12. Jgst.	9. Test	Datum: 28.06.2024
Kurs M LK	Fach: Mathematik (Leistungsfach)	

Thema: **Leontief-Modell**

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Anmerkung:
Grundlegende Formeln bzw. Zusammenhänge

$$T \cdot \vec{x} + \vec{y} = \vec{x} \rightarrow \vec{y} = \vec{x} - T \cdot \vec{x} \rightarrow \vec{y} = (E - T) \cdot \vec{x}$$

Aufgabe 1: **6**

$$(E-T) = \begin{pmatrix} 0{,}6 & -0{,}05 & -0{,}4 \\ -0{,}3 & 0{,}75 & 0 \\ -0{,}12 & -0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix} \quad und \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 800 \\ 520 \\ 450 \end{pmatrix}$$

Bekannt sind die beiden Ausdrücke. Welche Werte muss dann die Verflechtungstabelle besitzen?

Lösung:

$$\rightarrow \quad T = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}05 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}25 & 0 \\ 0{,}12 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow$$

	A	B	C		Produktion
A	$\boxed{320}$	$\boxed{26}$	$\boxed{180}$		$x_1 = \boxed{800}$
B	$\boxed{240}$	$\boxed{130}$	$\boxed{0}$		$x_2 = \boxed{520}$
C	$\boxed{96}$	$\boxed{52}$	$\boxed{90}$		$x_3 = \boxed{450}$

Aufgabe 2: **14**

In den 3 Zweigwerken A, B und C eines Betriebes wird jeweils für die beiden anderen Zweigwerke und für den Markt produziert.
Die folgende Tabelle gibt die Produktionszahlen in ME an.
Die gegenseitige Abhängigkeit der Zweigwerke wird durch das Leontief-Modell beschrieben.

	A	B	C	Markt
A	0	10	10	10
B	10	0	10	40
C	0	30	0	30

a) Berechnen Sie die Input-/Technologiematrix gemäß Leontief-Modell.

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} & A & B & C & \text{Markt} \\ \hline A & 0 & 10 & 10 & 10 \\ B & 10 & 0 & 10 & 40 \\ C & 0 & 30 & 0 & 30 \end{array}\right) \rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 60 \end{pmatrix} \rightarrow T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

b) Wie viele Mengeneinheiten stehen für den Markt zur Verfügung,
wenn im 1. Zweigwerk (A) 100 ME, im 2. Zweigwerk (B) 180 ME und
im 3. Zweigwerk (C) 120 ME produziert werden?

$$T \cdot \vec{x} + \vec{y} = \vec{x} \rightarrow \vec{y} = \vec{x} - T \cdot \vec{x} \rightarrow \vec{y} = (E - T) \cdot \vec{x}$$

$$\rightarrow \vec{y} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 180 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 180 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ \frac{380}{3} \\ 30 \end{pmatrix}$$

c) In der nächsten Produktionsperiode benötigt man für den Markt 60 ME vom
Werk A, 75 ME vom Werk B und 90 ME vom Werk C.
Ermitteln Sie, wie viele ME dann in den einzelnen Zweigwerken produziert werden müssen.

$$T \cdot \vec{x} + \vec{y} = \vec{x} \rightarrow \vec{y} = \vec{x} - T \cdot \vec{x} \rightarrow \vec{y} = (E - T) \cdot \vec{x}$$

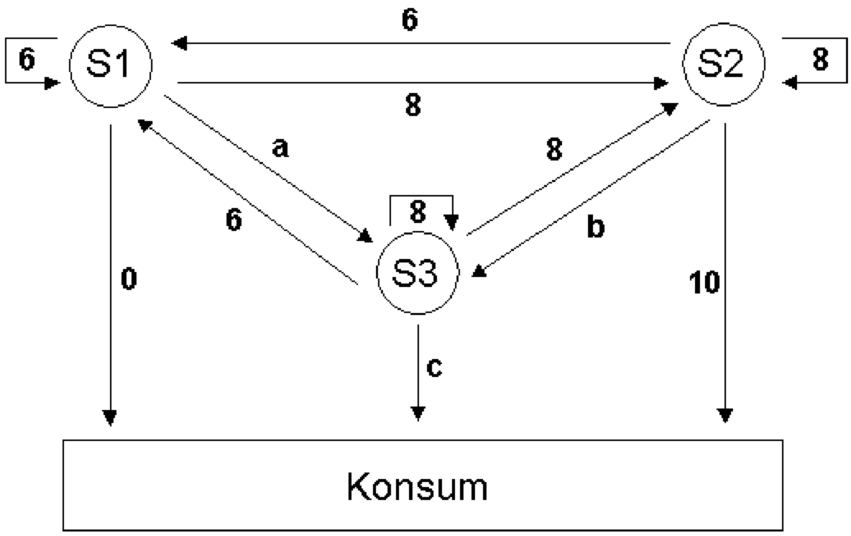
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 60 \\ 75 \\ 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{LGS} \vec{x} = \begin{pmatrix} 109{,}5 \\ 138 \\ 159 \end{pmatrix}$$

18	

Aufgabe 3:

Für die 3 Sektoren S_1, S_2 und S_3 einer Volkswirtschaft legt man das Modell von Leontief zugrunde. Die **Gesamtproduktion** von S_1 beträgt 30 Einheiten, von S_2 40 Einheiten und von S_3 ebenfalls 40 Einheiten.

Die gegenseitige Verflechtung in der laufenden Produktionsperiode wird durch das folgende Diagramm beschrieben:



a) Berechnen Sie die Werte von a, b und c und stellen Sie die gegenseitige Verflechtung der Sektoren in einer Tabelle dar.

	A	B	C	Markt	*Gesamt*
A	6	8	16	0	30
B	6	8	16	10	40
C	6	8	8	18	40

b) Welcher Konsumvektor ergibt sich bei einem Produktionsvektor $(40\ \ 50\ \ 30)^T$?

$$T \cdot \vec{x} + \vec{y} = \vec{x} \rightarrow \vec{y} = \vec{x} - T \cdot \vec{x} \rightarrow \vec{y} = (E - T) \cdot \vec{x}$$

$$\rightarrow \vec{y} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}2 & -0{,}4 \\ -0{,}2 & 0{,}8 & -0{,}4 \\ -0{,}2 & -0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix}$$

c) Wie viele Einheiten müssen die Sektoren in einer Periode produzieren, wenn der Konsumvektor $(18\ \ 24\ \ 12)^T$ beträgt ?

$$T \cdot \vec{x} + \vec{y} = \vec{x} \rightarrow \vec{y} = \vec{x} - T \cdot \vec{x} \rightarrow \vec{y} = (E - T) \cdot \vec{x}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}2 & -0{,}4 \\ -0{,}2 & 0{,}8 & -0{,}4 \\ -0{,}2 & -0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{LGS} \vec{x} = \begin{pmatrix} 64{,}5 \\ 70{,}5 \\ 48.75 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4:

Drei Sektoren A, B und C eines Unternehmens sind so miteinander verflochten, dass man sie mit dem Modell von Leontief beschreiben kann. Die folgende Tabelle gibt an, welche Mengeneinheiten in der vergangenen Produktionsperiode produziert und geliefert wurden.

	A	B	C	Markt	Produktion
A	15	20	x	20	60
B	20	20	y	30	80
C	10	0	z	20	40

a) Berechnen Sie, welche Mengeneinheiten an den Sektor C geliefert wurden und bestimmen Sie die Input-/Technologiematrix, die zu dieser Verflechtung gehört.

	A	B	C	Markt	Gesamt
A	15	20	5	20	60
B	20	20	10	30	80
C	10	0	10	20	40

$$\rightarrow \quad T = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

b) Die Nachfrage nach den Produkten der Sektoren A und B steigt, während die Nachfrage nach den Produkten des Sektors C unverändert bleibt **(=> Vektor y)**
Man beschließt daher, die Produktion des Sektors A um 20 % und die Produktion von B um 40 % zu steigern **(=> Vektor x).**
Wie viele Mengeneinheiten mehr müssen dann im Sektor C produziert werden?

$$T \cdot \vec{x} + \vec{y} = \vec{x} \rightarrow \vec{y} = \vec{x} - T \cdot \vec{x} \rightarrow \vec{y} = (E - T) \cdot \vec{x}$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 20 \end{pmatrix} \; ; \; \vec{x} = \begin{pmatrix} 60 \cdot 1,2 \\ 80 \cdot 1,4 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 \\ 112 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{3} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 72 \\ 112 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{Zeile 3}} -12 + 0 + \frac{3}{4} x_3 = 20 \rightarrow \frac{3}{4} x_3 = 32 \rightarrow x_3 = \frac{128}{3} = 42\frac{2}{3} \rightarrow \Delta x_3 = 2\frac{2}{3}$$