Musterlösung: **12. Jgst.** **2. Test** **Datum: 07.12.2004**

Klasse: GY 03 c **Fach: Mathematik (Leistungskurs)**

Thema: **Exponentialfunktionen mit Parameter; L'Hospital; Newton-Verfahren; Ableitung von Exponentialfunktionen**

---

❶ **Differentiation von Exponential- & Ln-Funktionen**

Bilden Sie die erste Ableitung folgender Funktionen:

a) $f(x) = x - e^{2x-3}$ => $f'(x) = 1 - 2e^{2x-3}$

b) $f(x) = x^2 e^{-3x}$ => $f'(x) = 2xe^{-3x} - 3x^2 e^{-3x}$

=> $f'(x) = xe^{-3x}(2-3x)$

c) $f_t(x) = x^{2x-3}$

=> $$f_t'(x) = x^{2x-3} \cdot \left[2\ln(x) + \frac{2x-3}{x} \right]$$

d) $f_t(x) = \ln\left(\sqrt{2x+t}\right)$

=> $$f_t'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+t}} \cdot \frac{2}{2\sqrt{2x+t}}$$

=> $$f_t'(x) = \frac{1}{2x+t}$$

❷ **Exponentialgleichungen:** Lösen Sie folgende Exponentialgleichung

$$e^{2x} - 2e^x - 3 \quad = \quad 2,25$$

$$u^2 - 2u - 5,25 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+21}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad u_{1/2} = \frac{2 \pm 5}{2} \quad \Rightarrow \quad u_1 = 3,5 \quad \wedge \quad u_2 = -1,5$$

$$\Rightarrow \quad e^x = 3,5 \quad \Rightarrow \quad x = \ln(3,5)$$

$$\Rightarrow \quad e^x = -1,5 \quad \Rightarrow \quad x = \ln(-1,5) \ n.d.$$

❸ **L'Hospital – oder nicht L'Hospital???**

Ermitteln Sie die Grenzwerte:

a) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x^2}\right) \xrightarrow{L'Hospital} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2x}\right) = 0$$

b) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-1}{x^2}\right) \xrightarrow{Grenzwertübergang} -\infty$$

c) $$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{e^x}{x^2}+3\right) \xrightarrow{Grenzwertübergang} 3$$

d) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x}{x^2}\right) \xrightarrow{L'Hospital} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x}{2x}\right) \xrightarrow{L'Hospital} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x}{2}\right)=\infty$$

❹ **Kurvenuntersuchung**

a) Untersuchen die Funktion $f_t(x)=\left(t-e^x\right)^2 \quad mit\ t>0$

auf Definitionsmenge, Symmetrie und Nullstellen.

Lösung: **Defintionsmenge:** $D=\Re$

Symmetrie: keine

$$f_t(-x)=\left(t-e^{-x}\right)^2 \neq f_t(-x)\ und \neq -f_t(x)$$

Nullstellen: $\left(t-e^x\right)^2=0 \quad\Rightarrow\quad x=\ln(t)$

b) Zeigen Sie, dass die Ableitungen der Funktion

$f_t(x)=e^{tx-\frac{1}{2}x^2} \quad mit\ t>0$ folgende Formen annehmen:

Lösung:

$$f_t'(x)=\frac{(t-x)e^{tx}}{e^{\frac{1}{2}x^2}} \quad \text{und} \quad f_t''(x)=e^{tx-\frac{1}{2}x^2}\left[(t-x)^2-1\right]$$

c) Bestimmen Sie die Extrema und die Ortskurve der Extremwerte der Funktion in b).

Lösung: Extrema

$$\frac{(t-x)e^{tx}}{e^{\frac{1}{2}x^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = t$$

$$f_t''(t) = -e^{\frac{1}{2}t^2} < 0 \qquad \Rightarrow \quad Max\left(t \;\middle|\; e^{\frac{1}{2}t^2} \right)$$

Lösung: Ortskurve

$$x = t \quad \Rightarrow \quad y = e^{\frac{1}{2}t^2} \quad \Rightarrow \quad y = e^{\frac{1}{2}x^2}$$

❺ **Newton-Verfahren**

Berechnen Sie die $\sqrt{2}$ mittels Iteration mit Newton auf 4 Stellen genau. Wählen Sie bitte einen geschickten Startwert.

Lösung: $f(x) = x^2 - 2\,; \quad f'(x) = 2x$

	A	B	C	D	E	F
1	Das Newton-Iterationsverfahren					
2						
3	Startwert x_1:	1		Anzahl der Iterationen:		3
4	Funktion f(x):					
5	Ableitung f'(x):					
6						
7	Berechnung der Nullstelle					
8						
9	n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$f(x_n)/f'(x_n)$	x_{n+1}
10	1	1,000000	-1,000000	2,000000	-0,500000	1,500000
11	2	1,500000	0,250000	3,000000	0,083333	1,416667
12	3	1,416667	0,006944	2,833333	0,002451	1,414216