \\ 0,12 + 0,8b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,8 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 0,8a \\ 0,8b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0,12 \\ 0,68 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,15 \\ 0,85 \end{pmatrix} \rightarrow U = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,15 \\ 0,6 & 0,85 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- c) Ein Austauschprozess wird durch die stochastische Matrix M modelliert.

$$M = \begin{pmatrix} a & 1-2b & 0 \\ 1-a & b & 1-c \\ 0 & b & c \end{pmatrix}$$

Welche Bedingungen müssen a, b und c erfüllen, damit die stabile/statische

Verteilung $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ vorliegt.

Lösung:

$$\text{Bedingung: } M \cdot \vec{p} = \vec{p} \rightarrow \begin{pmatrix} a & 1-2b & 0 \\ 1-a & b & 1-c \\ 0 & b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a+3-6b \\ 2-2a+3b+4-4c \\ 3b+4c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2a-6b \\ -2a+3b-4c \\ 3b+4c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{I+II} \begin{pmatrix} 0 \\ -3b-4c \\ 3b+4c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} a = -\frac{1}{2} + 3b \\ c = 1 - \frac{3}{4}b \end{matrix}$$

$$\rightarrow 0 \leq a \leq 1 \rightarrow 0 \leq -\frac{1}{2} + 3b \leq 1$$

$$\text{Fall 1: } 0 \leq -\frac{1}{2} + 3b \rightarrow \frac{1}{6} \leq b \quad \text{Fall 2: } -\frac{1}{2} + 3b \leq 1 \rightarrow b \leq \frac{1}{6} \rightarrow b = \frac{1}{6} \rightarrow a = 0 \rightarrow c = \frac{7}{8}$$

$$\rightarrow 0 \leq c \leq 1 \rightarrow 0 \leq 1 - \frac{3}{4}b \leq 1$$

$$\text{Fall 1: } 0 \leq 1 - \frac{3}{4}b \rightarrow b \leq \frac{4}{3} \quad \text{Fall 2: } 1 - \frac{3}{4}b \leq 1 \rightarrow b \geq 0 \xrightarrow{a} b = \frac{1}{6}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{7}{8} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Probe}} \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{7}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$