Musterlösung **11. Jgst.** **4. Test** **Datum: 14.03.2006**

Klasse: GY 05 c **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: **Differentialquotient; Ableitungen; Tangenten und Normalen**

---

❶ **Differentialquotient**

Bilden Sie mit Hilfe des Differentialquotienten die Ableitung folgender Funktionen:

a) $f(x) = 4x$ b) $f(x) = x^2 - x$

<u>Lösung:</u>

$$f(x) = 4x$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4(x_0+h) - 4x_0}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{4x_0 + 4h - 4x_0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4h}{h} = 4$$

$$f(x) = x^2 - x$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left[(x_0+h)^2 - (x_0+h)\right] - \left(x_0^{\;2} - x_0\right)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x_0^{\;2} + 2x_0h + h^2 - x_0 - h - x_0^{\;2} + x_0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2x_0h + h^2 - h}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x_0 + h - 1)}{h} = 2x_0 - 1$$

❷ **Differentialquotient**

Erklären Sie kurz die mathematische Idee, die hinter dem Differentialquotienten

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

steckt.

Lösung:

Idee: Aus der Sekantensteigung zweier verschiedener Punkte wird durch die Bewegung eines Punktes auf der Funktionskurve auf den zweiten Punkt hin eine Tangentensteigung erzeugt;
mathematisch wird dies als die Entwicklung vom Differenzenquotient zum Differentialquotient bezeichnet.

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \xrightarrow{\text{P}_1 \text{ bewegt sich in Richtung P}_2} \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

❸ **Ableitungen**

Bilden Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \frac{4x^5-2x^3+x^2}{x^3}$

b) $f(x) = \frac{2}{5}x^3-\frac{1}{2}x+4$

c) $f(x) = \frac{2}{x^2}$

d) $f(x) = 4\sqrt{x}$

Lösung:

a) $f(x)=\frac{4x^5-2x^3+x^2}{x^3}=4x^2-2+\frac{1}{x} \xrightarrow{\text{Ableitung}} f'(x) = 8x-\frac{1}{x^2}$

b) $f(x) = \frac{2}{5}x^3-\frac{1}{2}x+4 \xrightarrow{\text{Ableitung}} f'(x) = \frac{6}{5}x^2-\frac{1}{2}$

c) $f(x) = \frac{2}{x^2} = 2x^{-2} \xrightarrow{\text{Ableitung}} f'(x) = -4x^{-3} = -\frac{4}{x^3}$

d) $f(x) = 4\sqrt{x} = 4x^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{\text{Ableitung}} f'(x) = 2x^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$

❹ **Tangenten ermitteln**

Bestimmen Sie die Tangenten der Funktionen f(x) und g(x)

a) $f(x) = 4x^2 - x + 1$ in x_1 = **2**.

b) $g(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2$ in x_2 = **-1**.

<u>Lösung:</u>

$$f(x) = 4x^2 - x + 1 \xrightarrow{x=2} f(2) = 15$$

$$f'(x) = 8x - 1 \xrightarrow{x=2} f'(2) = 15$$

$$t(x) = mx + b \xrightarrow{m=15;\, y=15;\, x=2} 15 = 15 \cdot 2 + b \Rightarrow b = -15$$

$$\Rightarrow t(x) = 15x - 15$$

$$g(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 \xrightarrow{x=-1} g(-1) = -\frac{5}{4}$$

$$g'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x \xrightarrow{x=-1} g'(-1) = \frac{11}{4}$$

$$t(x) = mx + b \xrightarrow{m=\frac{11}{4};\, y=-\frac{5}{4};\, x=-1} -\frac{5}{4} = \frac{11}{4} \cdot (-1) + b \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow t(x) = \frac{11}{4}x + \frac{3}{2}$$

❺ **Punkte zu den Steigungen finden**

An welchen Stellen besitzen die Funktionen f(x) und g(x) die folgenden Steigungen?

a) $f(x) = 4x^2 - x + 1$ $m_1 = 1$

b) $g(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2$ $m_2 = 0$

Anmerkung: Gesucht sind nur die x-Werte.

<u>Lösung:</u>

$$f(x) = 4x^2 - x + 1 \xrightarrow{Ableitung} f'(x) = 8x - 1 = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$g(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 \xrightarrow{Ableitung} g'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x = 0$$

$$\Rightarrow x\left(\frac{3}{4}x - 2\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = \frac{8}{3}$$

❻ **Beweis**

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ keinen Tangentenpunkt mit der Steigung m = 0 besitzt.

<u>Lösung:</u>

$$Beh.: \quad \exists\, x_0 \ mit \ f'(x_0) = 0$$

$$Bew.:$$

$$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow{Ableitung} f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \overset{!}{=} 0$$

nicht lösbar bzw. Widerspruch wegen 1 = 0

$\Rightarrow$ es existiert kein $x_0 \ mit \ f'(x_0) = 0$